



DOI:10.22144/ctujos.2026.205

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU ĐIỀU KHIỂN MỜ NHIỀU BIẾN PHỤ THUỘC SỬ DỤNG ĐẠO HÀM GRANULAR

Lê Thanh Tùng^{1,*}, Trần Thiện Khải², Phạm Lê Bạch Ngọc³ và Trịnh Tùng⁴

¹Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

²Trung tâm Đào tạo và Hợp tác Doanh nghiệp, Đại học Trà Vinh, Việt Nam

³Khoa Sư phạm và Xã hội Nhân văn, Trường Đại học Kiên Giang, Việt Nam

⁴Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

*Tác giả liên hệ (Corresponding author): lttung@ctu.edu.vn

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 09/06/2026

Sửa bài (Revised): 19/07/2026

Duyệt đăng (Accepted): 25/08/2026

Title: Optimality conditions for fuzzy optimal control problems of several dependent variables via granular derivatives

Author(s): Le Thanh Tung^{1,*}, Tran Thien Khai², Pham Le Bach Ngoc³ and Trinh Tung⁴

Affiliation(s): ¹Faculty of Mathematics, College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam; ²Center for Training and Enterprise Cooperation, Tra Vinh University, Viet Nam; ³Faculty of Pedagogy, Social Sciences & Humanities, Kien Giang University, Viet Nam; ⁴University of Science, Vietnam National University, Ho Chi Minh City, Viet Nam

TÓM TẮT

Trong bài báo này, các điều kiện tối ưu cần và đủ cho bài toán tối ưu điều khiển mờ với nhiều biến phụ thuộc đã được nghiên cứu bằng cách sử dụng đạo hàm granular. Trước tiên, điều kiện cần tối ưu dùng cách tiếp cận đạo hàm theo hướng được khảo sát. Tiếp theo, điều kiện đủ tối ưu được thiết lập bằng cách sử dụng các giả thiết lỗi. Tính thiết yếu của điều kiện đủ, ít được khảo sát trong các bài báo về tối ưu điều khiển mờ trước đây, được minh họa thông qua một ví dụ chi tiết. Cuối cùng, một mô hình ứng dụng cho bài toán điều khiển mờ theo sát quỹ đạo được trình bày.

Từ khóa: Giả thiết lỗi, bài toán tối ưu điều khiển mờ, bài toán điều khiển mờ theo sát quỹ đạo, đạo hàm granular, điều kiện tối ưu

ABSTRACT

In this paper, we investigate the necessary and sufficient optimality conditions for the fuzzy optimal control problem with several dependent variables via granular derivatives. By using the directional derivative approach, we first examine the necessary optimality condition. Then, the sufficient condition is established under convex assumptions. To emphasize the significance of the sufficient condition, which has received limited attention in previous fuzzy control optimization studies, a detailed example is provided. Finally, an application model for the fuzzy tracking problem is presented.

Keywords: Convexity, fuzzy optimal control problems, fuzzy tracking problem, granular derivatives, optimality conditions

1. MỞ ĐẦU

Bài toán tối ưu điều khiển hay điều khiển tối ưu (optimal control problem) là một bài toán quan trọng trong các bài toán tối ưu hóa. Trong trường hợp một biến, bài toán tối ưu điều khiển thay hàm vận tốc $\dot{x}(t) = v(t)$ trong bài toán tối ưu hóa biến phân (variational problem) của một chuyển động $x =$

$x(t)$ bằng một hàm vận tốc dạng $\dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t)$; trong đó, $u(t)$ là hàm điều khiển. Khi đó, nghiệm tối ưu trong bài toán tối ưu hóa biến phân của một chuyển động $x = x(t)$ có thể xem là quỹ đạo chuyển động tối ưu theo các quy luật tự nhiên; còn nghiệm tối ưu của bài toán tối ưu điều khiển là quỹ đạo chuyển động tối ưu khi có sự điều khiển của con người bởi hàm điều khiển $u = u(t)$.

Các kiến thức cơ bản của bài toán tối ưu điều khiển và bài toán tối ưu hóa biến phân có thể tham khảo trong các sách (Hestenes, 1966; Seierstad & Sydsæter, 1986; Lewis et al., 2012). Trong các bài toán tối ưu hóa, có nhiều yếu tố dẫn đến sự thiếu chính xác trong dữ liệu (Bellman & Zadeh, 1970) chẳng hạn như các yếu tố ảnh hưởng của môi trường bên ngoài gồm có nhiệt độ, áp suất, thời tiết, các yếu tố sai số do đo đạc, các yếu tố thiếu chính xác trong quá trình lấy ý kiến khảo sát. Để xác định nghiệm tối ưu chính xác hơn, các bài toán tối ưu hóa biến phân và tối ưu điều khiển được mở rộng thành các bài toán tối ưu hóa điều khiển dạng thời gian liên tục giá trị khoảng (Tung & Tam, 2022), bài toán tối ưu hóa biến phân mờ (Farhadinia, 2011; Tung & Tam, 2023; Bohner et al., 2025; Le et al., 2025) hay các bài toán tối ưu điều khiển mờ (Najariyan & Zhao, 2017; Dong et al., 2020; Treanță, 2022). Trong thời gian gần đây, một cách biểu diễn mới cho số mờ sử dụng hàm thuộc dạng không gian được đề xuất bởi Piegat and Landowski (2015). Các biểu diễn này có một số lợi thế hơn so với các dạng đạo hàm theo tập mức hay đạo hàm Hukuhara trong một số trường hợp, do không phải chia bài toán thành nhiều bài toán theo các trường hợp biểu diễn của số mờ. Nhiều kết quả gần đây đã sử dụng cách biểu diễn này và thu được nhiều kết quả mới trong phương trình vi phân mờ (Son et al., 2019), hệ động lực mờ (Truong et al., 2025), bài toán tối ưu điều khiển phân số mờ (Najariyan & Zhao, 2017; Dong et al., 2020), mô hình quản lý kho hàng mờ (Khatua et al., 2021). Các điều kiện tối ưu là một trong các điều kiện thiết yếu trong việc tìm nghiệm chính xác của bài toán tối ưu điều khiển mờ cũng như xây dựng các thuật toán để tìm nghiệm xấp xỉ. Điều kiện cần tối ưu cho bài toán tối ưu điều khiển mờ một biến sử dụng hàm thuộc dạng không gian đã được khảo sát trong (Mustafa et al., 2021). Tuy nhiên, điều kiện cần tối ưu cho bài toán điều khiển mờ nhiều biến chưa được khảo sát. Hơn nữa, hầu hết các kết quả về điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu điều khiển mờ trước đây như (Najariyan & Zhao, 2017; Fard et al., 2018; Dong et al., 2020; Khatua et al., 2021; Mustafa et al., 2021) chỉ là điều kiện cần, và rất ít các bài báo khảo sát điều kiện đủ tối ưu. Dựa trên những phân tích trên, điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu cho bài toán tối ưu mờ nhiều biến phụ thuộc được khảo sát trong bài báo này. Một ví dụ chi tiết cũng được trình bày để minh họa cho tính cần thiết của điều kiện đủ tối ưu. Ngoài ra, một mô hình ứng dụng cho bài toán điều khiển mờ theo sát quỹ đạo được trình bày.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, kí hiệu K_C là lớp của tất cả các khoảng đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}$. Tập hợp $\tilde{A}$ được xác định bởi

$$\tilde{A} = \{(u, \mu_{\tilde{A}}(u)) \mid u \in \mathbb{R}, \mu_{\tilde{A}}(u) \in [0, 1]\}$$

được gọi là một tập con mờ của tập $\mathbb{R}$. Số mờ $\tilde{A}$ là một tập con mờ $\tilde{A}$ thỏa tính chất: $\mu_{\tilde{A}}$ là hàm nửa liên tục, tựa lõm; tồn tại $u_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $\mu_{\tilde{A}}(u_0) = 1$ và $\text{cl}\{u: \mu_{\tilde{A}}(u) > 0\}$ là tập compact trên $\mathbb{R}$. Tập tất cả các số mờ trên $\mathbb{R}$ được kí hiệu là $F(\mathbb{R})$. Một số mờ $\tilde{u}$ được gọi là số chuẩn tắc trong trường hợp các hàm số $\eta_1(\mu) = u_{\mu}^L$ và $\eta_2(\mu) = u_{\mu}^R$ là liên tục trên đoạn $[0, 1]$, với $[u_{\mu}^L, u_{\mu}^R] = [\tilde{u}]^{\mu}$. Tập tất cả các số mờ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ kí hiệu $F_C(\mathbb{R})$. Hàm số $\tilde{\phi}: \mathbb{R} \rightarrow F_C(\mathbb{R})$ với giá trị $\tilde{\phi}(t)$ là một số mờ trong $F_C(\mathbb{R})$ được gọi là một hàm mờ.

Định nghĩa 2.1. (Piegat & Landowski, 2015) Cho $\tilde{u}: [a, b] \rightarrow [0, 1]$ ở trong $F_C(\mathbb{R})$. Khi đó, hàm thuộc dạng không gian của $\tilde{u}$ được định nghĩa như sau

$$u^{gr}: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [a, b]$$

$$(\mu, \alpha_u) \mapsto t := u^{gr}(\mu, \alpha_u) = u_{\eta}^L + (u_{\eta}^R - u_{\eta}^L)\alpha_u$$

Trong đó, “gr” kí hiệu cho thông tin cốt lõi (granule) được chứa trong $t \in [a, b]$, $\mu \in [0, 1]$ và $\alpha_u \in [0, 1]$. Hàm thuộc dạng không gian của $\tilde{u} \in F_C(\mathbb{R})$ cũng được kí hiệu là $\mathcal{H}(\tilde{u}):= u^{gr}(\mu, \alpha_u)$.

Mệnh đề 2.1. (Piegat & Landowski, 2015; Son et al., 2019) Hàm ngược $\mathcal{H}^{-1}(u^{gr}(\mu, \alpha_u))$ của $u^{gr}(\mu, \alpha_u)$ là số mờ $\tilde{u}$ với tập mức- μ là

$$[\mathcal{H}^{-1}(u^{gr}(\mu, \alpha_u))]^{\mu} = [\tilde{u}]^{\mu} = \left[\inf_{\beta \geq \mu} \min_{\alpha_u} u^{gr}(\beta, \alpha_u), \sup_{\beta \geq \mu} \max_{\alpha_u} u^{gr}(\beta, \alpha_u) \right].$$

Định nghĩa 2.2. Cho $\tilde{u}, \tilde{v}: [a, b] \rightarrow [0, 1]$ trong $F_C(\mathbb{R})$.

- (i) $\tilde{u} = \tilde{v}$ nếu $\mathcal{H}(\tilde{u}) = \mathcal{H}(\tilde{v})$ với mọi $\alpha_u = \alpha_v \in [0, 1]$ và $\mu \in [0, 1]$.
- (ii) $\tilde{u} \geq \tilde{v}$ nếu $\mathcal{H}(\tilde{u}) \geq \mathcal{H}(\tilde{v})$ với mọi $\alpha_u = \alpha_v \in [0, 1]$ và $\mu \in [0, 1]$.
- (iii) $\tilde{u} > \tilde{v}$ nếu $\mathcal{H}(\tilde{u}) > \mathcal{H}(\tilde{v})$ với mọi $\alpha_u = \alpha_v \in [0, 1]$ và $\mu \in [0, 1]$.

Hiệu granular của số mờ $\tilde{u}$ và số mờ $\tilde{v}$, kí hiệu bởi $\tilde{u} \ominus_{gr} \tilde{v}$, là một số mờ có hàm thuộc dạng không gian xác định bởi

$$\mathcal{H}(\tilde{u} \ominus_{gr} \tilde{v}) = \mathcal{H}(\tilde{u}) - \mathcal{H}(\tilde{v}).$$

Các phép toán khác định nghĩa tương tự.

Định nghĩa 2.3. Cho $\tilde{\phi}: [a, b] \rightarrow F_C(\mathbb{R})$ là một hàm mờ.

(i) (Mazandarani et al., 2017) Hàm mờ $\tilde{\phi}$ được gọi là khả vi granular (gr-khả vi) tại $t_0 \in (a, b)$ nếu tồn tại số mờ $\frac{d_{gr}\tilde{\phi}(t_0)}{dt} \in F_C(\mathbb{R})$ sao cho giới hạn sau tồn tại:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{\phi}(t_0 + h) \ominus_{gr} \tilde{\phi}(t_0)}{h} = \frac{d_{gr}\tilde{\phi}(t_0)}{dt},$$

trong đó giới hạn được lấy trong không gian metric $(F_C(\mathbb{R}), D_{gr})$.

Mệnh đề 2.2. (Mazandarani et al., 2017; Son et al., 2019) Hàm mờ $\tilde{\phi}: [a, b] \rightarrow F_C(\mathbb{R})$ khả vi granular tại $t_0 \in [a, b]$ nếu và chỉ nếu hàm thuộc dạng không gian của nó $\mathcal{H}(\tilde{\phi}(t)) = \phi^{gr}(t, \mu, \alpha_\phi)$ khả vi ứng với t tại điểm đó. Hơn nữa, $\mathcal{H}\left(\frac{d_{gr}\tilde{\phi}(t)}{dt}\right) = \frac{\partial \mathcal{H}\tilde{\phi}(t)}{\partial t}$.

Định nghĩa 2.4. Cho $\tilde{\phi}: [a, b] \rightarrow F_C(\mathbb{R})$ là hàm có giá trị mờ.

(i) $C([a, b])$ là không gian của tất cả các hàm mờ liên tục trên $[a, b]$, nghĩa là,

$$C([a, b]) = \{\tilde{\phi} : \tilde{\phi} \text{ liên tục trên } [a, b]\}.$$

(ii) $C^1([a, b])$ là không gian của tất cả các hàm mờ gr-khả vi liên tục trên $[a, b]$, nghĩa là,

$$C^1([a, b]) = \{\tilde{\phi} : \exists \tilde{\phi}': [a, b] \rightarrow F_C(\mathbb{R}) \text{ và } \tilde{\phi} \text{ liên tục trên } [a, b]\}.$$

Nhận xét 2.1. Hàm mờ $\tilde{\phi}: [a, b] \rightarrow F_C(\mathbb{R})$ khả vi liên tục trên $[a, b]$ nếu và chỉ nếu hàm thuộc dạng không gian $\mathcal{H}(\tilde{\phi}(t)) = \phi^{gr}(t, \mu, \alpha_\phi)$ khả vi liên tục trên $[a, b]$.

Định nghĩa 2.5. (Mazandarani et al., 2017; Son et al., 2019) Tích phân của hàm mờ $\tilde{\phi}: [a, b] \rightarrow F_C(\mathbb{R})$, kí hiệu $\tilde{\int}_a^b \tilde{\phi}(t)dt$, tồn tại nếu tồn tại một số mờ $\tilde{m} = \tilde{\int}_a^b \tilde{\phi}(t)dt$ và

$$\begin{aligned} \mathcal{H}\left(\tilde{\int}_a^b \tilde{\phi}(t)dt\right) &= \mathcal{H}(\tilde{m}) = \int_a^b \mathcal{H}(\tilde{\phi}(t))dt \\ &= \int_a^b \phi^{gr}(t, \mu, \alpha_\phi)dt. \end{aligned}$$

Các định nghĩa và mệnh đề trong mục này được dùng trong các tính toán các phép toán dạng granular trên số mờ trong phần tiếp theo.

Bổ đề 2.1. (Hestenes, 1966; Lewis et al., 2012; Clarke, 2013)

Giả sử rằng $\phi(t)$ là hàm có giá trị thực liên tục trên $[a, b]$. Nếu $\int_a^b \phi(t)\eta(t)dt = 0$ với mọi $\eta(t) \in C^1[a, b]$ sao cho $\eta(a) = \eta(b) = 0$, thì $\phi(t) = 0$ với mọi $t \in [a, b]$.

Bổ đề 2.2. (Hestenes, 1966; Lewis et al., 2012; Clarke, 2013)

Cho hệ m hàm $(n + m \text{ biến số}) F_i: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} (i = 1, \dots, m)$ thỏa

(i) $F_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) (i = 1, \dots, m)$ là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng trong lân cận Δ của điểm $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = (0_n, 0_m)$;

(ii) $F_i(0_n, 0_m) = 0 (i = 1, \dots, m)$ và định thức Jacobi

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_{y_1}(0_n, 0_m) & \dots & (F_1)'_{y_m}(0_n, 0_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (F_m)'_{y_1}(0_n, 0_m) & \dots & (F_m)'_{y_m}(0_n, 0_m) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Khi đó, tồn tại lân cận $S_\delta(0_n)$ và $S_\epsilon(0_m)$ sao cho

(a) Với mọi $x \in S_\delta(0_n)$ tồn tại duy nhất $y \in S_\epsilon(0_m)$, kí hiệu $y_i = f_i(x) = f_i(x_1, \dots, x_n) (i = 1, \dots, m)$ sao cho

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)) = 0. \end{cases}$$

(b) Hơn nữa, các hàm $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n) (j = 1, \dots, m)$ cũng có các đạo hàm riêng liên tục $\frac{\partial y_i}{\partial x_j} (j = 1, \dots, n)$.

Các Bổ đề 2.1 và 2.2 được dùng trong chứng minh điều kiện cần tối ưu trong mục tiếp theo.

3. ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

Trong bài báo này, xét bài toán tối ưu điều khiển mờ của nhiều biến số phụ thuộc dạng như sau

$$(\text{FOCP}): \tilde{m} \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \tilde{J}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$$

$$= \tilde{\int}_0^T \tilde{f}(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_n(t), t)dt,$$

với

$$\tilde{x}_1(t) = \tilde{g}_1(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_n(t), t)$$

.....

$$\tilde{x}_n(t) = \tilde{g}_n(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_n(t), t)$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}_1(0) = \tilde{x}_{0,1}, \dots, \tilde{x}_n(0) = \tilde{x}_{0,n}, \tilde{x}_1(T) = \\ \tilde{x}_{T,1}, \dots, \tilde{x}_n(T) = \tilde{x}_{T,n}, \end{aligned}$$

trong đó, $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n \in C^1([0, T])$, hàm $\tilde{f}, \tilde{g}_j: F_C(\mathbb{R})^{2n} \times \mathbb{R} \rightarrow F_C(\mathbb{R}) (j = 1, \dots, n)$ là các hàm thuộc lớp C^1 và $\tilde{f}: (C^1([0, T]))^n \rightarrow F_C(\mathbb{R})$. Để thuận tiện, ta kí hiệu

$$\begin{aligned} \tilde{f}[\tilde{x}, \tilde{u}](t) \\ = \tilde{f}(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_n(t), t)dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{g}_j[\tilde{x}, \tilde{u}](t) \\ = \tilde{g}_j(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \tilde{u}_1(t), \dots, \tilde{u}_n(t), t), j \\ = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$\tilde{x}_0 = (\tilde{x}_{0,1}, \dots, \tilde{x}_{0,n}), \tilde{x}_T = (\tilde{x}_{T,1}, \dots, \tilde{x}_{T,n}).$$

Tập các điểm chấp nhận được của (FOCP) là

$$\begin{aligned} \tilde{\Omega} = \{(\tilde{x}, \tilde{u}) \in (C^1([0, T]))^{2n} \mid \tilde{x}_j(t) = \tilde{g}_j[\tilde{x}, \tilde{u}](t), \\ j = 1, \dots, n, \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \tilde{x}(T) \\ = \tilde{x}_T\}. \end{aligned}$$

Hàm $(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*) \in (C^1([0, T]))^{2n}$ là nghiệm tối ưu địa phương của (FOCP) nếu tồn tại lân cận N của $(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)$ sao cho

$$\tilde{J}(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*) \leq \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}), \forall (\tilde{x}, \tilde{u}) \in U \cap \tilde{\Omega}.$$

Nếu $N = (C^1([0, T]))^{2n}$ thì $\tilde{x}$ là nghiệm tối ưu toàn cục của (FOCP).

Bài toán tối ưu điều khiển mờ dạng granular tương ứng với (FOCP), kí hiệu (GOCP), có dạng như sau

$$\begin{aligned} (\text{GOCP}): \min J^{gr}(x^{gr}, u^{gr}) \\ = \int_0^T f^{gr}(x_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_1}), \dots, x_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_n}), \\ \text{với} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{\dot{x}_1}) = g_1^{gr}(x_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_1}), \dots, x_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_n}), \\ , u_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_1}), \dots, u_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_n}), t) \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} \dot{x}_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{\dot{x}_n}) \\ = g_n^{gr}(x_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_1}), \dots, x_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_n}), \\ , u_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_1}), \dots, u_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_n}), t) \end{aligned}$$

$$x_i^{gr}(0, \mu, \alpha_{x_i}) = x_{0,i}^{gr}(\mu, \alpha_{x_{0,i}}),$$

$$x_i^{gr}(T, \mu, \alpha_{x_i}) = x_{T,i}^{gr}(\mu, \alpha_{x_{T,i}}),$$

$$\forall \alpha_{x_i} = \alpha_{x_{0,i}} = \alpha_{x_{T,i}} (i = 1, \dots, n).$$

Để thuận tiện, ta kí hiệu

$$\begin{aligned} f^{gr}[x^{gr}, u^{gr}](t, \mu, \alpha_f) \\ = f^{gr}(x_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_1}), \dots, x_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_n}), \dots, \\ , u_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_1}), \dots, u_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_n}), t) \\ g_j^{gr}[x^{gr}, u^{gr}](t, \mu, \alpha_f) \\ = g_j^{gr}(x_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_1}), \dots, x_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_n}), \dots, \\ , u_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_1}), \dots, u_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_n}), t) \\ j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

$$\mathcal{H}(\tilde{x}(t)) = (\mathcal{H}(\tilde{x}_1(t)), \dots, \mathcal{H}(\tilde{x}_n(t))) = x^{gr},$$

$$\mathcal{H}^{-1}(x^{gr}) = (\mathcal{H}^{-1}(x_1^{gr}), \dots, \mathcal{H}^{-1}(x_n^{gr})) = \tilde{x}(t),$$

tương tự cho $\tilde{u}(t), u^{gr}$.

Với các hàm $\varphi: \mathbb{R}^{2n+3} \rightarrow \mathbb{R}$ dạng $\varphi(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, t, \mu, \alpha_\varphi)$ (như các hàm f, g_j) kí hiệu $\partial_i \varphi = \varphi'_{x_i} (i = 1, \dots, n)$ và $\partial_{u_i} \varphi = \varphi'_{u_i} (i = n + 1, \dots, 2n)$.

Tập các điểm chấp nhận được của (GOCP) là

$$\Omega^{gr} = \{(x^{gr}, u^{gr}) \in (C^1[0, T])^{2n} \mid$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_j^{gr}(t, \mu, \alpha_{\dot{x}_j}) = g_j^{gr}[x^{gr}, u^{gr}](t, \mu, \alpha_{g_j}), j \\ = 1, \dots, n, x^{gr}(0) \\ = x_0^{gr}, x^{gr}(T) = x_T^{gr}\}. \end{aligned}$$

Hàm $(x^{*gr}, u^{*gr}) \in (C^1[0, T])^{2n}$ được gọi là nghiệm tối ưu địa phương của (GOCP) nếu tồn tại lân cận N^{gr} của (x^{*gr}, u^{*gr}) sao cho

$$J(x^{*gr}, u^{*gr}) \leq J(x^{gr}, u^{gr}), \forall x^{gr} \in U^{gr} \cap \Omega^{gr}.$$

Nếu $N^{gr} = (C^1[0, T])^{2n}$ thì (x^{*gr}, u^{*gr}) là nghiệm tối ưu toàn cục của (GOCP).

Mệnh đề sau được chứng minh tương tự như các dạng khác của bài toán biến phân mờ trong (Tung & Tam, 2023; Le et al., 2025).

Mệnh đề 3.1. Giả sử $\mathcal{H}: \tilde{\Omega} \subset F_C(\mathbb{R})^{2n} \rightarrow \Omega^{gr} \subset \mathbb{R}^n$ được xác định bởi $\mathcal{H}((\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))) = (x^{gr}, u^{gr})$ là song ánh thì

$$(i) \mathcal{H}(\tilde{\Omega}) = \Omega^{gr} \text{ và } \mathcal{H}^{-1}(\Omega^{gr}) = \tilde{\Omega};$$

(ii) Nếu $(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)$ là nghiệm tối ưu của bài toán (FOCP) thì $\mathcal{H}(\tilde{x}^*(t), \tilde{u}^*(t)) = (x^{*gr}, u^{*gr})$ cũng là nghiệm tối ưu của bài toán (GOCP);

(iii) Nếu x^{*gr} là nghiệm tối ưu của bài toán (GOCP) thì $(\tilde{x}^*(t), \tilde{u}^*(t)) = \mathcal{H}^{-1}(x^{*gr}, u^{*gr})$ cũng là nghiệm tối ưu của bài toán (FOCP).

Khi xét bài toán tối ưu điều khiển tổng quát với x^{gr}, u^{gr} nằm trong lớp hàm rộng hơn lớp hàm $C^1[0, T]$, nghĩa là giả thiết nhẹ hơn, hoặc các miền cho x^{gr}, u^{gr} bị hạn chế tại các biên như bài toán điều khiển bang-bang, nguyên lý cực trị Pontryagin thường được dùng trong chứng minh điều kiện cần tối ưu, với chi tiết có thể tham khảo trong các sách (Hestenes, 1966; Seierstad & Sydsaeter 1986; Lewis et al., 2012). Trong bài báo này, kỹ thuật chứng minh dùng biến phân hay đạo hàm theo hướng được sử dụng, tham khảo thêm cách tiếp cận này trong (Hestenes, 1966; Clarke, 2013; Tùng và ctv., 2024).

Mệnh đề 3.2. Nếu $(x^{*gr}, u^{*gr}) = (x_1^{*gr}, \dots, x_n^{*gr}, u_1^{*gr}, \dots, u_n^{*gr}) \in (C^1[0, T])^{2n}$ là nghiệm tối ưu của (GOCP) thì tồn tại các hàm liên tục $\lambda_j^{gr} = \lambda_j^{gr}(t, \mu, \alpha_j)$ ($j = 1, \dots, n$) sao cho biến trạng thái $x^{*gr} = (x_1^{*gr}, \dots, x_n^{*gr})$ và biến điều khiển $u^{*gr} = (u_1^{*gr}, \dots, u_n^{*gr})$ thỏa các phương trình sau:

(i) Các điều kiện tối ưu theo biến điều khiển

$$\partial_{i+n} f^{gr} + \partial_{i+n} g_1^{gr} \lambda_1^{gr} + \dots + \partial_{i+n} g_n^{gr} \lambda_n^{gr} = 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

(ii) Các điều kiện tối ưu theo biến liên hợp

$$\dot{\lambda}_i^{gr} = -\partial_i f^{gr} - \partial_i g_1^{gr} \lambda_1^{gr} - \dots - \partial_i g_n^{gr} \lambda_n^{gr} \quad (i = 1, \dots, n),$$

trong đó, $f^{gr} = f^{gr}[x^{*gr}, u^{*gr}](t, \mu, \alpha_f)$,

$$g_j^{gr} = g_j^{gr}[x^{*gr}, u^{*gr}](t, \mu, \alpha_{g_j}) \quad (j = 1, \dots, n).$$

Chứng minh.

Xét một biến phân của $(x^{*gr}, u^{*gr}) = (x_1^{*gr}, \dots, x_n^{*gr}, u_1^{*gr}, \dots, u_n^{*gr})$

dạng $(x^{*gr}, u^{*gr}) + \epsilon(h_x, l_u) \in \Omega^{gr}$ hay

$$(x_1^{*gr}, \dots, x_n^{*gr}, u_1^{*gr}, \dots, u_n^{*gr}) + \epsilon(h_1, \dots, h_n, l_1, \dots, l_n)$$

với $|\epsilon| < \theta, \theta > 0$ nhỏ và hàm tùy ý $(h_1, \dots, h_n, l_1, \dots, l_n) \in C^1([0, T])^{2n}$ thỏa $h_i(0) = h_i(T) = 0 (i = 1, \dots, n)$.

(i) Do (x^{*gr}, u^{*gr}) là nghiệm tối ưu của (GOCP), nên $(x^{*gr}, u^{*gr}) \in \Omega^{gr}$, do đó

$$\dot{x}_j^{gr} = g_j[x^{gr}, u^{gr}](t, \mu, \alpha_j) (j = 1, \dots, n).$$

Sử dụng kí hiệu $(h, l) = (h_1, \dots, h_n, l_1, \dots, l_n)$ với $h_i = h_i(t), l_i = l_i(t)$,

$$(\dot{h}, \dot{l}) = (\dot{h}_1, \dots, \dot{h}_n, \dot{l}_1, \dots, \dot{l}_n) \text{ với } \dot{h}_i = \dot{h}_i(t),$$

$$\dot{l}_i = \dot{l}_i(t) \text{ và các hàm } G_j(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^{3n} \rightarrow \mathbb{R} \text{ là}$$

$$G_j = G_j(h_1, \dots, h_n, l_1, \dots, l_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_n).$$

Hệ gồm n hàm với $3n = 2n + n$ biến số xác định bởi

$$\begin{aligned} & G_1(h_1, \dots, h_n, l_1, \dots, l_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_n) \\ &= g_1^{gr}(x_1^{*gr} + \epsilon h_1, \dots, x_n^{*gr} + \epsilon h_n, u_1^{*gr} + \epsilon l_1, \dots, \\ & u_n^{*gr} + \epsilon l_n, \dot{x}_1^{*gr} + \epsilon \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n^{*gr} + \epsilon \dot{h}_n, t, \mu, \alpha_{g_1}) \\ & \quad - \dot{x}_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_1}), \\ & G_n(h_1, \dots, h_n, l_1, \dots, l_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_n) \\ &= g_n^{gr}(x_1^{*gr} + \epsilon h_1, \dots, x_n^{*gr} + \epsilon h_n, u_1^{*gr} + \epsilon l_1, \dots, \\ & u_n^{*gr} + \epsilon l_n, \dot{x}_1^{*gr} + \epsilon \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_n^{*gr} + \epsilon \dot{h}_n, t, \mu, \alpha_{g_n}) \\ & \quad - \dot{x}_n^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_n}). \end{aligned}$$

Các hàm G_j liên tục cùng các đạo hàm riêng trong lân cận Δ của $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = (0_{2n}, 0_n)$,

$$G_j(0_{2n}, 0_n) = g_j^{gr}[x^{*gr}, u^{*gr}](t, \mu, \alpha_{g_j}) - \dot{x}_j^{gr} = 0 \quad (j = 1, \dots, n) \text{ và}$$

$$\begin{aligned} JG &= \frac{\partial(G_1, \dots, G_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)}(0_{2n}, 0_n) \\ &= \begin{bmatrix} \partial_1 G_1(0_{2n}, 0_n) & \dots & \partial_{3n} G_1(0_{2n}, 0_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 G_n(0_{2n}, 0_n) & \dots & \partial_{3n} G_n(0_{2n}, 0_n) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \partial_1 g_1^{gr} & \dots & \partial_{2n} g_1^{gr} & -\epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 g_n^{gr} & \dots & \partial_{2n} g_n^{gr} & 0 & \dots & -\epsilon \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

với $\partial_i g_j^{gr} = \partial_i g_j^{gr}(x^{*gr}, u^{*gr})$, có một định thức con cấp n khác không

$$D = \det \begin{bmatrix} -\epsilon & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & -\epsilon \end{bmatrix} = \epsilon(-1)^n \neq 0.$$

Do cấu trúc đặc biệt của bài toán điều khiển tối ưu, nên điều kiện chính quy hay định tính ràng buộc (constraint qualification) thường có trong các điều kiện cần tối ưu luôn thỏa. Định lý hàm ẩn được áp dụng trong Bổ đề 2.2, ta suy ra sự tồn tại lân cận U của $(0_{2n}, 0_n)$ và các hàm $\dot{h}_1, \dots, \dot{h}_n: U \rightarrow \mathbb{R}$ với

$$\begin{aligned} \dot{h}_1 &= \dot{h}_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n), \dots \\ \dot{h}_n &= \dot{h}_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) \text{ thỏa} \\ \dot{h}_j(0_{2n}, 0_n) &= 0 \quad (j = 1, \dots, n) \end{aligned}$$

sao cho, $\forall j = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned} G_j(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n, \dot{h}_1(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n), \\ \dots, \dot{h}_n(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n)) = 0, \\ \forall (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_n) \in U. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến sự tồn tại $\theta > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$\begin{aligned} H_j(\epsilon) &= g_j^{gr}(x_1^{*gr} + \epsilon h_1, \dots, (x_n^{*gr} + \epsilon h_n, \\ u_1^{*gr} + \epsilon l_1, \dots, u_n^{*gr} + \epsilon l_n, t, \mu, \alpha_{g_j}) \\ &\quad - (\dot{x}_j^{*gr} + \epsilon \dot{h}_j) = 0. \end{aligned}$$

với mọi $|\epsilon| < \theta$. Nên,

$$H(0) \leq H(\epsilon), \forall |\epsilon| < \theta.$$

Do đó, theo điều kiện cần cực trị hàm 1 biến $H_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ta có

$$\begin{aligned} \left. \frac{dH_j}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= \partial_1 g_j^{gr} \cdot h_1 + \dots + \partial_n g_j^{gr} \cdot h_n \\ &\quad \partial_{n+1} g_j^{gr} \cdot l_1 + \dots + \partial_{2n} g_j^{gr} \cdot l_n \\ &\quad - \dot{h}_1 - \dots - \dot{h}_n = 0 \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.1) \end{aligned}$$

(ii) Do (x^{*gr}, u^{*gr}) là nghiệm tối ưu của (GCOP), nên phiếm hàm tích phân

$$I(\epsilon) = \int_0^T f^{gr}(x_1^{*gr} + \epsilon h_1, \dots, x_n^{*gr} + \epsilon h_n, u_1^{*gr} + \epsilon l_1, \dots, u_n^{*gr} + \epsilon l_n, t, \mu, \alpha_f) dt$$

thỏa $I(\epsilon) - I(0) \geq 0, \forall \epsilon \geq 0$. Do đó, theo điều kiện tối ưu cho hàm một biến

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = I'(0) = 0.$$

Điều này dẫn đến

$$\begin{aligned} \int_0^T [\partial_1 f^{gr} \cdot h_1 + \dots + \partial_n f^{gr} \cdot h_n + \partial_{n+1} f^{gr} \cdot l_1 \\ + \dots + \partial_{2n} f^{gr} \cdot l_n] dt = 0. \quad (3.2). \end{aligned}$$

(iii) Nhân hai vế (3.1) với $\lambda_j^{gr} = \lambda_j^{gr}(t, \mu, \alpha_{\lambda_j})$ rồi lấy tích phân 2 vế trên $[0, T]$ và sau đó cộng với (3.2), ta có

$$\begin{aligned} \int_0^T \{(\partial_1 f^{gr} + \lambda_1^{gr} \cdot \partial_1 g_1^{gr} + \dots + \lambda_n^{gr} \cdot \partial_1 g_n^{gr}) \cdot h_1 \\ + \dots \\ + (\partial_n f^{gr} + \lambda_1^{gr} \cdot \partial_1 g_1^{gr} + \dots \\ + \lambda_n^{gr} \cdot \partial_1 g_n^{gr}) h_n \\ + (\partial_{n+1} f^{gr} + \lambda_1^{gr} \cdot \partial_{n+1} g_1^{gr} + \dots \\ + \lambda_n^{gr} \cdot \partial_{n+1} g_n^{gr}) \cdot l_1 + \dots + \\ (\partial_{2n} f^{gr} + \lambda_1^{gr} \cdot \partial_{2n} g_1^{gr} + \dots + \lambda_n^{gr} \cdot \partial_{2n} g_n^{gr}) l_n \\ - (\lambda_1^{gr} \dot{h}_1 + \dots + \lambda_n^{gr} \dot{h}_n)\} dt = 0 \end{aligned}$$

Đặt $L^{gr} = L^{gr}[x^{*gr}, u^{*gr}](t, \mu, \alpha_{L^{gr}}) = f^{gr} + \lambda_1^{gr} g_1^{gr} + \dots + \lambda_n^{gr} g_n^{gr}$, ta có

$$\begin{aligned} \int_0^T (\partial_1 L^{gr} \cdot h_1 + \dots + \partial_n L^{gr} \cdot h_n + \dots \\ + \partial_{n+1} L^{gr} \cdot l_1 + \dots + \partial_{2n} L^{gr} \cdot l_n \\ - \lambda_1^{gr} \dot{h}_1 - \dots - \lambda_n^{gr} \dot{h}_n) dt = 0. \end{aligned}$$

Công thức từng phần được sử dụng:

$$\begin{cases} u = \lambda_i^{gr} \\ dv = \dot{h}_i dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{d}{dt}(\lambda_i^{gr}) = \dot{\lambda}_i^{gr} \\ v = \int \dot{h}_i dt = h_i \end{cases}$$

Với giả thiết $h_i(0) = h_i(T) = 0 (i = 1, \dots, n)$, ta có

$$\begin{aligned} \int_a^b \{(\partial_1 L^{gr} + \dot{\lambda}_1^{gr}) h_1 + \dots + (\partial_n L^{gr} + \dot{\lambda}_n^{gr}) h_n \\ + \partial_{n+1} L^{gr} l_1 + \dots + \partial_{2n} L^{gr} l_n\} dt = 0. \quad (3.3). \end{aligned}$$

Chú ý rằng do $\dot{h}_1, \dots, \dot{h}_n$ không chọn tùy ý nên $h_1, \dots, h_n$ cũng không tùy ý. Với $j = 1, \dots, n$, xét các hệ thức sau

$$\begin{aligned} \partial_j L^{gr} + \dot{\lambda}_j^{gr} &= \partial_j(f^{gr} + \lambda_1^{gr} g_1^{gr} + \dots \\ &\quad + \lambda_n^{gr} g_n^{gr}) + \dot{\lambda}_j^{gr} \\ &= \dot{\lambda}_j^{gr} + \partial_j f^{gr} + \lambda_1^{gr} \partial_j g_1^{gr} + \dots + \lambda_n^{gr} \partial_j g_n^{gr}. \end{aligned}$$

Do đó, hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} \partial_1 L^{gr} + \dot{\lambda}_1^{gr} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \partial_n L^{gr} + \dot{\lambda}_n^{gr} = 0 \end{cases}$$

tương đương

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_1^{gr} + \lambda_1^{gr} \partial_1 g_1^{gr} + \dots + \lambda_n^{gr} \partial_1 g_n^{gr} &= -\partial_1 f^{gr} \\ \dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\lambda_n^{gr} + \lambda_1^{gr} \partial_n g_1^{gr} + \dots + \lambda_n^{gr} \partial_n g_n^{gr} = -\partial_n f^{gr}$$

hay dạng ma trận

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^{gr} \\ \dots \\ \lambda_m^{gr} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1 g_1^{gr} & \dots & \partial_1 g_n^{gr} \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_n g_1^{gr} & \dots & \partial_n g_n^{gr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1^{gr} \\ \dots \\ \lambda_n^{gr} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \partial_1 f^{gr} \\ \dots \\ \partial_n f^{gr} \end{bmatrix}.$$

$$\text{Đặt } B(t) = \begin{bmatrix} \partial_1 g_1^{gr} & \dots & \partial_1 g_n^{gr} \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_n g_1^{gr} & \dots & \partial_n g_n^{gr} \end{bmatrix},$$

$$\Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1^{gr} \\ \dots \\ \lambda_n^{gr} \end{bmatrix}, \Lambda(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1^{gr} \\ \dots \\ \lambda_n^{gr} \end{bmatrix}, C(t) = \begin{bmatrix} \partial_1 f^{gr} \\ \dots \\ \partial_n f^{gr} \end{bmatrix},$$

ta có hệ phương trình vi phân dạng ma trận

$$\dot{\Lambda}(t) + B(t)\Lambda(t) = -C(t).$$

Do các hàm $f^{gr}, g_1^{gr}, \dots, g_n^{gr}$ khả vi liên tục nên ta chọn điều kiện biên $\Lambda(a) = \Lambda_0$ nào đó. Theo Định lý Picard-Lindelöf (Jacob & Evans, 2018), hệ phương trình vi phân trên luôn có nghiệm $\Lambda(t)$. Do đó, phương trình luôn tồn tại các hàm $\lambda_1^{gr}, \dots, \lambda_n^{gr}$ sao cho

$$\begin{cases} \partial_1 L^{gr} + \lambda_1^{gr} = 0 \\ \dots \dots \dots \\ \partial_n L^{gr} + \lambda_n^{gr} = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

Chú ý rằng $(l_1, \dots, l_n)$ tùy ý, ta suy ra từ Bổ đề 2.1,

$$\partial_{n+1} L^{gr} = 0, (i = 1, \dots, n).$$

Kết hợp với (3.4) và khai triển, ta có

$$\begin{aligned} \lambda_i^{gr} &= -\partial_i f^{gr} - \partial_i g_1^{gr} \lambda_1^{gr} - \dots - \partial_i g_n^{gr} \lambda_n^{gr}, \\ \partial_{i+n} f^{gr} + \partial_{i+n} g_1^{gr} \lambda_1^{gr} + \dots + \partial_{i+n} g_n^{gr} \lambda_n^{gr} &= 0, \\ \text{với } i &= 1, \dots, n. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Trong Mustafa et al. (2019), điều kiện cần tối ưu cho bài toán điều khiển mờ với nhiều biến phụ thuộc sử dụng đạo hàm Hukuhara tổng quát đã được khảo sát. Tuy nhiên, đạo hàm granular tồn tại trong một số trường hợp mà đạo hàm Hukuhara tổng quát không tồn tại (Najariyan & Zhao, 2017; Le et al., 2025), nên kết quả trong Mệnh đề 3.2 áp dụng tốt hơn các kết quả trong (Mustafa et al., 2019).

Nghiệm của hệ phương trình trong điều kiện cần tối ưu mới chỉ là các điểm dừng (stationary point). Để các điểm dừng này là nghiệm tối ưu cần thêm các điều kiện đủ với các giả thiết lồi hoặc đạo hàm cấp 2. Trong bài báo, các giả thiết lồi dạng vi phân được sử dụng theo cách tiếp cận trong

(Mangasarian, 1966; Bazaraa et al., 2006; Torres & Malinowska, 2012; Treanță, 2022; Tung & Tam 2023; Tùng và ctv., 2024)

Định nghĩa 3.1. (Torres & Malinowska, 2012; Clarke, 2013; Tung & Tam, 2023)

Hàm giá trị thực $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a, b] \times [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là lồi đối với $2n$ -biến đầu trong tập $S \subset \mathbb{R}^{2n+3}$ nếu

$$\phi[u + p, v + p](t, \mu, \alpha_\phi) - \phi[u, v](t, \mu, \alpha_\phi)$$

$$\geq \sum_{k=1}^n (\partial_k \phi[u, v](t, \mu, \alpha_\phi) p_k + \partial_{k+n} \phi[u, v](t, \mu, \alpha_\phi) q_k)$$

với mọi $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, t, \mu, \alpha_\phi), (u_1 + p_1, \dots, u_n + p_n, v_1 + p_1, \dots, v_n + p_n, t, \mu, \alpha_\phi)$ trong tập S và $\partial_k (k = 1, \dots, 2n)$ là các đạo hàm riêng của hàm $\phi(\cdot, \dots, \cdot, t, \mu, \alpha_\phi)$ đối với biến thứ k .

Mệnh đề 3.3. Giả sử tồn tại hàm liên tục $\lambda_j^{gr} = \lambda_j^{gr}(t, \mu, \alpha_{\lambda_j})$ sao cho (x^{*gr}, u^{*gr}) thỏa các phương trình điều kiện tối ưu sau

$$\partial_{i+n} f^{gr} + \sum_{j=1}^n \partial_{i+n} g_j^{gr} \lambda_j^{gr} = 0 \quad (I)$$

$$\lambda_i^{gr} = -\partial_i f^{gr} - \sum_{j=1}^n \partial_i g_j^{gr} \lambda_j^{gr} \quad (II)$$

với $i = 1, \dots, n$.

Gọi $K^+(K^-) = \{j = 1, \dots, n | \lambda_j^{gr}(t, \mu, \alpha_{\lambda_j}) \geq (\leq) 0, \forall t \in [a, b], \mu, \alpha_{\lambda_j} \in [0, 1]\}$.

Nếu f^{gr} là hàm lồi theo $2n$ -biến đầu và $g_j^{gr} (j \in K^+), -g_j^{gr} (j \in K^-)$ hàm lồi theo $2n$ -biến đầu thì (x^{*gr}, u^{*gr}) là nghiệm tối ưu của (GOCP) và $\mathcal{H}^{-1}(x^{*gr}, u^{*gr}) = (\tilde{x}(t), \tilde{u}(t))$ là nghiệm của (FOCP).

Chứng minh.

Xét $(x^{gr}, u^{gr}) + (h, l) \in \Omega^{gr}$ là một biến phân của (x^{*gr}, u^{*gr}) với $h_i(0, \mu, \alpha_{h_i}) = 0 = h_i(T, \mu, \alpha_{h_i}) (i = 1, \dots, n)$ thì ta suy ra từ tính lồi tương ứng với $2n$ -biến đầu của f^{gr} đó là

$$J^{gr}(x^{*gr} + h, u^{*gr} + l) - J^{gr}(x^{*gr}, u^{*gr})$$

$$= \int_0^T (f^{gr}[x^{*gr} + h, u^{*gr} + l](t, \mu, \alpha_f) - f^{gr}[x^{*gr}, u^{*gr}](t, \mu, \alpha_f)) dt$$

$$\geq \int_0^T \sum_{i=1}^n (\partial_i f^{gr} \cdot h_i + \partial_{i+n} f^{gr} \cdot l_i) dt \quad (3.5)$$

Đặt

$$A_j = g_j^{gr} [x^{*gr} + h, u^{*gr} + l] (t, \mu, \alpha_{g_j}) - g_j^{gr} [x^{*gr}, u^{*gr}] (t, \mu, \alpha_{g_j}).$$

Khi đó, với $j \in K^+$,

$$\begin{aligned} A_j &= g_j^{gr} [x^{*gr} + h, u^{*gr} + l] (t, \mu, \alpha_{g_j}) \\ &\quad - g_j^{gr} [x^{*gr}, u^{*gr}] (t, \mu, \alpha_{g_j}) \\ &\geq \sum_{i=1}^n (\partial_i g_j^{gr} \cdot h_i + \partial_{i+n} g_j^{gr} \cdot l_i). \end{aligned}$$

Nhân hai vế với $\lambda_j^{gr} = \lambda_j^{gr} (t, \mu, \alpha_{\lambda_j}) \geq 0$

($j \in K^+$), ta có

$$\lambda_j^{gr} A_j \geq \sum_{i=1}^n (\lambda_j^{gr} \partial_i g_j^{gr} \cdot h_i + \lambda_j^{gr} \partial_{i+n} g_j^{gr} \cdot l_i)$$

Với $j \in K^-$,

$$\begin{aligned} -A_j &= (-g_j^{gr}) [x^{*gr} + h, u^{*gr} + l] (t, \mu, \alpha_{g_j}) \\ &\quad - (-g_j^{gr}) [x^{*gr}, u^{*gr}] (t, \mu, \alpha_{g_j}) \\ &\geq \sum_{i=1}^n \partial_i (-g_j^{gr}) \cdot h_i + \partial_{i+n} (-g_j^{gr}) \cdot l_i \\ &= -\sum_{i=1}^n (\partial_i g_j^{gr} \cdot h_i + \partial_{i+n} g_j^{gr} \cdot l_i), \end{aligned}$$

tương đương

$$A_j \leq \sum_{i=1}^n (\partial_i g_j^{gr} \cdot h_i + \partial_{i+n} g_j^{gr} \cdot l_i).$$

Nhân hai vế với $\lambda_j^{gr} = \lambda_j^{gr} (t, \mu, \alpha_{\lambda_j}) \leq 0$

($j \in K^-$), ta có

$$\lambda_j^{gr} A_j \geq \sum_{i=1}^n (\lambda_j^{gr} \partial_i g_j^{gr} \cdot h_i + \lambda_j^{gr} \partial_{i+n} g_j^{gr} \cdot l_i).$$

Như vậy, trong cả hai trường hợp

$$\lambda_j^{gr} A_j \geq \sum_{i=1}^n (\lambda_j^{gr} \partial_i g_j^{gr} \cdot h_i + \lambda_j^{gr} \partial_{i+n} g_j^{gr} \cdot l_i).$$

Mặt khác, do $(x^{*gr}, u^{*gr}) + (h, l) \in \Omega^{gr}$

và $(x^{*gr}, u^{*gr}) \in \Omega^{gr}$ nên

$$\begin{aligned} \dot{x}_j^{*gr} + \dot{h}_j^{gr} &= g_j^{gr} [x^{*gr} + h^{gr}, u^{*gr} \\ &\quad + l^{gr}] (t, \mu, \alpha_{g_j}), \end{aligned}$$

$$\dot{x}_j^{*gr} = g_j^{gr} [x^{*gr}, u^{*gr}] (t, \mu, \alpha_{g_j}),$$

dẫn đến

$$\begin{aligned} &\lambda_j^{gr} \dot{h}_j \\ &= \lambda_j^{gr} \left(g_j^{gr} [x^{*gr} + h^{gr}, u^{*gr} + l^{gr}] (t, \mu, \alpha_{g_j}) \right. \\ &\quad \left. - g_j^{gr} [x^{*gr}, u^{*gr}] (t, \mu, \alpha_{g_j}) \right) \\ &= \lambda_j^{gr} A_j \end{aligned}$$

$$\geq \sum_{i=1}^n (\lambda_j^{gr} \partial_i g_j^{gr} \cdot h_i + \lambda_j^{gr} \partial_{i+n} g_j^{gr} \cdot l_i).$$

Do đó,

$$\begin{aligned} 0 &\geq \sum_{i=1}^n (\lambda_j^{gr} \partial_i g_j^{gr} \cdot h_i + \lambda_j^{gr} \partial_{i+n} g_j^{gr} \cdot l_i) \\ &\quad - \lambda_j^{gr} \dot{h}_j. \end{aligned}$$

Dẫn đến

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n (\lambda_j^{gr} \partial_i g_j^{gr} \cdot h_i + \lambda_j^{gr} \partial_{i+n} g_j^{gr} \cdot l_i) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_j^{gr} \dot{h}_j \right\} dt. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Cộng (3.5) và các bất đẳng thức trong (3.6) với $j = 1, \dots, n$, ta có

$$\begin{aligned} &J^{gr}(x^{*gr} + h, u^{*gr} + l) - J^{gr}(x^{*gr}, u^{*gr}) \\ &\geq \int_0^T \sum_{i=1}^n (\partial_i f^{gr} \cdot h_i + \partial_{i+n} f^{gr} \cdot l_i) dt \\ &+ \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n ((\lambda_1^{gr} \cdot \partial_i g_1^{gr}) \cdot h_i + (\lambda_1^{gr} \cdot \partial_{i+n} g_1^{gr}) \cdot l_i) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_1^{gr} \dot{h}_1 \right\} dt \\ &\quad + \dots + \\ &+ \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^n ((\lambda_n^{gr} \cdot \partial_i g_n^{gr}) \cdot h_i + (\lambda_n^{gr} \cdot \partial_{i+n} g_n^{gr}) \cdot l_i) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_n^{gr} \dot{h}_n \right\} dt \\ &= \int_0^T \left(\partial_1 f^{gr} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{gr} \cdot \partial_1 g_j^{gr} \right) h_1 dt + \dots + \\ &+ \int_0^T \left(\partial_n f^{gr} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{gr} \cdot \partial_n g_j^{gr} \right) h_n dt + \\ &+ \int_0^T \left((\partial_{n+1} f^{gr} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{gr} \cdot \partial_{n+1} g_j^{gr}) l_1 \right. \\ &\quad \left. + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \left((\partial_{2n} f^{gr} + \sum_{j=1}^n \lambda_j^{gr} \cdot \partial_{2n} g_1^{gr}) l_n \right) dt \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^T \lambda_1^{gr} \dot{h}_1 dt - \dots - \int_0^T \lambda_n^{gr} \dot{h}_n dt \\
 & = \int_0^1 (-\dot{\lambda}_1^{gr}) \cdot h_1 dt + \dots \\
 & \quad + \int_0^1 (-\dot{\lambda}_n^{gr}) \cdot h_n dt \text{ (từ (II))} \\
 & + \int_0^1 0 \cdot l_1 dt + \dots + \int_0^1 0 \cdot l_n dt \text{ (từ (I))} \\
 & - \int_0^T \lambda_1^{gr} \dot{h}_1 dt - \dots - \int_0^T \lambda_n^{gr} \dot{h}_n dt \\
 & = - \int_0^1 (\dot{\lambda}_1^{gr} \cdot h_1 + \lambda_1^{gr} \dot{h}_1) dt - \dots - \int_0^1 (\dot{\lambda}_n^{gr} \cdot h_n \\
 & \quad + \lambda_n^{gr} \dot{h}_n) dt \\
 & = 0,
 \end{aligned}$$

do $h_i(0) = h_i(T) = 0$ và

$$\begin{aligned}
 \int_0^T \lambda_i^{gr} \cdot \dot{h}_i dt &= \lambda_i^{gr} \cdot h_i \Big|_0^T - \int_0^T \dot{\lambda}_i^{gr} \cdot h_i dt \\
 &= - \int_0^T \dot{\lambda}_i^{gr} \cdot h_i dt
 \end{aligned}$$

từ công thức từng phần

$$\begin{cases} u = \lambda_i^{gr} \\ dv = \dot{h}_i dt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \frac{d}{dt}(\lambda_i^{gr}) = \dot{\lambda}_i^{gr} \\ v = \int \dot{h}_i dt = h_i. \end{cases}$$

■

Ví dụ sau cho thấy điều kiện đủ tối ưu là thiết yếu để khẳng định điểm dừng là điểm cực trị.

Ví dụ 3.1. Giải bài toán tối ưu biến phân mờ

$$\begin{aligned}
 \text{(FOCP): } \tilde{m} \tilde{n} \tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u}) \\
 = \tilde{f}_0^1(\tilde{x}(t))^2 \Theta_{gr}(\tilde{u}(t))^2 dt,
 \end{aligned}$$

với $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)$,

$$\tilde{x}(0) = (0,0,0), \tilde{x}(1) = (0,1,2).$$

Trong đó, $(0,0,0)$, $(0,1,2)$ là các số mờ tam giác.

Giải. Đặt $\tilde{\alpha}_1 = (0,0,0)$, $\tilde{\alpha}_2 = (0,1,2)$. Bài toán granular tương ứng với (FOCP) là

$$\begin{aligned}
 \text{(GOCP): } \min \int^{gr} (x^{gr}, u^{gr}) \\
 = \int_0^1 (x^{gr}(t, \mu, \alpha_x))^2 - (u^{gr}(t, \mu, \alpha_u))^2 dt
 \end{aligned}$$

với

$$\begin{aligned}
 \dot{x}^{gr}(t, \mu, \alpha_{\dot{x}}) &= x^{gr}(t, \mu, \alpha_x) + u^{gr}(t, \mu, \alpha_u), \\
 \forall \alpha_{\dot{x}} &= (\alpha_x, \alpha_u)
 \end{aligned}$$

$$x^{gr}(0, \mu, \alpha_x) = 0, \forall \alpha_x = \alpha_{\alpha_1}$$

$$x^{gr}(1, \mu, \alpha_x) = \mu + (2 - 2\mu)\alpha_x, \forall \alpha_x = \alpha_{\alpha_2}.$$

* Hàm $f^{gr}[x^{gr}, u^{gr}](t, \mu, \alpha_f) = (x^{gr})^2 - (u^{gr})^2$, $g_1^{gr}[x^{gr}, u^{gr}](t, \mu, \alpha_{g_1}) = x^{gr} + u^{gr}$. Theo mệnh đề 3.2 tồn tại hàm $\lambda_1^{gr} = \lambda_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{\lambda_1})$ sao cho các điều kiện tối ưu cho biến điều khiển và biến liên hợp thỏa

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} \partial_2 f^{gr} + \partial_2 g_1^{gr} \cdot \lambda_1^{gr} = 0 \\ \dot{\lambda}_1^{gr} = -\partial_1 f^{gr} - \partial_1 g_1^{gr} \cdot \lambda_1^{gr} \end{cases} \\
 & \Leftrightarrow \begin{cases} -2u^{gr} + \lambda_1^{gr} = 0 \\ \dot{\lambda}_1^{gr} = -2x^{gr} - \lambda_1^{gr}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kết hợp với phương trình trạng thái, ta có

$$\begin{cases} \lambda_1^{gr} = 2u^{gr} \\ \dot{\lambda}_1^{gr} = -2x^{gr} - \lambda_1^{gr} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^{gr} = \dot{x}^{gr} - x^{gr} \\ \dot{\lambda}_1^{gr} = 2\dot{u}^{gr}. \end{cases}$$

Thay vào $\dot{\lambda}_1^{gr} = -2x^{gr} - \lambda_1^{gr}$, ta có

$$\begin{aligned}
 2(\ddot{x}^{gr} - \dot{x}^{gr}) &= -2x^{gr} - 2(\dot{x}^{gr} - x^{gr}) \\
 \Leftrightarrow \ddot{x}^{gr} - \dot{x}^{gr} &= -x^{gr} - \dot{x}^{gr} + x^{gr} \\
 \Leftrightarrow \ddot{x}^{gr} &= 0.
 \end{aligned}$$

Do đó, nghiệm tổng quát $x^{gr}(t, \mu, \alpha_x) = C_1 t + C_2$. Kết hợp với điều kiện biên

$$\begin{cases} x^{gr}(0, \mu, \alpha_x) = 0 \\ x^{gr}(1, \mu, \alpha_x) = \mu + (2 - 2\mu)\alpha_x \end{cases}$$

dẫn đến

$$\begin{cases} C_2 = 0 \\ C_1 = \mu + (2 - 2\mu)\alpha_x. \end{cases}$$

Do đó, điểm dừng của (GCOP) là

$$x^{*gr}(t, \mu, \alpha_x) = (\mu + (2 - 2\mu)\alpha_x)t,$$

$$u^{*gr}(t, \mu, \alpha_u) = \dot{x}^{gr} - x^{gr}$$

$$= \mu + (2 - 2\mu)\alpha_x - (\mu + (2 - 2\mu)\alpha_x)t$$

$$= (\mu + (2 - 2\mu)\alpha_u)(1 - t).$$

Tuy nhiên, do f^{gr} không lồi theo 2-biến đầu nên $(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*) = (\mathcal{H}^{-1}(x^{*gr}), \mathcal{H}^{-1}(u^{*gr}))$ chỉ là điểm dừng chứ không phải nghiệm tối ưu.

Ta chỉ ra tồn tại $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \tilde{\Omega}$ sao cho $\tilde{f}(\tilde{x}, \tilde{u}) \leq \tilde{f}(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)$. Thật vậy, do

$$J^{gr}(x^{*gr}, u^{*gr}) = \int_0^1 [(\mu + (2 - 2\mu)\alpha_x)^2 t^2 - (\mu + (2 - 2\mu)\alpha_u)^2 (1 - t)^2] dt$$

$$= \frac{(\mu + (2 - 2\mu)\alpha_x)^2}{3} - \frac{(\mu + (2 - 2\mu)\alpha_u)^2}{3}$$

nên dùng các công thức ta có

$\tilde{J}(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*) = \mathcal{H}^{-1}(J^{gr}(x^{*gr}, u^{*gr}))$ có tập mức

$$[\tilde{J}(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)]^\mu = \left[\frac{4(\mu - 1)}{3}, \frac{4(1 - \mu)}{3} \right].$$

Xét $(\tilde{x}, \tilde{u})$ với $\tilde{x}(t) = (0, 1, 2)t + \sin(\pi t)$,

nếu $\tilde{u}(t) = (0, 1 - t, 2 - 2t) + \pi \cos(\pi t) - \sin(\pi t)$

thì $\tilde{x}(0) = (0, 0, 0)$, $\tilde{x}(1) = (0, 1, 2)$ và

$$\tilde{x}(t) = (0, 1, 2) - \pi \cos(\pi t)$$

nên $\tilde{x}(t) = \tilde{x}(t) + \tilde{u}(t)$, nghĩa là $(\tilde{x}, \tilde{u}) \in \tilde{\Omega}$.

Tương tự như trên

$$J^{gr}(x^{gr}, u^{gr}) = \int_0^1 (\sin(\pi t) + \mu t + (2 - 2\mu)\alpha_x t)^2 - \left(\pi \cos(\pi t) - \sin(\pi t) + \mu(1 - t) + (2 - 2t - 2\mu(1 - t))\alpha_u \right)^2 dt$$

$$= \frac{(1 - \mu)(\alpha_x - \alpha_u)}{6\pi} [8\pi(1 - \mu)(\alpha_x + \alpha_u) + 8\pi\mu + 24] - \frac{\pi^2}{2}.$$

Do đó, có thể tính được

$\tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \mathcal{H}^{-1}(J^{gr}(x^{gr}, u^{gr}))$ có tập mức

$$[\tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u})]^\mu = \left[(\mu - 1) \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi} \right) - \frac{\pi^2}{2}, (1 - \mu) \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi} \right) - \frac{\pi^2}{2} \right].$$

Đồ thị của hàm 2 biến đã được sử dụng:

$$\mathcal{H}(\tilde{J}(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)) = \frac{4(\mu - 1)}{3} + \frac{8(1 - \mu)}{3} \alpha_j,$$

$$\mathcal{H}(\tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u})) = (\mu - 1) \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi} \right) - \frac{\pi^2}{2} +$$

$$2(1 - \mu) \left(\frac{4}{3} + \frac{4}{\pi} \right) \alpha_{\alpha_j}$$

Ta có,

$$\mathcal{H}(\tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u})) < \mathcal{H}(\tilde{J}(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)), \forall \mu, \alpha_j$$

nên $\tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) < \tilde{J}(\tilde{x}^*, \tilde{u}^*)$.

Sau đây, một ví dụ ứng dụng đơn giản cho mô hình điều khiển tối ưu mờ cho flycam bay ở độ cao không đổi để truy vết một xe chuyển động trên quỹ đạo là đường cong trong không gian 2 chiều.

Ví dụ 3.2. Một chiếc xe chạy trên đường cong dạng tham số hóa $\vec{r}(t) = (t + 1, t^2)$ có vận tốc trùng với vận tốc theo hướng tiếp tuyến $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (1, 2t)$ với điểm xuất phát $(1, 0)$ tại thời điểm $t = 0$ và sau 5 phút $t = 5$ đến vị trí $(6, 25)$. Một chiếc máy quay có thể tự điều chỉnh góc quay đặt trên 1 chiếc flycam với điểm xuất phát $(0, 0)$ tại thời điểm $t = 0$ được điều khiển bay theo chiếc xe với vận tốc bằng vận tốc chiếc xe để ghi hình. Do nhiều yếu tố nên việc điều khiển flycam đến đúng vị trí chiếc xe $(6, 25)$; sau 5 phút khó thực hiện, flycam chỉ có thể được điều khiển đến vùng gần chiếc xe biểu thị dạng số mờ $(\tilde{x}_1(5), \tilde{x}_2(5))$. Bài toán điều khiển mờ flycam theo sát quỹ đạo (tracking) chiếc xe trong 5 phút $t \in [0, 5]$ và ít tổn năng lượng nhất có thể mô hình hóa dạng

$$\min \tilde{J}(\tilde{x}, \tilde{u}) = \int_0^5 \{[(\tilde{x}_1(t) - t - 1)^2 + (\tilde{x}_2(t) - t^2)^2] + [(\tilde{u}_1(t))^2 + (\tilde{u}_2(t))^2]\} dt$$

với $\tilde{x}_1(t) = \tilde{u}_1(t)$, $\tilde{x}_2(t) = \tilde{u}_2(t)$

và $\tilde{x}_1(0) = (0, 0, 0)$, $\tilde{x}_2(0) = (0, 0, 0)$

$\tilde{x}_1(5) = (5, 6, 7)$, $\tilde{x}_2(5) = (24, 25, 26)$.

Các phép cộng trong tích phân theo nghĩa phép cộng granular. Tối thiểu hóa thành phần trong ngoặc vuông thứ nhất để giữ quỹ đạo giữa flycam và xe nhỏ nhất và thành phần trong ngoặc vuông thứ hai là tối thiểu hóa năng lượng, xem chi tiết hơn về mô hình trong (Lewis et al., 2012).

Đặt $\tilde{a}_1 = (5, 6, 7)$, $\tilde{a}_2 = (24, 25, 26)$. Bài toán granular tương ứng với (FOCP) là

$$(GOCP): \min J^{gr}(x^{gr}, u^{gr}) = \int_0^1 \{[(x_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_1}) - t - 1)^2 + (x_2^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_1}) - t^2)^2] + [(u_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_1}))^2 + (u_2^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_2}))^2]\} dt$$

với

$$\dot{x}_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{\dot{x}_1}) = u_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_1}),$$

$$\dot{x}_2^{gr}(t, \mu, \alpha_{\dot{x}_2}) = u_2^{gr}(t, \mu, \alpha_{u_2})$$

$$\forall \alpha_{\dot{x}_1} = \alpha_{u_1}, \alpha_{\dot{x}_2} = \alpha_{u_2},$$

$$x_1^{gr}(0, \mu, \alpha_x) = x_2^{gr}(0, \mu, \alpha_x) = 0$$

$$x_1^{gr}(1, \mu, \alpha_x) = 4 + \mu + (2 - 2\mu)\alpha_{x_1},$$

$$x_2^{gr}(1, \mu, \alpha_x) = 25 + \mu + (2 - 2\mu)\alpha_{x_1},$$

$$\forall \alpha_{x_1} = \alpha_{u_1}, \forall \alpha_{x_2} = \alpha_{u_2}.$$

* Hàm $f^{gr}[x, u](t, \mu, \alpha_f) = (x_1^{gr} - t - 1)^2 + (x_2^{gr} - t^2)^2 + (u_1^{gr})^2 + (u_2^{gr})^2$,

$$g_i^{gr}[x, u](t, \mu, \alpha_{g_i}) = u_i^{gr} (i = 1, 2).$$

Từ các điều kiện tối ưu cho biến điều khiển và

$$\dot{x}_1^{gr} = u_1^{gr}, \dot{x}_2^{gr} = u_2^{gr} \text{ ta có}$$

$$\begin{cases} \partial_3 f^{gr} + \partial_3 g_1^{gr} \cdot \lambda_1^{gr} = 0 \\ \partial_4 f^{gr} + \partial_4 g_2^{gr} \cdot \lambda_2^{gr} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2u_1^{gr} + 1 \cdot \lambda_1^{gr} = 0 \\ 2u_2^{gr} + 1 \cdot \lambda_2^{gr} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1^{gr} = -2u_1^{gr} \\ \lambda_2^{gr} = -2u_2^{gr} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}_1^{gr} = -2\dot{u}_1^{gr} = -2\dot{x}_1^{gr} \\ \dot{\lambda}_2^{gr} = -2\dot{u}_2^{gr} = -2\dot{x}_2^{gr} \end{cases}.$$

Kết hợp với các điều kiện tối ưu cho biến liên hợp, ta có

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1^{gr} = -\partial_1 f^{gr} - \partial_1 g_1^{gr} \lambda_1^{gr} \\ \dot{\lambda}_2^{gr} = -\partial_2 f^{gr} - \partial_2 g_1^{gr} \lambda_2^{gr} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{\lambda}_1^{gr} = -2(x_1^{gr} - t - 1) - 0 \\ \dot{\lambda}_2^{gr} = -2(x_2^{gr} - t^2) - 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\dot{x}_1^{gr} = -2(x_1^{gr} - t - 1) \\ -2\dot{x}_2^{gr} = -2(x_2^{gr} - t^2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}_1^{gr} - x_1^{gr} = -t - 1 \\ \ddot{x}_2^{gr} - x_2^{gr} = -t^2. \end{cases}$$

Giải các phương trình vi phân tuyến tính cấp hai ta có nghiệm tổng quát

$$\begin{cases} x_1^{gr} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + t + 1 \\ x_2^{gr} = C_3 e^t + C_4 e^{-t} + t^2 + 2. \end{cases}$$

Kết hợp với các điều kiện biên, ta có

$$x_1^{gr} = (\mu - 1 + (2 - 2\mu)\alpha_{x_1}) \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^5 - e^{-5}} \right) + \frac{e^{t-5} - e^{5-t}}{e^5 - e^{-5}} + t + 1$$

$$x_2^{gr} = (\mu - 3 + (2 - 2\mu)\alpha_{x_2}) \left(\frac{e^t - e^{-t}}{e^5 - e^{-5}} \right) + \frac{2e^{t-5} - 2e^{5-t}}{e^5 - e^{-5}} + t^2 + 2.$$

Nghiệm tối ưu hàm trạng thái của (GOCP) có thể rút gọn bằng cách sử dụng hàm hyperbolic với công thức $e^t - e^{-t} = 2 \sinh t$ và $(\sinh t)' = \cosh t$ như sau

$$x_1^{gr} = \frac{1}{\sinh 5} ((\mu - 1 + (2 - 2\mu)\alpha_{x_1}) \sinh t + \sinh(t - 5)) + t + 1$$

$$x_2^{gr} = \frac{1}{\sinh 5} ((\mu - 3 + (2 - 2\mu)\alpha_{x_2}) \sinh t + 2\sinh(t - 5)) + t^2 + 2$$

tương ứng với nghiệm tối ưu hàm điều khiển

$$u_1^{gr} = \frac{1}{\sinh 5} ((\mu - 1 + (2 - 2\mu)\alpha_{u_1}) \cosh t + \cosh(t - 5)) + 1$$

$$u_2^{gr} = \frac{1}{\sinh 5} ((\mu - 3 + (2 - 2\mu)\alpha_{u_2}) \cosh t + 2\cosh(t - 5)) + 2t.$$

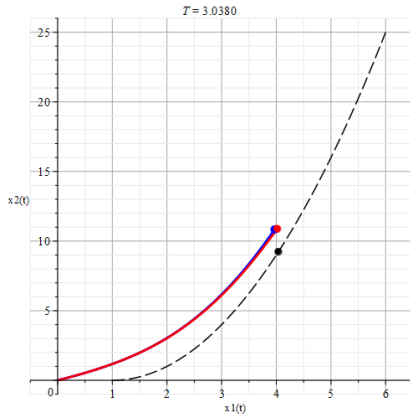
Khi đó, nghiệm tối ưu của (FOCP) là các hàm mờ với các tập mức tương ứng

$$= \left[\frac{[\tilde{x}_1(t)]^\mu}{\sinh 5} + t, \frac{[(\mu - 1) \sinh t + \sinh(t - 5)]}{\sinh 5} + t + 1 \right],$$

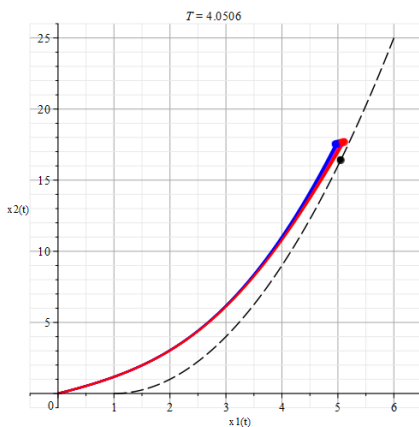
$$= \left[\frac{[\tilde{x}_2(t)]^\mu}{\sinh 5} + t^2, \frac{[(\mu - 3) \sinh t + 2 \sinh(t - 5)]}{\sinh 5} + t^2 + 2, \frac{-(1 + \mu) \sinh t + 2 \sinh(t - 5)}{\sinh 5} + t^2 + 2 \right]$$

$$= \left[\frac{[\tilde{u}_1(t)]^\mu}{\sinh 5} + 1, \frac{[(\mu - 1) \cosh t + \cosh(t - 5)]}{\sinh 5} + 1, \frac{(1 - \mu) \cosh t + \cosh(t - 5)}{\sinh 5} + 1 \right],$$

$$[\tilde{u}_2(t)]^\mu = \left[\frac{(\mu - 3) \cosh t + 2 \cosh(t - 5)}{\sinh 5} + 2t, \frac{-(\mu + 1) \cosh t + 2 \cosh(t - 5)}{\sinh 5} + 2t \right].$$



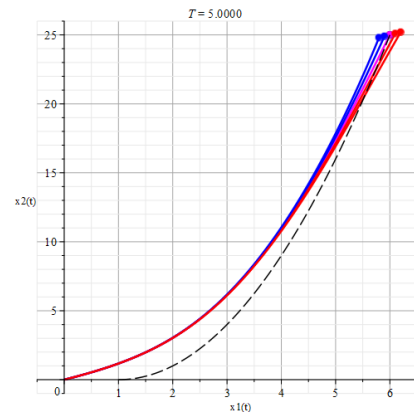
Hình 1. $T_1 = 3.038$



Hình 2. $T_2 = 4.0506$

Việc sử dụng phần mềm Matlab hoặc Octave có thể mô phỏng chuyển động dạng ảnh động (animation) của xe trên quỹ đạo $\tilde{r}(t) = (t + 1, t^2)$ với vận tốc $\tilde{v}(t) = (1, 2t)$ (đường đứt khúc màu

đen) và quỹ đạo chuyển động tối ưu mờ của flycam $\tilde{R}(\mu, t) = ([\tilde{x}_1(t)]^\mu, [\tilde{x}_2(t)]^\mu)$ với điều khiển mờ tối ưu $\tilde{V}(\mu, t) = ([\tilde{u}_1(t)]^\mu, [\tilde{u}_2(t)]^\mu)$. Để đơn giản, trong bài báo chỉ biểu diễn mô phỏng 3 giá trị $\mu = 1$ (màu hồng cánh sen) và $\mu = 0,9, \mu = 0,8$ (đường mức trên màu đỏ, mức dưới màu xanh) với một số thời điểm $T_1 = 3.038, T_2 = 4.0506, T_3 = 5$ được chụp lại từ ảnh động trong Hình 1, Hình 2 và Hình 3.



Hình 3. $T_3 = 5$

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, các điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu điều khiển nhiều biến ràng buộc mờ sử dụng đạo hàm granular được khảo sát. Điều kiện cần tối ưu mờ rộng kết quả trong bài báo trước đây, còn điều kiện tối ưu đủ là mới. Một mô hình ứng dụng cho điều khiển tối ưu mờ đã được trình bày, cho thấy rõ ý nghĩa của việc mở rộng sang nhiều biến là cần thiết khi mô tả các chuyển động trong không gian 2 chiều hay 3 chiều. Đạo hàm granular được sử dụng để khảo sát các điều kiện tối ưu cho các bài toán tối ưu điều khiển phân thứ mờ, điều kiện tối ưu cấp hai và khảo sát các bài toán đối ngẫu của bài toán tối ưu điều khiển mờ là các chủ đề vẫn chưa được nghiên cứu và có thể phát triển trong các nghiên cứu tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Bazaraa, M. S., Sherali, H. D., & Shetty, C. M. (2006). *Nonlinear Programming: theory and algorithms*. Wiley, NJ.
<https://doi.org/10.1002/0471787779>
- Bellman, R. E., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment. *Management Science*, 17, 141-164.
<https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141>
- Bohner, M., Girejko, E., Malinowska, A. B., Nguyen, L., Schneider, B., & Truong, T. (2025).

Generalized transversality conditions for fuzzy quantum-symmetric variational problems via granular approach. *Computational and Applied Mathematics*, 44(6), 326.

<https://doi.org/10.1007/s40314-025-03283-y>

Clarke, F. (2013). *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. Springer, New York.
<https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3>

Dong, N. P., Long, H. V., & Khastan, A. (2020). Optimal control of a fractional order model for

- granular SEIR epidemic with uncertainty, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 88, 105312. <https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105312>
- Fard, O. S., Soolaki, J., & Torres, D. F. (2018). A necessary condition of Pontryagin type for fuzzy fractional optimal control problems. *Discrete & Continuous Dynamical Systems - S*, 11(1), 59–76. <https://doi.org/10.3934/dcdss.2018004>
- Farhadinia, B. (2011). Necessary optimality conditions for fuzzy variational problems. *Information Sciences*, 181, 1348-1357. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2010.11.027>
- Hestenes, M. R. (1966). *Calculus of Variations and Optimal Control Theory*, Wiley, NJ.
- Jacob, N., & Evans, K.P. (2018). *Course In Analysis, A-Vol. IV: Fourier Analysis, Ordinary Differential Equations, Calculus of Variations*. World Scientific, Singapore. <https://doi.org/10.1142/11695>
- Khatua, D., Maity, K., & Kar, S. (2021). A fuzzy production inventory control model using granular differentiability approach. *Soft Computing*, 25(4), 2687-2701. <https://doi.org/10.1007/s00500-020-05329-1>
- Le, T. T., Dang, H. T., Tran, T. K., & Pham, L. B. N. (2025). Necessary and sufficient optimality conditions for fuzzy fractional variational problems under granular fuzzy Caputo fractional derivatives. *Computational & Applied Mathematics*, 44, 172. <https://doi.org/10.1007/s40314-025-03118-w>
- Lewis, F. L., Vrabie, D., & Syrmos, V. L. (2012). *Optimal Control*. Wiley, NJ. <https://doi.org/10.1002/9781118122631>
- Mangasarian, O. L. (1966). Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 4(1), 139-152. <https://doi.org/10.1137/0304013>
- Mazandarani, M., Pariz, N., & Kamyad, A. V. (2017). Granular differentiability of fuzzy-number-valued functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26, 310-323. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2017.2659731>
- Mustafa, A. M., Gong, Z., & Osman, M. (2019). Fuzzy optimal control problem of several variables. *Advances in Mathematical Physics*, 2019(1), 2182640. <https://doi.org/10.1155/2019/2182640>
- Mustafa, A. M., Gong, Z., & Osman, M. (2021). The solution of fuzzy variational problem and fuzzy optimal control problem under granular differentiability concept. *International Journal of Computer Mathematics*, 98, 1495-1520. <https://doi.org/10.1080/00207160.2020.1823974>
- Najariyan, M., & Zhao, Y. (2017). Fuzzy fractional quadratic regulator problem under granular fuzzy fractional derivatives. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 26, 2273–2288. <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2017.2783895>
- Piegat, A., & Landowski, M. (2015). Horizontal membership function and examples of its applications. *International Journal of Fuzzy Systems*, 17, 22-30. <https://doi.org/10.1007/s40815-015-0013-8>
- Seierstad, A., & Sydsaeter, K. (1986). *Optimal Control Theory with Economic Applications*. Elsevier, Amsterdam.
- Son, N. T. K., Long, H. V., & Dong, N. P. (2019). Fuzzy delay differential equations under granular differentiability with applications. *Computational & Applied Mathematics*, 38, 107. <https://doi.org/10.1007/s40314-019-0881>
- Truong, T., Bohner, M., Girejko, E., Malinowska, A. B., & Hoa, N.V. (2025). Granular fuzzy calculus on time scales and its applications to fuzzy dynamic equations. *Information Sciences*, 690, 121547. <https://doi.org/10.1016/j.ins.2024.121547>
- Torres, D. F. M., & Malinowska, A. B. (2012). *Introduction to the fractional calculus of variations*. World Scientific, Singapore. <https://doi.org/10.1142/p871>
- Treanță, S. (2022). Characterization results of solutions in interval-valued optimization problems with mixed constraints. *Journal of Global Optimization*, 82(4), 951-964. <https://doi.org/10.1007/s10898-021-01049-4>
- Tung, L. T., & Tam, D. H. (2022). Optimality conditions and duality for continuous-time programming with multiple interval-valued objective functions. *Computational & Applied Mathematics*, 41, 8. <https://doi.org/10.1007/s40314-022-02059-y>
- Tung, L. T., & Tam, D. H. (2023). Necessary and sufficient optimality conditions for fuzzy variational problems of several dependent variables in terms of granular derivatives. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 31, 825-857. <https://doi.org/10.1142/S0218488523500381>
- Tùng, L. T., Khải, T. T., & Tùng, T. (2024). Điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu hóa hàm tích phân mở với ràng buộc hệ phương trình vi phân cấp một. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, 60(CD. Khoa học tự nhiên), 20-31. <https://doi.org/10.22144/ctujos.2024.333>