

DOI:10.22144/ctujos.2026.159

KẾT QUẢ SỐ CỦA HÀM GREEN TRONG BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN MỘT CHIỀU VÀ HAI CHIỀU

Lê Huỳnh Trung Kiên¹, Lê Duyên Ái¹, Phạm Gia Kỳ¹, Nguyễn Hữu Giang¹, Bùi Thị Huỳnh Mi¹, Lâm Hoàng Chương² và Lê Hoài Nhân^{2*}

¹Sinh viên ngành Toán ứng dụng Khóa 48, Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

²Khoa Toán học, Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

*Tác giả liên hệ (Corresponding author): lhnhan@ctu.edu.vn

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 15/12/2025

Sửa bài (Revised): 30/12/2025

Duyệt đăng (Accepted): 05/07/2026

Title: Numerical results for Green's functions of one- and two-dimensional simple random walks

Author(s): Le Huynh Trung Kien¹, Le Duyen Ai¹, Pham Gia Ky¹, Nguyen Huu Giang¹, Bui Thi Huynh Mi¹, Lam Hoang Chuong² and Le Hoai Nhan^{2*}

Affiliation(s): ¹Applied Mathematics Student (48th Cohort), School of Natural Sciences, Can Tho University, Vietnam; ²Department of Mathematics, College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam

TÓM TẮT

Trong bài báo này, việc chứng minh công thức tổng quát và các tính chất cơ bản của hàm Green trên tập hữu hạn đối với bước đi ngẫu nhiên đơn giản trong một chiều và hai chiều đã được tập trung thực hiện. Trên cơ sở mối liên hệ giữa hàm Green và phân phối xác suất thoát, công thức hàm Green thu được đã diễn giải rõ ràng về mặt ý nghĩa như kỳ vọng số lần ghé thăm trước khi thoát khỏi miền. Cuối cùng, một vấn đề đối với tập A gồm 3 điểm trên lưới hai chiều được đặt ra và giải quyết thông qua việc tính toán ma trận và giải hệ phương trình tuyến tính.

Từ khóa: Bước đi ngẫu nhiên, định lý lựa chọn dừng, hàm Green, hàm hạt nhân thế, kết quả số

ABSTRACT

In this paper, we focus on proving the general formula and properties of the Green function on a finite set for the one-dimensional and two-dimensional simple random walk. Based on the connection between the Green function and the exit distribution, the resulting Green function formula admits a clear probabilistic interpretation as the expected number of visits before the walk exits the domain. Finally, we pose and solve a problem for a three-point set A on the two-dimensional lattice, using matrix computations and the solution of a linear system.

Keywords: Green function, numerical results, optional sampling theorem, potential kernel, random walks

1. GIỚI THIỆU

Bước đi ngẫu nhiên đơn giản một chiều và hai chiều là những mô hình cơ bản của xác suất rời rạc, có lịch sử gắn liền với những đóng góp đầu tiên của Pearson (1905) khi ông nêu ra bài toán “random walk” trong tự nhiên và sau đó là công trình kinh điển của Pólya (1921). Theo đó, một bước đi ngẫu nhiên đơn giản trên Z^d là

$$S_n = x + X_1 + X_2 + \cdots + X_n,$$

với X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối lấy giá trị trên Z^d , $P(X_i = e) = \frac{1}{2d}$ trong đó $|e| = 1$. Một bài toán được quan tâm đối với bước đi ngẫu nhiên đơn giản là số lần ghé thăm y từ điểm x trong n bước, tức là $\sum_{k=0}^n P^x(S_k = y)$, khi $n \rightarrow \infty$, ta gọi đó là bài toán hồi quy (recurrence). Pólya (1921) đã chứng minh định lý nổi tiếng về tính quy hồi: bước đi ngẫu nhiên đơn giản trên Z (một chiều)

và Z^2 (hai chiều) gần như chắc chắn quay lại vị trí ban đầu vô hạn lần, trong khi ở các chiều cao hơn ($d \geq 3$) thì có xác suất dương để không bao giờ trở lại điểm gốc. Chen et al. (2022), Doyle & Snell (1984), Kozma & Popov (2021) và Lyons & Peres (2016) đã ứng dụng lý thuyết các quá trình ngẫu nhiên trên mạng và đồ thị.

Trong bối cảnh đó, hàm Green đóng vai trò then chốt. Với bước đi ngẫu nhiên đơn giản, một dạng hàm Green tại điểm $x \in Z^d$ được định nghĩa là

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = x).$$

Hàm Green đo số lần kỳ vọng mà bước đi ghé thăm một vị trí cụ thể, đồng thời gắn kết chặt chẽ với các khái niệm cốt lõi như xác suất quay lại, hạt nhân Markov và toán tử Laplace rời rạc. Trong khi với $d \geq 3$, $G(0)$ hữu hạn, nó phản ánh tính không hồi quy (transience) của bước đi ngẫu nhiên, thì trong một chiều và hai chiều, $G(0) = \infty$, phản ánh tính hồi quy. Vì vậy, với $d \leq 2$, người ta định nghĩa một hàm khác hữu hạn có liên quan đến số lần ghé thăm của S đến x . Hàm hạt nhân thế (potential kernel) được định nghĩa bởi Spitzer (2001) đã chỉ ra rằng trong trường hợp một chiều $a(x) = |x|$, trong trường hợp hai chiều $a(x)$ thỏa $\Delta a(x) = \delta(x)$, với Δ là toán tử Laplace rời rạc.

$$a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [P(S_n = 0) - P(S_n = x)].$$

Ngoài ra, theo Lawler and Limic (2010), hàm Green còn hai dạng khác:

i. Với $\lambda \in [0,1)$ và T là một biến ngẫu nhiên có phân phối hình học, độc lập với S và tỷ lệ bị giết (killing rate) $1 - \lambda$, hàm Green trong trường hợp này được định nghĩa là

$$G_{\lambda}(x, z) = \sum_{j=0}^T P^x(S_j = z), x, z \in A.$$

ii. Nếu $A \subset Z^d$ thì hàm

$$G_A(x, z) = \sum_{j=0}^{\infty} P^x(S_j = z, \tau > j), x, z \in A$$

Biểu thị kỳ vọng số lần ghé thăm của S tới z trước khi thoát khỏi A , xuất phát từ x , trong đó, τ là thời điểm mà S chạm đến biên của A lần đầu tiên, tức là

$$\tau = \inf \{j \geq 0: S_j \in \partial A\}.$$

Tất cả các hàm Green đều được ký hiệu là G . Do đó, chúng chỉ được phân biệt bởi các chỉ số dưới, tức là một số tự nhiên, một số thực dương nhỏ hơn 1, một tập hợp hay không có chỉ số.

Trong bài báo này, chúng tôi tập trung vào công thức và kết quả số của hàm $G_A(x, z)$, trong một chiều và hai chiều với A là một tập hữu hạn. Công thức của hàm Green cho bước đi ngẫu nhiên hai chiều và một chiều được trình bày trong định lý 3.2 và định lý 3.3. Ngoài ra, một ví dụ số cho một tập A hữu hạn trong Z^2 đã được đưa ra. Đây cũng là một ví dụ minh họa cho phương pháp tìm giá trị của $G_A(x, z)$.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Chúng tôi dùng định lý lựa chọn dùng (Optional Sampling Theorem) trong lý thuyết martingale xác định phân phối của S_{τ} từ đó dùng tính chất điều hòa của hạt nhân thế để suy ra biểu thức tổng quát của hàm $G_A(x, z)$. Cuối cùng, chúng tôi đưa ra kết quả số đối với hàm $G_A(x, z)$ với tập A .

Các định lý cơ bản được phát biểu như sau:

Định lý 2.1. (Durrett, 2019) Giả sử f là một hàm số bị chặn, điều hòa trên tập $A \subset Z^d$ và

$$\tau = \inf \{j \geq 0: S_j \in \partial A\}.$$

Khi đó, $M_n = f(S_n)$ là một martingale tương ứng với σ -đại số sinh bởi S .

Định lý 2.2. (Optional Sampling Theorem, Lawler et al. (2021)). Nếu $M_0, M_1, M_2, \dots$ là một martingale và T là một thời điểm dừng tương ứng với σ -đại số sinh bởi S thì quá trình $Y_n = M_{n \wedge T}$ là một martingale. Hơn nữa,

$$E[M_{T \wedge n}] = E[M_0].$$

Việc kết hợp hai định lý 2.1 và định lý 2.2 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.3. Nếu f là một hàm điều hòa trên A thì $M_n = f(S_{n \wedge \tau})$ là một martingale và

$$E^x[M_{T \wedge n}] = f(x).$$

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Ở phần này, một số định lý về công thức của hàm $H(x, y)$ đối với một tập A hữu hạn đã được đưa ra. Trên cơ sở đó, ta suy ra biểu thức của hàm Green $G_A(x, z)$ đối với tập hữu hạn trong một chiều và hai chiều. Cuối cùng, các kết quả thu được được vận dụng để đưa ra kết quả số của hàm Green trong bài toán biên của bước đi ngẫu nhiên hai chiều.

Đầu tiên, một định lý về công thức xác định của hàm $H(x, y)$ được đưa ra như sau:

Định lý 3.1. Cho $A \subset Z^d$. Ứng với mỗi $y \in \partial A$, hàm số $H(x, y) = P^x(S_\tau = y)$, $x \in A$ thỏa mãn phương trình

$$H(x, y) - \frac{1}{2d} \sum_{|z-x|=1} H(z, y) = \frac{1}{2d} \sum_{|z-x|=1} 1_{\{y\}}(z). \quad (1)$$

Chứng minh.

Sử dụng tính Markov mạnh, ta có

$$\begin{aligned} H(x, y) &= P^x(S_\tau = y) \\ &= \sum_{|z-x|=1} P^x(S_1 = z) P^x(S_\tau = y | S_1 = z) \\ &= \frac{1}{2d} \sum_{\substack{|z-x|=1 \\ z \in A}} H(z, y) + \frac{1}{2d} \sum_{\substack{|z-x|=1 \\ z \in \partial A}} H(z, y) \end{aligned}$$

Với $z \in \partial A$, ta có $H(z, y) = 1$ nếu $z = y$ và bằng 0 nếu $z \neq y$.

Từ đó

$$H(x, y) = \frac{1}{2d} \sum_{|z-x|=1} H(z, y) + \frac{1}{2d} \sum_{|z-x|=1} 1_{\{y\}}(z).$$

Từ việc chuyển vế, ta có điều phải chứng minh.

Tiếp theo, định lý 3.2 về công thức xác định $G_A(x, z)$ được chứng minh như sau:

Định lý 3.2. Cho tập $A \subset Z^d$, ($d = 1, 2$) là một tập hữu hạn. Khi đó, với mọi

$$G_A(x, z) = \left[\sum_{y \in \partial A} H(x, y) a(y - z) \right] - a(z - x).$$

Chứng minh.

Xét $h(x) = a(z - x)$ thỏa mãn

$$\Delta h(x) = \delta(z - x) \quad \forall x \in A \cup \partial A.$$

Khi đó

$$h(x) = E^x[h(S_\tau)] - E^x \left[\sum_{j=0}^{\tau-1} 1_{\{S_j=z\}} \right].$$

Từ đó ta có

$$G_A(x, z) = E^x[a(z - S_\tau)] - h(x)$$

Vì $a(x)$ là hàm chẵn nên ta có

$$\begin{aligned} E^x[a(z - S_\tau)] &= E^x[a(S_\tau - z)] \\ &= \sum_{y \in \partial A} P^x(S_\tau = y) a(y - z) \\ &= \sum_{y \in \partial A} H(x, y) a(y - z). \end{aligned}$$

Do vậy, ta có

$$G_A(x, z) = \sum_{y \in \partial A} H(x, y) a(y - z) - a(z - x)$$

Điều phải chứng minh.

Tiếp theo, kết quả về hàm Green cho tập $A = \{1, 2, \dots, n-1\} \subset Z$ được đưa ra.

Định lý 3.3. Hàm Green đối với tập

$A = \{1, 2, 3, \dots, n-1\} \subset Z$ được xác định bởi công thức

$$G_A(x, z) = 2 \min\{x, z\} \left(1 - \frac{\max\{x, z\}}{n} \right).$$

Chứng minh.

Với $A = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$, ta có $\partial A = \{0, n\}$.

Vì $a(x) = |x|$ trong trường hợp một chiều nên sử dụng kết quả định lý trên ta có

$$\begin{aligned} G_A(x, z) &= \left[\sum_{y \in \partial A} H(x, y) a(y - z) \right] - a(z - x) \\ &= H(x, 0)|0 - z| + H(x, n)|n - z| \\ &\quad - |z - x| \\ &= \left(1 - \frac{x}{n} \right) z + \frac{x}{n} (n - z) - |z - x|. \end{aligned}$$

Nếu $z \geq x$ ta có $G_A(x, z) = 2x \left(1 - \frac{z}{n} \right)$.

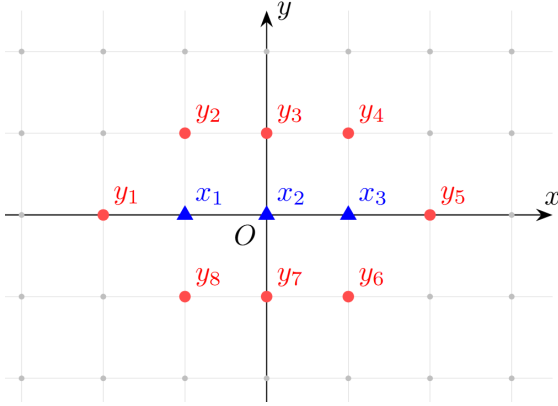
Nếu $z < x$ ta có $G_A(x, z) = 2z \left(1 - \frac{x}{n} \right)$.

Tóm lại

$$G_A(x, z) = 2 \min\{x, z\} \left(1 - \frac{\max\{x, z\}}{n} \right).$$

Cuối cùng, để minh họa cách vận dụng trực tiếp các định lý 3.1, định lý 3.2 và định lý 3.3 vào tính toán cụ thể, chúng tôi xét bài toán biên Dirichlet cho bước đi ngẫu nhiên đơn giản trên Z^2 .

Bài toán: Cho tập $A = \{x_1, x_2, x_3\} \subset \mathbb{Z}^2$ và $\partial A = \{y_1, \dots, y_8\}$ như trong hình vẽ. Ta cần tìm giá trị của $G_A(x, z)$ với $x \in A, z \in A$.



Từ phương trình (1), lần lượt cho x nhận các giá trị x_1, x_2, x_3 và y nhận các giá trị $y_1, y_2, \dots, y_8$ ta nhận được hệ phương trình sau:

$$(I - P)X = A,$$

trong đó I là ma trận đơn vị kích thước 3×3 ,

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

và

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hệ này có nghiệm là

$$H = \begin{pmatrix} \frac{15}{56} & \frac{1}{14} & \frac{1}{56} & \frac{1}{56} & \frac{1}{56} & \frac{1}{14} & \frac{15}{56} & \frac{15}{56} \\ \frac{1}{14} & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} & \frac{1}{14} \\ \frac{1}{56} & \frac{1}{14} & \frac{15}{56} & \frac{15}{56} & \frac{15}{56} & \frac{1}{14} & \frac{1}{56} & \frac{1}{56} \end{pmatrix}.$$

Mỗi hàng của ma trận H chính là phân phối xác suất của S_τ xuất phát từ điểm x tương ứng.

Tiếp theo là kết quả số đối với hàm Green $G_A(x, z)$ với $x, z \in A$.

Bảng giá trị của $a(x - z), x, z \in A$.

$$\begin{matrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & 0 & 1 & 4 - \frac{8}{\pi} \\ x_2 & 1 & 0 & 1 \\ x_3 & 4 - \frac{8}{\pi} & 1 & 0 \end{matrix}$$

Ma trận $a(y - z), y \in \partial A, z \in A$,

$$\begin{matrix} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 \\ x_1 & 1 & \frac{4}{\pi} & 4 - \frac{8}{\pi} & 17 - \frac{48}{\pi} & -1 + \frac{8}{\pi} & \frac{4}{\pi} & 1 & 1 \\ x_2 & \frac{4}{\pi} & 1 & \frac{4}{\pi} & 4 - \frac{8}{\pi} & \frac{4}{\pi} & 1 & \frac{4}{\pi} & 4 - \frac{8}{\pi} \\ x_3 & -1 + \frac{8}{\pi} & \frac{4}{\pi} & 1 & 1 & 1 & \frac{4}{\pi} & -1 + \frac{8}{\pi} & 17 - \frac{48}{\pi} \end{matrix}$$

Ta ký hiệu ma trận phân phối của S_τ bởi $H(A, \partial A)$, ma trận giá trị của $a(x - z)$,

$x, z \in A$ bởi $a(\partial A - A)$ và ma trận giá trị của $a(y - z), y \in \partial A, z \in A$ bởi $a(A - A)$.

Khi đó,

$$G_A(x, z) = H(A, \partial A) \times a(\partial A - A)^T - a(A - A)$$

Từ đó ta có

$$G_A(x, z) = \begin{pmatrix} \frac{15}{14} & \frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ \frac{2}{7} & \frac{8}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{1}{14} & \frac{2}{7} & \frac{15}{14} \end{pmatrix}.$$

Các phần tử của ma trận $G_A(x, y)$, chẳng hạn $G_A(x_1, x_3) = \frac{1}{14}$ nghĩa là xuất phát từ x_1 , bình quân bước đi ngẫu nhiên ghé qua x_3 là $\frac{1}{14}$ lần trước khi thoát khỏi tập A .

Tương tự, $G_A(x_1, x_1) = \frac{15}{14} > 1$ nghĩa là bước đi ngẫu nhiên chắc chắn ở x_1 tại thời điểm xuất phát và có thể sẽ quay lại thêm một số lần trước khi thoát khỏi tập A .

4. KẾT LUẬN

Trong bài viết này, việc tính toán số cho hàm Green của bước đi ngẫu nhiên trong trường hợp một chiều và hai chiều đã được làm rõ thông qua việc sử dụng các định lý và công thức cụ thể liên quan đến hàm phân phối xác suất thoát $H(x, y)$. Trên cơ sở đó, chúng tôi đã thiết lập được biểu thức của hàm Green $G_A(x, z)$ đối với các miền hữu hạn, đồng thời xây dựng một quy trình tính toán hiệu quả dựa trên việc giải hệ tuyến tính cho xác suất thoát với ma trận giá trị của hàm hạt nhân thế. Đặc biệt, bài toán biên trong trường hợp hai chiều đã được giải quyết như

bài toán điện hình cho việc kết nối giữa phương pháp hàm điều hòa rời rạc, công thức Green và tính toán số trên miền hữu hạn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Biskup, M. (2020). Recent progress on the random conductance model. *Probability Surveys*, 17, 1–52.
<https://doi.org/10.1214/11-PS190>
- Chen, X., Kim, P., & Kumagai, T. (2022). Disorder problems for random walks and diffusions: recent developments. *Stochastic Processes and their Applications*, 150, 333–372.
- Doyle, P. G., & Snell, J. L. (1984). *Random walks and electric networks* (Vol. 22). American Mathematical Soc.
<https://doi.org/10.5948/UPO9781614440222>
- Durrett, R. (2019). *Probability: Theory and Examples* (5th ed.). Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/9781108591034>
- Kozma, G., & Popov, S. (2021). Green's function estimates for random walks on random environments. *Annals of Probability*, 49(1), 1–39.

LỜI CẢM ƠN

Bài báo được tài trợ bởi đề tài nghiên cứu của Đại học Cần Thơ, mã số: TSV2025-14.

- Lawler, G. F., & Limic, V. (2010). *Random Walk: A Modern Introduction*. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511750854>
- Lyons, R., & Peres, Y. (2016). *Probability on Trees and Networks*. Cambridge University Press.
<https://doi.org/10.1017/9781316672815>
- Pearson, K. (1905). The problem of the random walk. *Nature*, 72, 294.
<https://doi.org/10.1038/072342a0>
- Pólya, G. (1921). Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitsrechnung betreffend die Irrfahrt im Straßennetz. *Mathematische Annalen*, 84, 149–160.
<https://doi.org/10.1007/BF01458701>
- Spitzer, F. (2001). *Principles of random walk* (Vol. 34). Springer Science & Business Media.