Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2026.161

XẤP XỈ HÀM SỐ BẰNG PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN MỜ VỚI PHÉP TOÁN NHÂN

Bùi Quốc Việc* và Lâm Hoàng Chương
Khoa Toán học, Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): bqviec@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 17/12/2025
Sửa bài (Revised): 14/01/2026
Duyệt đăng (Accepted): 15/07/2026

Title: *Approximation of functions using the fuzzy integral transforms with multiplication operator*

Author(s): *Bui Quoc Viec* and Lam Hoang Chuong*

Affiliation(s): *Department of Mathematics, College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, một loại phép biến đổi tích phân mờ được xây dựng trên cơ sở phép toán nhân trong tập lưới dư thứ tự đầy đủ đã được giới thiệu. Một số tính chất cơ bản của phép biến đổi này được khảo sát. Đồng thời, chúng tôi thiết lập các điều kiện đủ đối với các tham số, bao gồm hàm hạt nhân tích phân và độ đo mờ, nhằm đảm bảo rằng phép biến đổi bảo toàn hàm hằng. Ngoài ra, một phương pháp xấp xỉ hàm số đã được đề xuất dựa trên sự kết hợp của hai phép biến đổi tích phân mờ. Phần cuối của bài báo trình bày một số ví dụ minh họa cho phương pháp được đề xuất.

Từ khóa: *Độ đo mờ, hàm hạt nhân tích phân, phân hoạch mờ, phép biến đổi mờ, phép biến đổi tích phân*

ABSTRACT

In this paper, we introduce a class of fuzzy integral transforms constructed on the basis of the multiplication operation in a complete residuated lattice. Several fundamental properties of this transform are investigated. Moreover, we establish sufficient conditions on the parameters, including the integral kernel function and the fuzzy measure, to ensure that the transform preserves constant functions. In addition, the paper proposes a function approximation method based on the combination of two fuzzy integral transforms. The final part of the paper presents several illustrative examples of the proposed method.

Keywords: *Fuzzy integral transforms, fuzzy measure, fuzzy partition, fuzzy transforms, integral kernel*

1. GIỚI THIỆU

Phép biến đổi tích phân là một phép toán tạo ra một hàm mới $g(y)$ nhờ vào sự kết hợp của hàm gốc $f(x)$ và hàm quan hệ $K(x,y)$ giữa các miền xác định X và Y tương ứng. Tức là,

$$g(y) = \int_a^b f(x).K(x,y)dx \qquad (1)$$

trong đó $\int_a^b$ kí hiệu là tích phân Lebesgue trên đoạn $[a,b]$. Biến đổi Fourier và Laplace là các phép biến đổi tích phân rất phổ biến và có nhiều ứng dụng trong giải quyết các bài toán thực tế như: giải phương trình vi phân, xử lý hình ảnh, phân tích và xử lý quá trình ngẫu nhiên,… (Debnath & Bhatta, 1994; Tenoudji, 2016).

Trong lý thuyết tập mờ, giá trị của các hàm thường được xét trên các tập đại số với giá trị đặc biệt như là tập lưới dư thứ tự đặc biệt, tập đại số MV, đại số BL hay đại số IMLT có thể tham khảo trong tài liệu Bělohlávek (2002). Khi đó với các hàm có giá trị lưới dư thứ tự đặc biệt này, một loại phép biến đổi tích phân đặc biệt với tên gọi *phép biến đổi mờ* đã được tác giả Perfilieva (2006) giới thiệu . Đây là một phép biến đổi tạo ra hàm mới dựa vào sự kết hợp các phép toán trên đại số giá trị đặc biệt giữa hàm gốc và các phân hoạch mờ trên tập xác định của hàm gốc. Khái niệm phân hoạch mờ ở đây đóng vai trò rất quan trọng trong phép biến đổi mờ. Nhờ khái niệm này mà các định nghĩa phép biến đổi mờ xuôi và ngược được xây dựng. Sự kết hợp giữa hai phép biến đổi mờ xuôi và ngược để xấp xỉ hàm số cũng được Perfilieva (2006) giới thiệu. Qua đó, ta thấy được phân hoạch mờ còn ảnh hưởng trực tiếp đến chất lượng của phương pháp xấp xỉ sử dụng phép biến đổi mờ.

Kết quả nghiên cứu của Holčapek and Viec (2020) đã chỉ ra rằng phép biến đổi mờ là một trường hợp đặc biệt của phép biến đổi tích phân mờ theo dạng công thức (1). Trong đó, tích phân Lebesgue được thay thế bởi tích phân Sugeno (Dvořák and Holčapek, 2012) và phân hoạch mờ được thay thế bởi hàm quan hệ mờ (sau đó hàm quan hệ mờ này được gọi là hàm hạt nhân tích phân). Hàm hạt nhân tích phân và độ đo mờ là hai tham số đóng vai trò rất quan trọng trong phép biến đổi tích phân mờ. Trong trường hợp đặc biệt, khi độ đo mờ là độ đo lớn nhất hoặc độ đo nhỏ nhất thì ta thu được phép biến đổi mờ xuôi hoặc ngược tương ứng. Hơn nữa, dựa trên nền tảng của các tham số là: hàm hạt nhân tích phân và độ đo mờ thì các loại phép biến đổi mờ xuôi và ngược hoàn toàn được xây dựng khái quát hơn bởi phép biến đổi tích phân mờ. Để tiếp tục xây dựng một lý thuyết mới hoàn chỉnh cho phép biến đổi tích phân mờ và trên nền tảng tương tự với phép biến đổi mờ thì câu hỏi được đặt ra ở đây là: "liệu có thể đề xuất một phương pháp xấp xỉ hàm số bằng cách kết hợp các loại phép biến đổi tích phân mờ lại với nhau hay không?" và nếu xây dựng được phương pháp xấp xỉ thì "các tham số là: hàm hạt nhân tích phân và độ đo mờ cần phải thỏa các điều kiện gì để đảm bảo cho chất lượng của kết quả hàm xấp xỉ?".

Trong bài báo này, chúng tôi lần lượt đi tìm câu trả lời cho các câu hỏi trên. Thứ nhất, một số điều kiện đủ của các tham số trong phép biến đổi tích phân mờ được giới thiệu nhằm chắc chắn rằng phép biến đổi của hàm hằng được bảo toàn, tức là hàm hằng biến đổi thành hàm hằng. Thứ hai, trên cơ sở các điều kiện hàm hạt nhân và độ đo mờ được thoả mãn như trên thì phương pháp xấp xỉ hàm số dựa vào sự kết hợp của các phép biến đổi tích phân mờ được trình bày.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

2.1. Đại số các giá trị đặc biệt

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng tập lưới dư thứ tự tuyến tính đầy đủ Γ là tập giá trị của các tập mờ. Để giải thích chi tiết hơn cho khái niệm này, chúng tôi xét tập

$$\Gamma = \langle L, \wedge, \vee, \otimes, \multimap, 0, 1 \rangle$$

với 0 ký hiệu là phần tử nhỏ nhất, 1 ký hiệu là phần tử lớn nhất và các phép toán $\wedge$, $\vee$, $\otimes$, $\multimap$ lần lượt là phép *minimum, maximum, nhân* và *phép dư*.

Định nghĩa 1. Tập Γ được gọi là *tập lưới dư tuyến tính đầy đủ* nếu thỏa mãn:

i. tập $\Gamma = \langle L, \wedge, \vee, 0, 1 \rangle$ là tập lưới thứ tự tuyến tính đầy đủ;

ii. tập $\Gamma = \langle L, \otimes, 1 \rangle$ thoả mãn các tính chất giao hoán: $a \otimes b = b \otimes a$, kết hợp: $a \otimes (b \otimes c) = (a \otimes b) \otimes c$, đồng nhất: $a \otimes 1 = a$ với $a, b, c \in L$;

iii. hai phép toán $\otimes$ và $\multimap$ thỏa mãn tính chất liên hợp:

$$a \otimes b \leq c \text{ nếu và chỉ nếu } a \leq b \multimap c$$

với $\leq$ kí hiệu là quan hệ thứ tự trên L và $a, b, c \in L$.

Ngoài ra, trên tập L chúng ta định nghĩa thêm các phép toán được sử dụng trong bài báo này.

Phép toán phủ định, kí hiệu $\neg$, được định nghĩa là: $\neg a = a \multimap 0$. Khi đó L được gọi là thỏa mãn luật phủ định kép nếu $\neg(\neg a) = a$ với mọi $a \in L$.

Phép toán tương đương, kí hiệu $\leftrightarrow$, được định nghĩa là:

$$a \leftrightarrow b = (a \multimap b) \wedge (b \multimap a)$$

với mọi $a, b \in L$.

Để có thể hiểu rõ hơn về tập lưới dư thứ tự tuyến tính đầy đủ cũng như các phép toán được xây dựng trên nó (Belohlavek, 2002).

Ví dụ 1. Xét tập

$$\Gamma_T = \langle [0,1], \min, \max, T, \multimap_T, 0, 1 \rangle$$

trong đó phép toán dư được xác định bởi

$$a \multimap_T b = \{ c \in [0,1] \mid T(a,c) \le b \},$$

với T là hàm nửa liên tục trái *t*-chuẩn.

Khi đó, Γ_T là tập lưới dư thứ tự tuyến tính đầy đủ với các phép toán cơ bản của hàm *t*-chuẩn như: *phép nhân*, *phép min*, *phép Lukasiewicz*.

Chúng ta có thể xem chi tiết về các tính chất và ví dụ khác của hàm *t*-chuẩn trong kết quả nghiên cứu của Klement et al. (2000).

Để dễ dàng kiểm tra các kết quả tính toán trong các phần tiếp theo của bài báo, chúng tôi chỉ xét tập

$$\Gamma_L = \langle [0,1], \wedge, \vee, \otimes_L, \multimap_L, 0, 1 \rangle \quad (2)$$

là *tập lưới dư thứ tự tuyến tính đầy đủ Lukasiewicz* với phép toán được cho bởi các công thức tương ứng như sau:

$$a \otimes_L b = \max(a + b - 1, 0);$$
$$a \multimap_L b = \min(1, 1 - a + b);$$
$$\neg_L a = 1 - a;$$
$$a \leftrightarrow_L b = 1 - |a - b|,$$

với mọi $a, b \in [0,1] = L$.

2.2. Tập mờ và các phép toán cơ bản

Xét tập Γ là tập lưới dư tuyến tính đầy đủ và X là tập khác rỗng.

Định nghĩa 2. Tập mờ A được xác định trên X là hàm số $A : X \to L$ sao cho với mỗi $x \in X$ thì giá trị $A(x)$ được gọi là *giá trị mức độ thành phần* của x trong tập mờ A. Ký hiệu L^X là tập hợp tất cả các tập mờ trên X.

Tập mờ A trên X được gọi là tập *crisp* nếu thoả $A = 1_Z$ với 1_Z kí hiệu là hàm đặc trưng của tập $Z \subseteq X$. Do đó, ta có thể xem tập $X = 1_X$.

Tập mờ rỗng trên X được ký hiệu là $\varnothing$, tức là $\varnothing(x) = 0$ với mọi $x \in X$.

Kí hiệu $\underline{a}_X$ là hằng mờ trên X nếu thỏa $\underline{a}_X(x) = a$ với mọi $x \in X$ và $a \in L$.

Tập *support* kí hiệu là tập $Supp(A)$ của tập mờ A nếu thoả mãn

$$\mathrm{Supp}(A) = \{ x \mid x \in X \ \&\ A(x) > 0 \}.$$

Tập *core* của tập mờ A kí hiệu là tập $\mathrm{Core}(A)$ nếu thoả mãn

$$\mathrm{Core}(A) = \{ x \mid x \in X \ \&\ A(x) = 1 \}.$$

Trong trường hợp tập $\mathrm{Core}(A) \neq \theta$ thì tập mờ A được gọi là *tập bình thường* trên X.

Cho A, B *là* các tập mờ trên X. Các phép toán cơ bản như: $\wedge, \vee, \otimes$ và $\multimap$ trên L được mở rộng cho các phép toán trên tập hợp tất cả các tập mờ L^X bởi các công thức sau:

$$(A \wedge B)(x) = A(x) \wedge B(x)$$
$$(A \vee B)(x) = A(x) \vee B(x)$$
$$(A \otimes B)(x) = A(x) \otimes B(x)$$
$$(A \multimap B)(x) = A(x) \multimap B(x)$$

với mọi $x \in X$. Tập mờ A được gọi là tập con của tập mờ B, ký hiệu $A \subseteq B$, nếu thoả mãn $A(x) \le B(x)$ với mọi $x \in X$.

Hơn nữa, tập mờ A bằng với tập mờ B, ký hiệu $A = B$, khi và chỉ khi $A \subseteq B$ và $B \subseteq A$.

Cho X, Y là các tập khác rỗng. Tập mờ $K : X \times Y \to L$ được gọi là một hàm *quan hệ mờ nhị phân* giữa X và Y. Ta kí hiệu hàm $K^T : Y \times X \to L$ được gọi là *hàm chuyển vị* của hàm quan hệ mờ K nếu thỏa mãn:

$$K(x,y) = K^T(y,x)$$

với mọi $x \in X$, $y \in Y$.

Khi $X = Y$, ta nói K là một hàm quan hệ mờ trên X.

Hàm quan hệ mờ $K : X \times X \to [0,1]$ được gọi là có tính chất:

i. *phản xạ* nếu thỏa $K(x,x) = 1$ với mọi,

ii. *đối xứng* nếu thỏa,

$$K(x,y) = K(y,x)$$

với mọi $x, y \in X$,

iii. *bắc cầu* nếu thỏa

$$K(x,y) \otimes K(y,x) \le K(x,z)$$

với mọi $x, y, z \in X$.

Khi đó, quan hệ mờ K được gọi là một *quan hệ tương đương* trên X nếu K thỏa đồng thời cả ba tính chất phản xạ, đối xứng và bắc cầu.

Xét quan hệ mờ $K: X\times Y\to L$ và $x\in X$, tập mờ $K_x: Y\to L$ thỏa mãn $K_x(y)=K(x,y)$ được gọi là phép chiếu của K trên Y, tương tự ta có tập mờ $K_y: X\to L$ được gọi là phép chiếu của K trên Y nếu thỏa mãn $K_y(x)=K(x,y)$ với $y\in Y$.

Khi đó, quan hệ mờ $K: X\times Y\to L$ được gọi là:

i. bình thường nếu $Core(K)\neq\varnothing$;

ii. bình thường với biến thứ nhất nếu $Core(K_x)\neq\varnothing$ với mọi $x\in X$;

iii. bình thường với biến thứ hai nếu $Core(K_y)\neq\varnothing$ với mọi $y\in Y$.

2.3. Không gian độ đo mờ

Cho X là tập khác rỗng và kí hiệu $\mathrm{P}(X)=2^X$ là tập hợp tất cả các tập con sinh ra bởi tập hợp X.

Định nghĩa 3. Tập con Ω của tập $\mathrm{P}(X)$ được gọi là một *đại số* của X nếu thỏa mãn các điều kiện sau:

i. $\phi, X\in\Omega$;
ii. nếu $A\in\Omega$, thì $X\setminus A\in\Omega$;
iii. nếu $A,B\in\Omega$, thì $A\cup B\in\Omega$.

Khi đó, cặp (X,Ω) được gọi là *không gian đo được* trên X nếu Ω là đại số trên X. Nếu (X,Ω) là không gian đo được và $A\in\Omega$ thì tập A được gọi là Ω – *đo được.*

Ví dụ 2. Xét tập X khác rỗng. Khi đó, tập $\Omega_1=\{\phi,X\}$ và $\Omega_2=2^X$ là các đại số tầm thường trên tập X.

Trong các phần tiếp theo của bài báo, chúng tôi sử dụng đại số của các tập thứ tự tuyến tính đặc biệt được trình bày trong ví dụ sau đây.

Ví dụ 3. Cho L là tập thứ tự tuyến tính đặc biệt. Ta đặt $u: P(L)\to P(L)$ như sau:

$$u(Z)=\{a\in L\,|\,\exists z\in Z: z\le a\}$$

với mọi $Z\in P(L)$. Rõ ràng, ta có $Z\subseteq u(Z)$. Khi đó, tập $Z\in P(L)$ được gọi là tập *phía trên* của của Z nếu thỏa mãn $Z=u(Z)$. Tập hợp tất cả các tập phía trên của Z được kí hiệu là $Up(Z)$. Ngoài ra, đại số sinh ra bởi tất cả các tập phía trên của L được kí hiệu bởi $\Omega_{Up}(L)$.

Trong bài báo này, chúng tôi chỉ xét đại số các tập phía trên của tập thứ tự tuyến tính đặc biệt L. Do đó, nếu không có giải thích gì thêm thì ta quy ước

$$\text{tập } \Omega=\Omega_{Up}(L).$$

Định nghĩa 4. Cho (X,Ω) là không gian đo được. Hàm số $\mu:\Omega\to L$ được gọi là *độ đo mờ* trên (X,Ω) nếu thoả:

i. $\mu(\phi)=0$ và $\mu(X)=1$;
ii. nếu $A,B\in\Omega$ sao cho $A\subseteq B$ thì $\mu(A)\le\mu(B)$.

Khi đó, bộ ba (X,Ω,μ) được gọi là *không gian độ đo mờ* nếu (X,Ω) là không gian đo được và μ là độ đo mờ trên (X,Ω).

Tiếp theo, một khái niệm độ đo mờ mới được giới thiệu với tên gọi là *độ đô mờ liên hợp*, nó được sử dụng trong phần xấp xỉ hàm số mà chúng tôi sẽ trình bày ở phần chính của bài báo.

Định nghĩa 5. Cho μ là độ đo mờ trên (X,Ω) và $\neg$ là phép toán phủ định trên L. Hàm $\mu^{c,\neg}:\Omega\to L$ cho bởi

$$\mu^{c,\neg}(A)=\neg(\mu(X\setminus A))$$

với mọi $A\in\Omega$ được gọi là *độ đo liên hợp mờ* của độ đo mờ μ.

Ta thấy rằng, độ đo liên hợp $\mu^{c,\neg}$ của độ đo μ cũng là độ đo mờ nhưng nó được xây dựng trên nền tảng của phép toán phủ định $\neg$ và tập phần bù $X\setminus A$.

Ví dụ 4. Cho (X,Ω) là không gian đo được. Xét hai độ đo mờ μ_1 và μ_2 trên (X,Ω), ta nói rằng độ đo μ_1 nhỏ hơn hoặc bằng độ đo μ_2 (kí hiệu $\mu_1\le\mu_2$) nếu $\mu_1(A)\le\mu_2(A)$ với mọi $A\in\Omega$. Khi đó, *độ đo mờ nhỏ nhất* μ^0 và *độ đo mờ lớn nhất* μ^1 trên (X,Ω) liên quan đến quan hệ thứ tự $\le$ được xác định bởi công thức sau:

$$\mu^0(A)=\begin{cases}0, & A\neq X\\ 1, & A=X\end{cases} \text{ và } \mu^1(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing\\ 1, & A\neq\varnothing\end{cases},$$

với mọi $A\in\Omega$.

Bổ đề 1. *Cho* μ là độ đo mờ trên (X, Ω). *Xét* $\varphi : L \to L$ là hàm đơn điệu không giảm sao cho $\varphi(0) = 0$ và $\varphi(1) = 1$. Khi đó, hàm $\mu_\varphi : \Omega \to L$ thoả mãn

$$\mu_\varphi(A) = \varphi(\mu(A))$$

với mọi $A \in \Omega$ cũng là một độ đo mờ trên (X, Ω).

Phần chứng minh của bổ đề 1 được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của độ đo mờ. Chúng tôi xin được không trình bày ở đây.

Ví dụ 5. Cho $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ là tập hữu hạn và Ω là đại số trên X. Cho L là tập lưới dư tuyến tính trên $[0,1]$. Khi đó, *độ đo liên quan đến lực lượng* của tập hợp (kí hiệu μ^l) trên (X, Ω) được xác định bởi công thức:

$$\mu^l(Z) = \frac{|Z|}{n} \qquad (3)$$

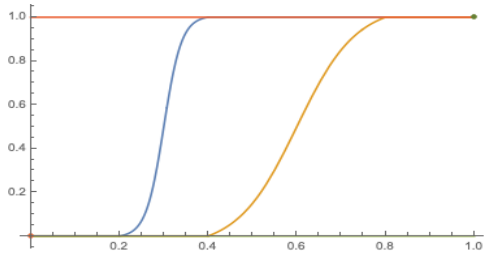
với mọi $Z \in \Omega$, ở đây $|Z|$ kí hiệu là số lượng phần tử của tập Z.

Để dễ dàng hơn cho việc tính toán kết quả trong các ví dụ minh hoạ, độ đo liên quan đến lực lượng μ^l được thay thế bởi một loại độ đo mờ mới liên quan đến hàm không giảm φ trong bổ đề 1. Tương tự, độ đo liên hợp mờ của độ đo μ^l cũng được thay thế bởi độ đo liên hợp mới liên quan hàm $\varphi^{c,\neg}(x) = 1 - \varphi(1-x)$ với phép toán phủ định được dùng ở đây là $\neg(x) = 1 - x$ với mọi $x \in [0,1]$.

Xét hàm $\varphi^p_{k,u} : [0,1] \to [0,1]$ được cho bởi:

$$\varphi^p_{k,u}(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \ \ or \ \ t < k; \\ \dfrac{e^{p\left(2\frac{t-k}{u-k}-1\right)}}{e^{p\left(2\frac{t-k}{u-k}-1\right)}+1}, & k < t \le u; \\ 1, & t = 1 \quad or \quad u < t. \end{cases}$$

với mọi $t \in [0,1]$.



Hình 1. Biểu diễn các hàm $\varphi^1_{0,0}$ (cam đỏ), $\varphi^5_{0.2,0.4}$ (xanh nước biển), $\varphi^3_{0.4,0.8}$ (vàng cam), $\varphi^1_{1,1}$ (xanh lá)

Khi đó, tập hợp tất cả các độ đo lực lượng ở công thức (3) của ví dụ 5 có liên quan đến hàm không giảm $\varphi^p_{k,u}$ như trong bổ đề 1 được xác định là:

$$\aleph^l = \{\mu^l = \varphi^p_{k,u} \mid k, u \in [0,1],\ k \le u,\ p \in N,\ p > 0\}.$$

Tức là độ đo liên quan lực lượng là $\mu^l = \varphi^1_{0,1}$, độ đo bé nhất là $\mu^0 = \varphi^1_{1,1}$ và độ đo lớn nhất là $\mu^1 = \varphi^1_{0,0}$.

2.4. Tích phân mờ trên nền tảng phép nhân

Để thuận tiện cho việc ký hiệu và gọi tên trong phần còn lại của bài báo có liên quan đến tích phân mờ, chúng tôi xin thay thế tên gọi các tập mờ được giới thiệu ở các phần trước, tức là $A, B \in F(X)$, bởi kí hiệu các hàm f, g.

Trên cơ sở các loại tích phân cổ điển, một loại tích phân mới trên nền tảng của lý thuyết mờ được giới thiệu trong định nghĩa sau.

Định nghĩa 6. Cho (X, Ω, μ) là không gian độ đo mờ và hàm $f : X \to L$. Khi đó, *tích phân mờ của hàm* f *trên* X được cho bởi công thức sau:

$$\int f \, d\mu = \bigvee_{A \in F} \left(\mu(A) \otimes \bigwedge_{x \in A} f(x)\right) \qquad (4)$$

Ta thấy rằng, trong công thức (4) thì đây là một loại tích phân mờ được xây dựng dựa trên các phép toán: min, max, phép nhân của tập lưới dư thứ tự tuyến tính đầy đủ nhờ vào sự kết hợp giữa độ đo của các tập mờ và hàm gốc ban đầu. Đây là một dạng tích phân mờ gần giống với loại tích phân Sugeno (1974). Trong các tài liệu Dvořák and Holčapek (2012) và Dubois et al. (2016) sẽ giúp bạn đọc có thể biết được thông tin chi tiết của loại tích phân này.

Trong định lý tiếp theo, một số tính chất cơ bản của loại tích phân mờ này đã được trình bày.

Định lý 1. *Cho* $f, g \in L^X$ *và* $\underline{a}_X \in L^X$ *là* hàm hằng. Với mọi $a \in L$ *và* $x \in X$ ta có:

i. $\int f dx \le \int g dx$ *nếu* $f \le g$;

ii. $\int \underline{a}_X(x) dx = a$;

iii. $a \otimes \int f d\mu \le \int (\underline{a}_X \otimes f) d\mu$;

iv. $\int (\underline{a}_X \multimap f) d\mu \le a \multimap \int f d\mu$;

v. $\int (\underline{a}_X \otimes 1_Z) d\mu = a \otimes \mu(Z)$, *với* $Z \subseteq X$.

Phần chứng minh chi tiết của Định lý 1 có thể xem trong tài liệu tham khảo Dvořák and Holčapek (2012).

3. PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN MỜ TRÊN NỀN TẢNG CỦA PHÉP NHÂN

3.1. Hàm hạt nhân tích phân mờ

Phân hoạch mờ là một khái niệm đóng vai trò rất quan trọng trong lý thuyết tập mờ nói chung và trong phép biến đổi mờ nói riêng vì nó có ảnh hưởng trực tiếp đến kết quả xấp xỉ hàm số mà chúng tôi sẽ trình bày chi tiết trong phần sau của bài báo. Vì vậy, khái niệm phân hoạch mờ được nhắc lại ở đây.

Định nghĩa 7. Cho X là tập khác rỗng và một họ các tập mờ

$$\chi = \{ A_i \mid i = 1,...,n \} \subseteq F(X)$$

được gọi là *một phân hoạch* mờ trên X nếu nó thỏa các điều kiện sau:

i. Các tập mờ A_i, $i = 1,...,n$ là bình thường, tức là $Core(A_i) \neq \varnothing$ với mọi $i = 1,...,n$;

ii. Tập $Core(\chi) = \{ Core(A_i) \mid A_i \in \chi \}$ tạo thành một phân hoạch trên X, nghĩa là

$$Core(A) \cap Core(B) = \varnothing$$

với mọi $A, B \in \chi$, $A \neq B$ và

$$\bigcup Core(A_i) = X$$

với mọi $i = 1,...,n$.

Nhắc lại rằng, một quan hệ $R : X \times X \to L$ được gọi là một quan hệ tương đương trên X nếu thỏa mãn các tính chất:

i. *phản xạ*, tức là: $(x,x) \in R$ với mọi $x \in X$;

ii. *đối xứng*, tức là: nếu $(x,y) \in R$ thì $(y,x) \in R$ với mọi $x, y \in X$;

iii. *bắt cầu,* tức là: nếu $(x,y) \in R$ và $(y,z) \in R$ thì ta có $(x,z) \in R$ với mọi $x, y, z \in X$.

Khi đó, ta sử dụng một khái niệm tương đương (có liên quan đến quan hệ tương đương) với khái niệm phân hoạch mờ trong định nghĩa 7 ở các phần tiếp theo của bài báo và khái niệm này được trình bày như sau.

Định nghĩa 8. Một họ các tập mờ

$$\chi = \{ A_i \mid i = 1,...,n \} \subseteq L^X$$

là một phân hoạch mờ trên X nếu và chỉ nếu

$$R = \{ (x,y) \in X \times X \mid \exists! A \in \chi : A(x) = A(y) = 1 \} \quad (5)$$

là một quan hệ tương đương trên X .

Nhằm xây dựng một khái niệm mới khái quát hơn khái niệm phân hoạch mờ trên nền tảng các quan hệ mờ. Định nghĩa này được trình bày trong phần tiếp theo.

Định nghĩa 9. Cho X, Y là các tập hợp khác rỗng. Một quan hệ mờ $K : X \times Y \to [0,1]$ được gọi là *hàm hạt nhân tích phân mờ* nếu thỏa mãn tính chất K là bình thường đối với cả hai biến nghĩa là:

i. với mọi $x \in X$, tồn tại $y \in Y$ sao cho $K(x,y) = 1$ và

ii. với mọi $y \in Y$, tồn tại $x \in X$ sao cho $K(x,y) = 1$.

Ở đây, tên gọi hàm hạt nhân tích phân mờ vì xuất phát từ ý nghĩa của nó là rất quan trọng trong phép biến đổi tích phân mờ mà chúng tôi nghiên cứu chính trong phần tiếp theo của bài báo. Khi đó, mối quan hệ giữa hàm hạt nhân tích phân và phân hoạch mờ được trình bày trong bổ đề tiếp theo.

Bổ đề 2. *Cho* R *là* một quan hệ tương đương trên X. Khi đó, tồn tại tập con $Y \subseteq X$ và với mọi $(x,y) \in X \times Y$ thoả mãn*:*

i. Tập $\chi = \{ A_y \mid y \in Y \}$ *với* $A_y(x) = R(x,y)$ *là một phân hoạch mờ của* X *;*

ii. Hàm $K : X \times Y \to [0,1]$ *sao cho* $K(x,y) = R(x,y)$ *là một hàm hạt nhân tích phân.*

Chứng minh. Trước tiên, ta chứng minh (i) $\chi = \{ A_y \mid y \in Y \}$ với $A_y(x) = R(x,y)$ là một phân hoạch mờ của X .

Đặt $R^* = \{(x,y) \in X \times X \mid R(x,y) = 1\}$. Ta thấy rằng R^* là một quan hệ tương đương trên X. Hơn nữa, ta xét hàm số $\lambda : X \setminus_{R^*} \to X$ sao cho $\lambda([x] \in [x])$ thỏa với mọi $[x] \in X \setminus_{R^*}$, ở đây $X \setminus_{R^*}$ là tập hợp tất cả các lớp tương đương trên X có liên quan đến quan hệ R^* và $[x]$ kí hiệu là lớp tương đương của x. Đặt $Y = \{\lambda[x] \mid [x] \in X \setminus_{R^*}\}$. Rõ ràng, ta có $Y \subseteq X$. Bây giờ, ta xét tập $A = \{A_y \mid y \in Y\}$ với $A_y(x) = R(x,y)$. Ta định nghĩa quan hệ S trên X bởi công thức (5). Bây giờ, để chứng minh χ là một phân hoạch trên X thì ta cần chứng S là một quan hệ tương đương trên X. Cuối cùng, ta cần chỉ ra rằng $S = R^*$. Thật vậy, nếu tồn tại duy nhất $z \in Y$ thoả $A_z(x) = A_z(y) = 1$ thì ta suy ra $R(x,z) = R(y,z) = 1$ và từ tính chất đối xứng và bắt cầu của R ta có được

$$R(x,z) \otimes R(y,z) = 1 \leq R(x,y).$$

Do đó, $(x,y) \in R^*$. Ngược lại, nếu $(x,y) \in R^*$ thì $\{z\} = Y \cap [x]$ và từ định nghĩa Y có

$$R(x,z) = A_z(x) = A_z(y) = R(y,z) = 1.$$

Suy ra, z là phần tử duy nhất của Y thuộc lớp tương đương $[x]$. Do đó, $(x,y) \in S$ hay S là quan hệ tương đương trên X.

Phần chứng minh của (ii) là được suy ra trực tiếp từ định nghĩa của hai phép chiếu K_x và K_y đều là hai tập mờ bình thường với mọi $x \in X$ và $y \in Y$.

3.2. Phép biến đổi tích phân mờ với phép toán nhân

Định nghĩa 10. Cho (X, Ω, μ) là không gian độ đo mờ, $K : X \times Y \to L$ là hàm hạt nhât tích phân, $f : X \to L$ và đặt phép toán $* = \{\otimes, \multimap\}$. Khi đó, ánh xạ $T^*_{(K,\mu)} : F(X) \to F(Y)$ xác định bởi:

$$T^*_{(K,\mu)}(f)(y) = \int K(x,y) * f(x) d\mu \quad (6)$$

với mọi $x \in X$, $y \in Y$, được gọi là $(K,\mu,*)$-*phép biến đổi tích phân mờ.*

Trong công thức (6), ta thấy rằng có hai loại phép biến đổi tích phân mờ đã được định nghĩa và đều dựa trên cơ sở nền tảng của loại tích phân mờ được giới thiệu ở công thức (4) trong định nghĩa 6 bằng cách sử dụng các phép toán kết hợp giữa hàm hạt nhân tích phân và hàm gốc ban đầu, tức là: tương ứng với phép toán nhân $\otimes$ ta có loại phép biến đổi tích phân tương ứng là $(K,\mu,\otimes)$ với

$$T^{\otimes}_{(K,\mu)}(f)(y) = \int K(x,y) \otimes f(x) d\mu$$

và tương tự với phép toán dư $\multimap$ ta có phép biến đổi tích phân tương ứng là $(K,\mu,\multimap)$ với

$$T^{\multimap}_{(K,\mu)}(f)(y) = \int K(x,y) \multimap f(x) d\mu.$$

Vì hai loại phép biến đổi tích phân này có chung một số tính chất cơ bản nên để thuận tiện cho việc gọi tên cũng như trình bày trong các phần tiếp theo của bài bào, chúng tôi sử dụng tên gọi và kí hiệu $T^*_{(K,\mu)}$ như trong định nghĩa 10.

Một số tính chất cơ bản của $(K,\mu,*)$- phép biến đổi tích phân mờ được trình bày trong định lý sau đây và phần chứng minh chi tiết của định lý có thể tìm trong kết quả nghiên cứu của Holčapek and Viec (2020).

Định lí 2. *Cho* $f, g \in F(X)$, *ta đặt* $* = \{\otimes, \multimap\}$ *và với mọi* $a \in L$ *ta có:*

i. $T^*_{(K,\mu)}(f) \leq T^*_{(K,\mu)}(g)$ *nếu* $f \leq g$;

ii. $T^*_{(K,\mu)}(f \cap g) \leq T^*_{(K,\mu)}(f) \wedge T^*_{(K,\mu)}(g)$;

iii. $T^*_{(K,\mu)}(f) \vee T^*_{(K,\mu)}(g) \leq T^*_{(K,\mu)}(f \cup g)$;

iv. $a \otimes T^*_{(K,\mu)}(f) \leq T^*_{(K,\mu)}(\underline{a}_X \otimes f)$;

v. $T^*_{(K,\mu)}(\underline{a}_X \multimap f) \leq a \multimap T^*_{(K,\mu)}(f)$.

Như đã trình bày trong phần giới thiệu, phép biến đổi tích phân mờ được xây dựng nhằm tổng quát khái niệm phép biến đổi mờ. Định lý tiếp theo cho thấy rằng phép biến đổi mờ là một trường hợp đặc biệt của phép biến đổi tích phân mờ khi ta chọn hàm hạt nhân tích phân và độ đo mờ tương ứng phù hợp.

Định lý 3. *Cho* (X, Ω, μ) *là không* gian độ đo mờ sao cho $\Omega = P(X)$ *và* $K : X \times Y \to L$ là hàm

hạt nhân tích phân thỏa mãn tập χ_K được xác định là phân hoạch mờ của X. Giả sử rằng

$$T^{\uparrow}_{\chi_K},\ T^{\uparrow}_{\chi_K} : F(X) \to F(Y)$$

lần lượt là phép biến đổi mờ trên và dưới từ $F(X)$ vào $F(Y)$ và $f \in F(X)$. Khi đó, ta có:

i. Nếu $\mu = \mu^1$ *là độ đo mờ lớn nhất trên* (X, Ω) *thì* $T^{\uparrow}_{\chi_K}(f) = T^{\otimes}_{(K,\mu^1)}(f)$;

ii. Nếu $\mu = \mu^0$ *là độ đo mờ nhỏ nhất trên* (X, Ω) *thì* $T^{\downarrow}_{\chi_K}(f) = T^{\multimap}_{(K,\mu^0)}(f)$.

Chứng minh. Cho K là một hàm hạt nhân tích phân sao cho $\chi_K = \{K_y \mid y \in Y\}$ là một phân hoạch mờ và với mọi $y \in Y$. Khi đó, ta có:

(i) Nếu $\mu = \mu^1$ là độ đo lớn nhất (ví dụ 4) thì

$$\begin{aligned} T^{\otimes}_{(K,\mu^1)}(f)(y) &= \bigvee_{A\in\Omega}\Big(\mu^1(A) \otimes \bigwedge_{x\in A}\big(K(x,y) \otimes f(x)\big)\Big) \\ &= \bigvee_{A\in T}\bigwedge_{x\in A}\big(K(x,y)\otimes f(x)\big) \\ &= \bigvee_{x\in X}\big(K(x,y)\otimes f(x)\big) \\ &= \bigvee_{x\in X}\big(K_y(x)\otimes f(x)\big) \\ &= T^{\uparrow}_{\chi_K}(f)(y). \end{aligned}$$

(ii) Nếu $\mu = \mu^0$ là độ đo nhỏ nhất (ví dụ 4) thì

$$\begin{aligned} T^{\multimap}_{(K,\mu^0)}(f)(y) &= \bigvee_{A\in\Omega}\Big(\mu^0(A) \otimes \bigwedge_{x\in A}\big(K(x,y) \multimap f(x)\big)\Big) \\ &= \bigwedge_{x\in X}\big(K(x,y)\multimap f(x)\big) \\ &= \bigwedge_{x\in X}\big(K_y(x)\multimap f(x)\big) \\ &= T^{\downarrow}_{\chi_K}(f)(y). \end{aligned}$$

Do đó, định lý đã được chứng minh.

Trong định lý tiếp theo, tính đơn điệu của phép biến đổi tích phân mờ phụ thuộc vào hai tham số độ đo mờ và hàm hạt nhân tích phân mờ được trình bày. Phần chứng minh của định lý được suy ra trực tiếp từ tính đơn điệu của tích phân mờ với phép toán nhân, chúng tôi không trình bày ở đây.

Định lý 4. *Cho* (X, Ω) là không gian độ đo, cho μ, μ' *là hai độ đo mờ trên* (X, Ω) *và cho* $K, K' : X \times Y \to L$ *là hai hàm hạt nhân tích phân.* Khi đó, với mọi $f \in F(X)$, ta có:

i. Nếu $\mu \le \mu'$ *thì*

$$T^{*}_{(K,\mu)}(f) \le T^{*}_{(K,\mu')}(f);$$

ii. Nếu $K \le K'$ *thì*

$$T^{*}_{(K,\mu)}(f) \le T^{*}_{(K',\mu)}(f).$$

Như đã đề cập ở phần trên, một trong những tính chất quan trọng nhất của phép biến đổi tích phân mờ là phép bảo toàn hàm hằng, tức là hàm hằng số $\underline{a}_X$ được biến đổi thành hàm hằng số $\underline{a}_Y$ (hay $T^{*}_{(K,\mu)}(\underline{a}_X) = \underline{a}_Y$). Trong định lý tiếp theo, điều kiện đủ của các tham số đã được trình bày: độ đo tích phân và hàm hạt nhân tích phân để tính chất bảo toàn hàm hằng được bảo toàn trong phép biến đổi tích phân mờ. Nhắc lại rằng, K_y kí hiệu là phép chiếu của K lên X.

Định lý 5. *Cho* (X, Ω, μ) là không gian độ đo, K là hàm hạt nhân tích phân và $a \in L$. Khi đó,

i. Nếu với mọi $y \in Y$ *tồn tại* $A_y \in \Omega$ *sao cho* $A_y \subseteq \mathrm{Core}(K_y)$ *và* $\mu(A_y) = 1$ *thì* $T^{\otimes}_{(K,\mu)}(\underline{a}_X) = \underline{a}_Y$;

ii. Nếu với mọi $y \in Y$ *tồn tại* $A_y \in T$ *sao cho* $A_y \subseteq X \setminus \mathrm{Core}(K_y)$ *và* $\mu(A_y) \le a$ *thì* $T^{\multimap}_{(K,\mu)}(\underline{a}_X) = \underline{a}_Y$.

Chứng minh. Cho $a \in L$ và $y \in Y$. Từ giả thuyết (i) của định lý, ta giả sử rằng có $A_y \subseteq \mathrm{Core}(K_y)$ thỏa mãn $\mu(A_y) = 1$. Khi đó,

$$\begin{aligned} T^{\otimes}_{(K,\mu)}(\underline{a}_X)(y) &= \int K(x,y) \otimes \underline{a}_X(x)\, d\mu \\ &= \bigvee_{A\in\Omega}\Big(\mu(A) \otimes \bigwedge_{x\in A}\big(K(x,y)\otimes \underline{a}_X(x)\big)\Big) \\ &= \bigvee_{A\in\Omega}\Big(\mu(A)\otimes \bigwedge_{x\in A}\big(K(x,y)\otimes a\big)\Big) \\ &\ge \Big(\mu(A_y)\otimes \bigwedge_{x\in A_y}\big(K(x,y)\otimes a\big)\Big) \\ &= 1 \otimes a = a. \end{aligned}$$

Để chứng minh cho chiều ngược lại, ta có

$$\mu(A)\otimes \wedge_{x\in A}\left(K(x,y)\otimes a\right)\le a$$

với mọi $A\in\Omega$. Do đó, ta có $T^{\otimes}_{(K,\mu)}(\underline{a}_X)(y)\le a$. Vậy, việc chứng minh phần (i) của định lý được hoàn thành.

Tiếp theo từ giả thuyết (ii) của định lý, tức là với $A\in\Omega$ thỏa mãn $A\subseteq X\setminus \text{Core}\left(K_y\right)$. Khi đó, ta có

$$\mu(A)\le a.$$

Vì $Core\left(K_y\right)\neq\varnothing$ nên $X\not\subseteq X\setminus Core\left(K_y\right)$. Do đó,

$$\begin{aligned}
T^{\multimap}_{(K,\mu)}(\underline{a}_X)(y) &= \int K(x,y)\multimap \underline{a}_X(x)d\mu \\
&= \bigvee_{\substack{A\in\Omega\\ A\not\subseteq X\setminus \text{Core}\left(K_y\right)}}\left(\mu(A)\otimes \wedge_{x\in A}\left(K(x,y)\multimap a\right)\right) \\
&\vee \bigvee_{\substack{A\in\Omega\\ A\subseteq X\setminus \text{Core}\left(K_y\right)}}\left(\mu(A)\otimes \wedge_{x\in A}\left(K(x,y)\multimap a\right)\right) \\
&\le \bigvee_{\substack{A\in\Omega\\ A\not\subseteq X\setminus \text{Core}\left(K_y\right)}}\left(a\otimes\mu(A)\right)\vee \bigvee_{\substack{A\in\Omega\\ A\subseteq X\setminus \text{Core}\left(K_y\right)}}\mu(A) \\
&\le \left(a\otimes \bigvee_{\substack{A\in\Omega\\ A\not\subseteq X\setminus \text{Core}\left(K_y\right)}}\mu(A)\right)\vee a \\
&= \left(a\otimes\mu(X)\right)\vee a = a.
\end{aligned}$$

Ở đây, ta sử dụng tính chất phân phối của phép toán $\otimes$ với phép $\vee$ và với mọi $A\not\subseteq X\setminus Core\left(K_y\right)$ ta có biểu thức $\wedge_{x\in A}\left(K(x,y)\multimap a\right)=a$, điều này chỉ ra trong thực tế rằng $K(x,y)=1$ với mọi $x\in A$, $1\multimap a=a$ và $b\multimap a\ge a$ với mọi $b\in L$ và cuối cùng là giả thuyết $\mu(A)\le a$ với mọi $A\in T$ sao cho $A\subseteq X\setminus Core\left(K_y\right)$.

Để chứng minh cho chiều ngược lại, ta có

$$\begin{aligned}
T^{\multimap}_{(K,\mu)}(\underline{a}_X)(y) &\ge \wedge_{x\in X}K(x,y)\multimap \underline{a}_X(x) \\
&= \wedge_{x\in X}\left(K(x,y)\multimap a\right)=a.
\end{aligned}$$

Do đó, phần (ii) của định lý được chứng minh xong.

Chú ý: *Để thuận tiện cho việc kí hiệu và gọi tên trong các phần tiếp theo của bài báo, chúng tôi sử dụng ký hiệu: (C1) để chỉ rằng (K,μ) thỏa điều kiện định lý 5(i) và kí hiệu (C2) để chỉ rằng (K,μ) thỏa điều kiện định lý 5(ii).*

Với mục đích cần sử dụng các loại độ đo mờ thích hợp trong việc xấp xỉ hàm số bằng phép biến đổi tích phân mờ ở phần chính của bài báo, định lý tiếp theo chỉ ra một sự thỏa mãn điều kiện (C1) và (C2) tương ứng với độ đo mờ μ và độ đo liên hợp $\mu^{c,\neg}$ của μ.

Định lý 6. *Cho (X,Ω,μ) là không gian độ đo, K là hàm hạt nhân tích phân. Khi đó,*

i. Nếu (K,μ) thỏa (C1) thì $(K,\mu^{c,\neg})$ thỏa điều kiện (C2);

ii. Nếu (K,μ) thỏa (C2) và $Core\left(K_y\right)\in\Omega$ với mọi $y\in Y$ thì $(K,\mu^{c,\neg})$ thỏa điều kiện (C1).

Chứng minh. Đầu tiên, chúng tôi chứng minh phần (i). Giả sử (K,μ) thỏa điều kiện (C1) và với mọi $y\in Y$, $A\in\Omega$ thỏa mãn $A\subseteq X\setminus Core\left(K_y\right)$. Từ giả thuyết, ta có tồn tại $A_y\in\Omega$ sao cho $A_y\subseteq Core\left(K_y\right)$ và $\mu\left(A_y\right)=1$. Do đó, ta có được các biểu thức: $A_y\subseteq Core\left(K_y\right)\subseteq X\setminus A$ và $1=\mu\left(A_y\right)\le\mu\left(X\setminus A\right)$ Từ đây, ta suy ra được

$$\mu^c(A)=\neg\left(\mu\left(X\setminus A\right)\right)=\neg 1=0.$$

Vậy, $(K,\mu^{c,\neg})$ thỏa điều kiện (C2).

Chứng minh phần (ii), giả sử rằng (K,μ) thỏa (C2). Với mọi $y\in Y$, ta đặt $A_y\subseteq Core\left(K_y\right)\in\Omega$. Khi đó, ta có được $X\setminus A_y\subseteq X\setminus Core\left(K_y\right)$ và từ giả thuyết ta có $\mu\left(X\setminus A_y\right)=0$. Do đó, ta có được

$$\mu^{c,\neg}\left(A_y\right)=\neg\left(\mu\left(X\setminus A_y\right)\right)=\neg 0=1.$$

Vậy, $\mu^{c,\neg}$ thỏa điều kiện (C1). Toàn bộ định lý đã được chứng minh xong.

Trong phần tiếp theo, ví dụ minh họa cho phép biến đổi tích phân mờ sẽ được trình bày. Chú ý rằng, trong tất cả các trường hợp của ví dụ, hàm hạt nhân tích phân K và độ đo mờ μ được chọn sao cho (K,μ) thỏa mãn điều kiện (C1) tương ứng với phép

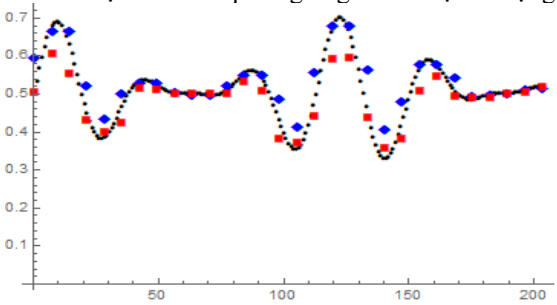
toán $\otimes$ và theo định lý 13 thì ta có $\left(K,\mu^{c,\neg}\right)$ thỏa mãn điều kiện (C2) tương ứng với phép toán $\multimap$.

Ví dụ 6. Giả sử L là đại số Lukasiewicz trên $[0,1]$ trong công thức (2). Cho tập $X=\{1,2,3,...,204\}$ và tập con $Y=\{1,8,15,...,204\}$ của X với các phần tử của Y được chọn sao cho khoảng cách giữ các phần tử trong Y sai khác nhau là 7 đơn vị tính. Cho hàm số $f:X\to[0,1]$ xác định bởi công thức:

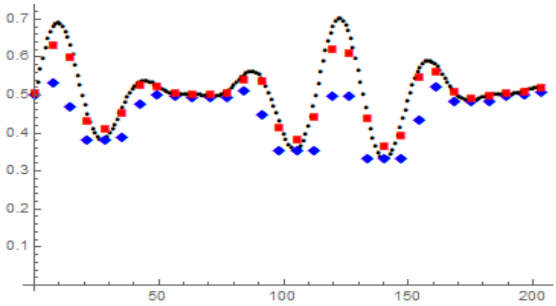
$$f(x)=0,2.\cos\left(\frac{x}{40}\right)^2.\sin\left(\frac{x}{6}\right)+0.5 \quad (7)$$

với mọi $x\in X$. Trong ví dụ này, hai trường hợp minh họa cho phép biến đổi tích phân mờ với sự ảnh hưởng khác nhau của hai tham số là hàm hạt nhân tích phân và độ đo mờ đã được trình bày.

a. *Trường hợp 1*: Hai loại độ đo mờ khác nhau và hàm hạt nhân tích phân giống nhau được sử dụng.



a) $T^{\otimes}_{(K,\mu_1)}(f)$ (xanh) và $T^{\otimes}_{(K,\mu_2)}(f)$ (đỏ).



b) $T^{\multimap}_{(K,\mu_1)}(f)$ (xanh) và $T^{\multimap}_{(K,\mu_2)}(f)$ (đỏ).

Hình 2. Phép biến đổi tích phân mờ sử dụng một hàm hạt nhân tích phân K và hai độ đo mờ μ_1, μ_2 khác nhau

Hình 2b biểu diễn phép biến đổi tích phân mờ $T^{\multimap}_{(K,\mu)}$ của hàm f với hàm hạt nhân K và hai loại độ đo μ_1, μ_2 khác nhau.

Trường hợp 2. Ta xét hai hàm hạt nhân tích phân khác nhau là:

$$K_1(x,y)=\begin{cases}1, & |x-y|\le 10;\\ 0.8, & |x-y|\in\{11,12,13\};\\ 0.6, & |x-y|\in\{14,15\};\\ 0.4, & |x-y|\in\{16,17\};\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

và

b. *Trường hợp 2*: Hai loại hàm hạt nhân khác nhau và độ đo mờ giống nhau được sử dụng.

Khi đó:

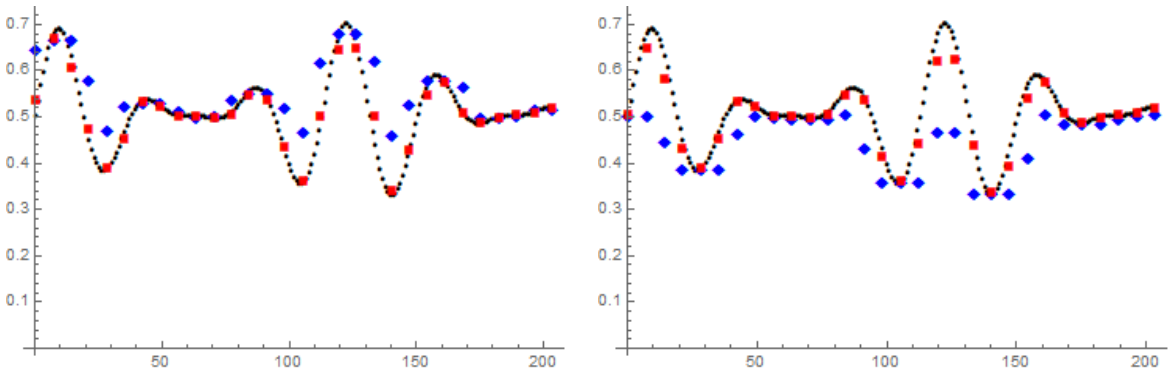
Trường hợp 1. Ta xét chỉ một loại hàm hạt nhân tích phân $K:X\times Y\to[0,1]$ được cho bởi công thức:

$$K(x,y)=\begin{cases}1, & |x-y|\le 8;\\ 0.8, & |x-y|\in\{9,10\};\\ 0.6, & |x-y|\in\{11,12\};\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

và ta xét hai loại độ đo mờ khác nhau là: $\mu_1=\mu^5_{2,6}=\varphi_{0.08,0.24}$ và $\mu_2=\mu^5_{7,12}=\varphi_{0.28,0.48}$ trên không gian $\left(X,P(X)\right)$. Khi đó, Hình 2a biểu diễn phép biến đổi tích phân mờ $T^{\otimes}_{(K,\mu)}$ của f với một hàm hạt nhân K và hai loại độ đo μ_1, μ_2 khác nhau.

$$K_2(x,y)=\begin{cases}1, & |x-y|\le 4;\\ 0.9, & |x-y|\in\{5,6\};\\ 0.7, & |x-y|\in\{7\};\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

và ta xét chỉ một độ đo mờ $\mu=\mu^5_{2,6}=\varphi_{0.08,0.24}$ trên không gian $\left(X,P(X)\right)$. Khi đó, Hình 3a biểu diễn phép biến đổi tích phân mờ $T^{\otimes}_{(K,\mu)}$ của hàm f với hai hàm hạt nhân khác nhau K_1, K_2 và cùng một loại độ đo μ. Hình 3b biểu diễn phép biến đổi tích phân mờ $T^{\multimap}_{(K,\mu)}$ của hàm f với hai hàm hạt nhân khác nhau K_1, K_2 và cùng một loại độ đo μ.



a) $T^{\otimes}_{(K_1,\mu)}(f)$ (xanh) và $T^{\otimes}_{(K_2,\mu)}(f)$ (đỏ). b) $T^{\multimap}_{(K_1,\mu)}(f)$ (xanh) và $T^{\multimap}_{(K_2,\mu)}(f)$ (đỏ).

Hình 3. Phép biến đổi tích phân mờ sử dụng hai hàm hạt nhân K_1, K_2 khác nhau và cùng một độ đo mờ μ.

4. XẤP XỈ HÀM SỐ VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN MỜ

4.1. Hàm hạt nhân tích phân ngược

Cho $K: X\times Y\to L$ và $K': Y\times X\to L$ là hai hàm hạt nhân tích phân. Chúng ta giới thiệu một loại hàm hạt nhân tích phân mới trên X nhằm diễn đạt mối quan hệ giữa K và K'.

Định nghĩa 12. Một hàm hạt nhân tích phân $Q: X\times X\to L$ được gọi là *tương thích với* K và K', kí hiệu (K,K')- tương thích, nếu với mọi cặp $x,z\in X$ và $y\in Y$ sao cho biểu thức sau đây thỏa mãn:

$$Q(x,z)\otimes K'(y,z)\le K(x,y) \quad (16)$$

Tiếp theo là khái niệm hàm hạt nhân tích phân ngược có liên quan đến khái niệm hàm hạt nhân tích phân tương thích Q trên X được giới thiệu. Đây là khái niệm quan trọng sử dụng xấp xỉ hàm số mà chúng tôi sẽ trình bày trong phần sau của bài báo.

Định nghĩa 11. Cho $Q: X\times X\to L$ và $K: X\times Y\to L$ là các hàm hạt nhân tích phân. Hàm hạt nhân tích phân $K': Y\times X\to L$ được gọi là *hàm hạt nhân tích phân $Q-$ngược* của K nếu

$$Q(x,z)=\bigwedge_{y\in Y} K'(y,z)\multimap K(x,y) \quad (17)$$

với mọi $x,z\in X$

Định lý 7. Cho K là hàm hạt nhân tích phân và K^{-1} là hàm hạt nhân tích phân $Q-$ngược của K. Giả sử rằng K là hàm hạt nhân tích phân ngược $P-$ngược của K^{-1} với P là hàm hạt nhân tích phân trên Y. Nếu Q và P có quan hệ phản xạ mờ thì $K^{-1}=K^T$.

Chứng minh. Do Q là (K,K^{-1})-tương thích và phản xạ, ta có

$$T=Q(x,x)\le \bigwedge_{y\in Y} K^{-1}(y,x)\multimap K(x,y)$$

Với mọi $x\in X$, ta suy ra $K^{-1}(y,x)\le K(x,y)$ với mọi $x\in X$ và $y\in Y$, tức là ta có $K^T\le K^{-1}$. Tương tự, ta có

$$T=P(y,y)\le \bigwedge_{x\in X} K(x,y)\multimap K^{-1}(y,x)$$

Với mọi $y\in Y$, ta suy ra $K(x,y)\le K^{-1}(y,x)$ với mọi $x\in X$ và $y\in Y$, tức là ta có $K^T\le K^{-1}$. Do đó, ta có được $K^{-1}=K^T$. Định lý được chứng minh xong.

Nhận xét: Định lý 7 cho thấy rằng khi ta có $K^{-1}=K^T$ với điều kiện K và K^{-1} là nghịch đảo qua lại lẫn nhau đối với các hàm hạt nhân tích phân phản xạ Q và P. Đây là một điều kiện hoàn toàn tự nhiên mà ta áp dụng cho các hạt nhân tích phân trong lý thuyết cổ điển của phép biến đổi tích phân.

4.2. Xấp xỉ hàm số

Trong phần này, chúng tôi giả sử rằng (X,Ω,μ_X) và (Y,Ψ,μ_Y) là các không gian độ đo, $K: X\times Y\to L$ là hàm hạt nhân tích phân và $K^{-1}: Y\times X\to L$ là hàm hạt nhân tích phân $Q-$ngược của K trong đó Q là hàm hạt nhân tích phân trên X thỏa công thức (17).

Phần tiếp theo là định lý xấp xỉ từ phía trên của hàm gốc sử dụng sự kết hợp của hai phép biến đổi tích phân $(K,\mu,*)$ trong định nghĩa 10 được trình bày.

Định lý 8. *Cho* $T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}$ *là phép biến* đổi tích phân từ $F(X)$ vào $F(Y)$ và cho $T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)}$ là phép biến đổi tích phân từ $F(Y)$ vào $F(X)$. Khi đó,

$$T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}(f) \geq T^{\otimes}_{(Q,\mu_X)}(f) \quad (20)$$

Chứng minh. Xuất phát từ định nghĩa của phép biến đổi tích phân. Với mọi $f \in \Omega$ và $z \in X$, ta có

$$\begin{aligned}
&T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}(f)(z) \\
&= \int_Y \left(K^{-1}(y,z) \multimap T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}(f)(y)\right) d\mu_Y \\
&= \int_Y \left(K^{-1}(y,z) \multimap \int_X K(x,y) \otimes f(x) d\mu_X \right) \\
&\geq \int_Y \Big(\int_X \big(\underline{K^{-1}(y,z)}_X (x) \multimap \left(K(x,y) \otimes f(x)\right) d\mu_X \big) d\mu_Y \\
&\geq \int_Y \Big(\int_X \big(\underline{K^{-1}(y,z)}_X (x) \multimap K(x,y) \otimes f(x) \big) d\mu_X \Big) d\mu_Y \\
&\geq \int_Y \underline{\left(\int_X Q(x,z) \otimes f(x) d\mu_X \right)}_Y (y) d\mu_Y \\
&= \int_X Q(x,z) \otimes f(x) d\mu_X = T^{\otimes}_{(Q,\mu_X)}(f)(z).
\end{aligned}$$

Để giúp người đọc có thể hiểu rõ hơn, chúng tôi đã giải thích các tính chất đã được dùng trong quá trình chứng minh. Ở đây, tính chất trong L được sử dụng $a \multimap (b \otimes c) \geq b \otimes (a \multimap c)$, hàm hạt nhân tích phân $K^{-1}(y,z)$ là hàm hằng đối với tích phân $\int_X$ và hàm Q là hàm hạt nhân tích phân (K, K^{-1})- tương thích, tức là ta có

$$\begin{aligned}
&\underline{K^{-1}(y,z)}_X (x) \multimap K(x,y) \\
&= K^{-1}(y,z) \multimap K(x,y) \geq Q(x,z)
\end{aligned}$$

với mọi $x,z \in X$ và $\underline{\left(\int_X Q(x,z) \otimes f(x) d\mu_X \right)}_Y$

là một hàm hằng trên không gian Y với tích phân $\int_Y$. Do đó, định lý được chứng minh xong.

Tương tự định lý 8, ta có định lý xấp xỉ hàm số từ phía dưới sự dụng sự kết hợp của hai phép biến đổi tích phân mờ và được trình bày tiếp theo.

Định lý 9. *Cho* $T^{\multimap}_{(K,\mu_X)}$ là phép biến đổi tích phân từ $F(X)$ vào $F(Y)$ và $T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y)}$ là phép biến đổi tích phân từ $F(Y)$ vào $F(X)$. Khi đó,

$$T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\multimap}_{(K,\mu_X)}(f) \leq T^{\multimap}_{(Q,\mu_X)}(f) \quad (21)$$

Chứng minh. Từ định nghĩa của phép biến đổi tích phân mờ, ta có:

$$\begin{aligned}
&T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\multimap}_{(K,\mu_X)}(f)(z) \\
&= \int_Y K^{-1}(y,z) \otimes T^{\multimap}_{(K,\mu_X)}(f)(y) d\mu_Y \\
&= \int_Y K^{-1}(y,z) \otimes \left(\int_X \left(K(x,y) \multimap f(x)\right) d\mu_X \right) d\mu_Y \\
&\leq \int_Y \Big(\int_X \underline{K^{-1}(y,z)}_X (x) \otimes \left(K(x,y) \multimap (x)\right) d\mu_X \Big) d\mu_Y \\
&\leq \int_Y \Big(\int_X \underline{K^{-1}(y,z)}_X (x) \otimes \left(K(x,y) \multimap (x)\right) d\mu_X \Big) d\mu_Y \\
&\leq \int_Y \Big(\int_X \underline{\left(\left(K^{-1}(y,z)\right) \right)}_X (x) \multimap K(x,y) \multimap \\
&\quad K(x,y) \otimes \left(K(x,y) \multimap f(x)\right) d\mu_X \Big) d\mu_Y \\
&\leq \int_Y \Big(\int_X \Big(\underline{\left(K^{-1}(y,z) \right)}_X (x) \multimap K(x,y) \Big) \\
&\qquad \multimap f(x) d\mu_X \Big) d\mu_Y \\
&= \int_Y \underline{\left(\int_X Q(x,z) \multimap f(x) d\mu_X \right)}_Y (y) d\mu_Y \\
&= \int_X Q(x,z) \multimap f(x) d\mu_X = T^{\multimap}_{(Q,\mu_X)}(f)(z).
\end{aligned}$$

Trong quá trình chứng minh, một số tính chất trên đại số L được sử dụng như là: $a \leq (a \multimap b) \multimap b$ và $(a \multimap b) \otimes (b \multimap c) \leq a \multimap c$, hàm Q là hàm hạt nhân tích phân (K, K^{-1})- tương thích và ta có hàm

hằng số $\underline{\left(\int_X Q(x,z) \multimap f(x) d\mu_X\right)}_Y$ trên Y với tích phân $\int_Y$. Do đó, định lý đã được chứng minh xong.

Để so sánh kết quả của hàm xấp xỉ với hàm gốc ban đầu, chúng tôi sử dụng hệ quả được trình bày sau đây.

Hệ quả 1. Với mọi $f \in F(X)$ và $y \in X$, ta có

i. $T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}(f)(y) \geq \int_X f \otimes 1_{Core(Q_y)} d\mu_X$

ii. $T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}(f)(y) \leq \int_X 1_{Core(Q_y)} \multimap f \, d\mu_X$

Chứng minh. Cho $\Delta : L \to L$ được xác định như sau:

$$\Delta(a) = \begin{cases} 1, & a = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Hơn nữa, định nghĩa $\Delta Q : X \times X \to L$ thỏa $\Delta Q(x,y) = \Delta(Q(x,y))$ với mọi $x, y \in X$. Rõ ràng, ta có $\Delta Q \leq Q$.

(i) Với mọi $y \in Y$, ta có

$$T^{\otimes}_{(Q,\mu)}(f)(y) = \int_X Q(x,y) \otimes f(x) d\mu_X$$

$$\geq \int_X \Delta Q(x,y) \otimes f(x) d\mu_X = \int_X f(x) \otimes 1_{Core(Q_y)} d\mu_X.$$

Ở đây, tính chất đơn điệu không giảm đối với cả hai biến của phép toán $\otimes$ được sử dụng.

(ii) Với mọi $y \in Y$, ta có

$$T^{\multimap}_{(Q,\mu_X)}(f)(y) = \int_X Q(x,y) \multimap f(x) d\mu_X$$

$$\leq \int_X \Delta Q(x,y) \multimap f(x) d\mu_X = \int_X 1_{Core(Q_y)} \multimap f(x) d\mu_X.$$

Ở đây, chúng tôi sử dụng tính chất của phép toán $\multimap$ là hàm đơn điệu không tăng với biến thứ nhất. Do đó, hệ quả đã được chứng minh xong.

Hệ quả 2. *Cho K là hàm* hạt nhân tích phân và cho K^{-1} là hàm hạt nhân tích phân $Q-$ngược của K sao cho Q hàm hạt nhân tích phân phản xạ. Khi đó, với mọi $f \in F(X)$, ta có:

$$T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y^T)} \circ T^{\multimap}_{(K,\mu_Y^{\perp})}(f) \leq f \leq T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y^{\perp})} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_Y^T)}(f)$$

Chứng minh. Từ hệ quả 1(i), ta có:

$$T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y^T)} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_X^{\perp})}(f)(y) \geq \int_X f \otimes 1_{Core(Q_y)} d\mu_X^T$$

$$= \bigvee_{A \in T} \left(\bigwedge_{x \in A} f(x) \otimes 1_{Core(Q_y)}(x) \right) \otimes \mu_X^T(A)$$

$$= \bigvee_{x \in Core(Q_y)} f(x) \geq f(y).$$

Ở đây, chúng tôi dùng tính phản xạ của hàm Q và suy ra $y \in Core(Q_y)$. Do đó, ta chứng minh được bất phương trình (i). Tương tự, từ hệ quả 1(ii), ta có

$$T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y^T)} \circ T^{\multimap}_{(K,\mu_X^{\perp})}(f)(y) \leq \int_X 1_{Core(Q_y)} \multimap f d\mu_X^{\perp}$$

$$= \bigvee_{A \in T} \left(\bigwedge_{x \in A} 1_{Core(Q_y)}(x) \right) \otimes \mu_X^{\perp}(A)$$

$$= \bigwedge_{x \in Core(Q_y)} f(x) \leq f(y).$$

Ở đây, chúng tôi đã sử dụng $y \in Core(Q_y)$ và tính chất $1 \multimap a = a$. Do bất phương trình (ii) được chứng minh xong.

5. VÍ DỤ MINH HỌA

Trong phần này, một ví dụ minh họa cho phương pháp xấp xỉ hàm số bằng cách kết hợp hai phép biến đổi tích phân mờ $T^{\otimes}_{(K,\mu)}$ và $T^{\multimap}_{(K,\mu)}$ được trình bày. Chúng tôi đã sử dụng đúng các kí hiệu và tham số đã sử dụng trong phép biến đổi tích phân trực tiếp ở ví dụ 6 và hàm gốc f được cho như trong công thức (4). Chúng tôi xấp xỉ hàm gốc f từ hàm trong phép biến đổi trực tiếp $T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}(f)$ và $T^{\multimap}_{(K,\mu_X)}(f)$ là kết quả của Ví dụ 6. Trước khi đi vào chi tiết, chúng tôi đã giới thiệu tương tự hai phép biến đổi tích phân mờ từ $F(Y)$ vào $F(X)$ là $T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y)}(f)$ và $T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)}(f)$. Trong đó, $K^1 : Y \times X \to L$ là hàm hạt nhân tích phân ngược $Q-$tương thích thỏa $K^{-1} = K^T$ và μ_Y là độ đo tích phân trên không gian độ đo $(Y, P(Y))$ sao cho (K^{-1}, μ_Y) thỏa điều kiện (C1) với $* = \otimes$ và theo định lý 6 thì $(K^{-1}, \mu_Y^{\neg,c})$

thỏa điều kiện (C2) với $* = \multimap$. Do đó, cả hai phép biến đổi tích phân mờ từ $F(X)$ vào $F(Y)$ và từ $F(Y)$ và $F(X)$ đều đảm bảo được sự bảo toàn phép biến đổi của hàm hằng theo định lý 5.

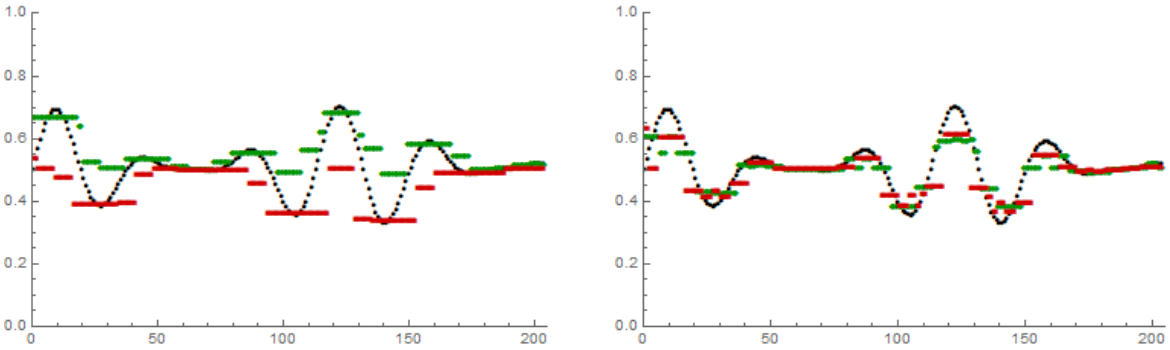
Tiếp theo, chúng tôi xét hai trường hợp giống như trong ví dụ 6. Tức là:

Trường hợp 1: Hai loại độ đo mờ khác nhau và hàm hạt nhân tích phân giống nhau được sử dụng.

Trường hợp 2: Hai loại hàm hạt nhân khác nhau và độ đo mờ giống nhau được sử dụng.

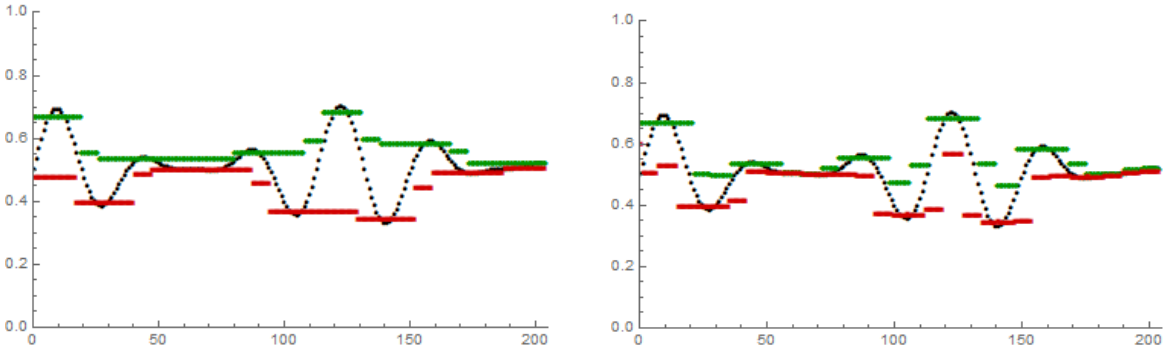
Khi đó:

Trường hợp 1. Hàm hạt nhân tích phân K và hai loại độ đo mờ μ_1 và μ_2 trên không gian $(X, P(X))$ được sử dụng giống trong ví dụ 6(a). Trên không gian $(Y, P(Y))$, chúng tôi sử dụng hàm hạt nhân tích phân ngược là $K^1 = K^T$ và độ đo mờ $\mu_Y = \mu_{1,2}^5$. Khi đó, Hình 4 minh họa cho hàm xấp xỉ sử dụng sự kết hợp của hai phép biến đổi tích phân mờ $T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}$ (xanh) là xấp xỉ trên trong định lý 8 và $T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\multimap}_{(K,\mu_X)}$ (đỏ) là xấp xỉ phía dưới trong định lý 9.



a) Hàm hạt nhân K và độ đo μ_1. b) Hàm hạt nhân K và độ đo μ_2.

Hình 4. Xấp xỉ hàm số với sự kết hợp của hai phép biến đổi tích phân $T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}$ (xanh) và $T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\multimap}_{(K,\mu_X)}$ (đỏ)



a) Hàm hạt nhân K_1 và độ đo μ. b) Hàm hạt nhân K_2 và độ đo μ.

Hình 5. Xấp xỉ hàm số với sự kết hợp của hai phép biến đổi tích phân $T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}$ (xanh) và $T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\multimap}_{(K,\mu_X)}$ (đỏ)

Trường hợp 2. Xét hai hàm hạt nhân tích phân K_1 và K_2 và độ đo μ trên không gian $(X, P(X))$ được sử dụng giống trong ví dụ 6(b). Trên không gian $(Y, P(Y))$, chúng tôi sử dụng hàm hạt nhân tích phân ngược là $K^1 = K^T$ và độ đo mờ $\mu_Y = \mu_{1,2}^5$. Khi đó, Hình 5 minh họa cho hàm xấp xỉ sử dụng sự kết hợp của hai phép biến đổi tích phân mờ $T^{\multimap}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\otimes}_{(K,\mu_X)}$ (xanh) là xấp xỉ trên trong Định lý

8 và $T^{\otimes}_{(K^{-1},\mu_Y)} \circ T^{\multimap}_{(K,\mu_X)}$ (đỏ) là xấp xỉ phía dưới trong định lý 9.

Nhận xét: *Trong cả hai trường hợp của ví dụ nêu trên, kết quả xấp xỉ của hàm thu được đều thoả mãn tính chất xấp xỉ trên theo Định lý 8 và xấp xỉ dưới theo đĐịnh lý 9. Tuy nhiên, tuỳ thuộc vào hình dạng của đồ thị hàm số ban đầu, ta có thể lựa chọn hàm hạt nhân tích phân hoặc độ đo mờ phù hợp nhằm đạt được kết quả xấp xỉ tối ưu. Qua đó có thể thấy rằng hai tham số là hàm hạt nhân tích phân và độ đo mờ giữ vai trò hết sức quan trọng trong phương pháp này, đồng thời ảnh hưởng trực tiếp đến chất lượng của kết quả xấp xỉ.*

6. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, một phép biến đổi tích phân mờ dựa trên phép nhân trong tập lưới dư thứ tự đầy đủ đã được giới thiệu; đồng thời, các tính chất cơ bản của phép biến đổi này cũng đã được khảo sát. Các điều kiện cần đối với hàm hạt nhân tích phân và độ đo mờ được thiết lập nhằm đảm bảo tính bất biến của hàm hằng qua phép biến đổi. Trọng tâm của bài báo là nghiên cứu xấp xỉ hàm nhận giá trị trong tập lưới dư thứ tự đầy đủ thông qua sự kết hợp của hai phép biến đổi tích phân mờ tương ứng. Vai trò của hàm hạt nhân tích phân trên tập xác định của hàm gốc được làm rõ trong việc đánh giá chất lượng xấp xỉ. Trong trường hợp đặc biệt, với lựa chọn thích hợp của hàm hạt nhân và độ đo mờ, phép biến đổi tích phân mờ suy biến thành phép biến đổi mờ. Phương pháp xấp xỉ được minh hoạ bằng các ví dụ cụ thể, cho thấy độ chính xác xấp xỉ phụ thuộc chủ yếu vào hàm hạt nhân tích phân và độ đo mờ**.**

Kết quả bài báo mới đề xuất phương pháp xấp xỉ dựa trên sự kết hợp của hai phép biến đổi tích phân mờ. Vì vậy việc xây dựng công cụ đo lường phù hợp với cấu trúc tập lưới dư thứ tự đầy đủ để đánh giá định lượng sai lệch giữa hàm xấp xỉ và hàm gốc là hướng nghiên cứu tiếp theo**.**

LỜI CẢM TẠ

Đề tài nghiên cứu được tài trợ bởi Đề tài nghiên cứu khoa học cấp cơ sở năm 2025 của Đại học Cần Thơ với số quyết định: 14T/HĐ-KHCNĐMST2025 và mã số đề tài: T2025-14. Tác giả xin được gửi lời cảm ơn chân thành đến Phòng Khoa học công nghệ và đổi mới sáng tạo cũng như Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ đã hỗ trợ và duyệt hồ sơ cho tác giả được thực hiện đề tài này. Ngoài ra, tác giả cũng xin được gửi lời cảm ơn đến các đồng nghiệp tại Khoa Toán học - Trường Khoa học Tự nhiên đã nhiệt tình hỗ trợ tác giả trong quá trình thực hiện đề tài gồm có: ThS. Đặng Hoàng Tâm, ThS. Nguyễn Tử Thịnh và TS. Lâm Hoàng Chương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bělohlávek, R. (2002). *Fuzzy Relational Systems: Foundations and Principles*. Kluwer Academic Publishers, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-0633-1

Debnath, L., & Bhatta, D. (1914). *Integral Transforms and Their Applications.* CRC Press, New York. https://doi.org/10.1201/9781420010916

Dubois, D., Prade, H., & Rico, A. (2016). Residuated Variants of Sugeno Integrals: Towards New Weighting Schemes for Qualitative Aggregation Methods. *Information Sciences*, 329, 765–781. https://doi.org/10.1016/j.ins.2015.09.034

Dvořák, A., & Holčapek, M. (2012). Fuzzy Measures and Integrals Defined on Algebras of Fuzzy Subsets over Complete Residuated Lattices. *Information Sciences*, *185*(1), 205–229. https://doi.org/10.1016/j.ins.2011.08.017

Holčapek, M., & Viec, B.Q. (2020). Integral Transforms on Spaces of Complete Residuated Lattice Valued Functions. In *Proceedings of IEEE World Congress on Computational Intelligence (WCCI) 2020,* (pp. 1–8). IEEE. https://doi.org/10.1109/FUZZ48607.2020.9177783

Klement, E., Mesiar, R., & Pap, E. (2000). *Triangular Norms, Trends in Logic* (vol.8). Kluwer Academic Publishers,

Perfilieva, I. (2006). Fuzzy Transforms: Theory and Applications. *Fuzzy Sets Syst*, *157*(8), 993–1023. https://doi.org/10.1016/j.fss.2005.11.012

Sugeno, M. (1974). *Theory of Fuzzy Integrals and Its Applications* (PhD Thesis). Tokyo Institute of Technology.

Tenoudji, F.C. (2016). *Analog and Digital Signal Analysis: From Basics to Applications*. Springer, Switzerland. https://doi.org/10.1007/978-3-319-42382-1