

DOI:10.22144/ctujos.2026.155

TÍNH CHÍNH QUY CỦA HỌ CÁC ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Hoàng Minh Thành¹, Nguyễn Tấn Hậu¹, Nguyễn Nhật Tân¹, Bành Lê Yến Nhi¹ và Nguyễn Duy Cường^{2*}

¹Sinh viên ngành Toán Ứng dụng Khoá 48, Khoa Toán học, Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

²Khoa Toán học, Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

*Tác giả liên hệ (Corresponding author): ndcuong@ctu.edu.vn

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 14/11/2025

Sửa bài (Revised): 18/12/2025

Duyệt đăng (Accepted): 21/07/2026

Title: Transversality properties of collections of set-valued mappings

Authors: Hoang Minh Thanh¹, Nguyen Tan Hau¹, Nguyen Nhat Tan¹, Banh Le Yen Nhi¹ and Nguyen Duy Cuong^{2*}

Affiliations: ¹Undergraduate Students in Applied Mathematics, Cohort 48, Faculty of Mathematics, College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam; ²Faculty of Mathematics, College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam

TÓM TẮT

Bài báo được thực hiện nhằm nghiên cứu các tính chất chính quy của họ các ánh xạ đa trị trong không gian metric và không gian định chuẩn. Các tính chất này là các dạng mở rộng tương ứng của các tính chính quy của họ các tập hợp. Các điều kiện cần và đủ trong không nền cho các tính nửa chính quy được thiết lập dưới dạng độ dốc địa phương và toàn cục. Trường hợp ánh xạ đa trị nhận giá trị lồi cũng được nghiên cứu.

Từ khóa: Ánh xạ đa trị, độ dốc, tính nửa chính quy, tính chính quy

ABSTRACT

The paper studies transversality properties of collections of set-valued mappings. These are generalizations of the corresponding transversality properties of collections of sets. Necessary and sufficient conditions in primal spaces for semitransversality in terms of slopes are established. In the case of set-valued mappings with convex values, geometric and metric characterizations of these properties admit simplifications.

Keywords: Transversality, set-valued mapping, semitransversality, slope

1. GIỚI THIỆU

Các tính chất chính quy của họ các tập hợp đóng vai trò quan trọng trong giải tích biến phân và tối ưu hóa. Chúng được sử dụng để thiết lập các quy tắc tính toán cho các đối tượng quan trọng của giải tích phi tuyến và giải tích không trơn như nón tiếp xúc và nón pháp tuyến của tập hợp, đạo hàm suy rộng và dưới vi phân của hàm thực, đạo hàm và đối đạo hàm của ánh xạ đa trị; xem Chương 3 trong (Mordukhovich, 2006). Ngoài ra, các tính chất chính quy còn là công cụ hiệu quả trong việc đánh giá tốc độ hội tụ của các thuật toán tối ưu, đặc biệt trong những bài toán có dữ liệu không trơn hoặc không lồi (Drusvyatskiy et al., 2015).

Các tính chất chính quy của họ các tập hợp còn có mối liên hệ chặt chẽ với tính cực trị (extremality), tính dừng (stationarity) và tính xấp xỉ dừng (approximate stationarity) (Kruger, 2005). Tính nửa chính quy (semitransversality) và tính chính quy (transversality) là các dạng phủ định tương ứng của tính dừng và tính xấp xỉ dừng. Các tính chất này đóng vai trò quan trọng trong việc thiết lập các điều kiện cần tối ưu đối ngẫu trong các bài toán tối ưu đa mục tiêu (Cuong & Kruger, 2025).

Việc nghiên cứu tính cực trị của họ các ánh xạ đa trị được đề xuất bởi Mordukhovich et al. (2003), khi các tác giả nhận thấy trong một số bài toán điều khiển tối ưu, nghiệm tối ưu được mô tả thông qua

các quan hệ phi tuyến; do đó, khái niệm về tính cực trị của họ các tập hợp không thể vận dụng. Các kết quả này đã được mở rộng và phát triển trong công trình gần đây của Anh et al. (2024).

Như đã phân tích ở trên, tính cực trị/dừng và các tính chính quy có mối liên hệ mật thiết. Do đó, việc nghiên cứu các tính chính quy của họ các ánh xạ đa trị là rất cần thiết. Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất và nghiên cứu các tính chính quy mới của họ các ánh xạ đa trị. Các công cụ hiện đại của giải tích biến phân đã được vận dụng, chúng tôi thiết lập các đặc trưng hình học và bất đẳng thức mêtric cho các tính chính quy mới trong trường hợp lồi và không lồi. Các điều kiện cần và đủ dưới dạng độ dốc cho tính nửa chính quy trên không gian nền cũng được nghiên cứu.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho X là một không gian định chuẩn, hình cầu mở tâm x với bán kính $\delta > 0$ được kí hiệu là $B_\delta(x)$, hình cầu mở đơn vị tâm 0 được kí hiệu là $\mathbb{B}$. Khoảng cách từ x đến $\Omega \subset X$ là $d(x, \Omega) := \inf_{u \in \Omega} \|x - u\|$, trong đó $d(x, \emptyset) = +\infty$. Miền hữu hiệu và đồ thị của ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ được kí hiệu lần lượt là $\text{dom}F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ và $\text{gph}F := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$.

Định nghĩa 2.1 (Cuong & Kruger, 2021)

Cho X là một không gian mêtric, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và $x \in \text{dom}f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$. Độ dốc địa phương và độ dốc toàn cục của f tại x được định nghĩa lần lượt là:

$$|\nabla f|^\circ(x) := \sup_{u \neq x} \frac{[f(x) - f_+(u)]_+}{d(x, u)},$$

$$|\nabla f|(x) := \limsup_{u \rightarrow x, u \neq x} \frac{[f(x) - f_+(u)]_+}{d(x, u)},$$

trong đó $\alpha_+ := \max\{0, \alpha\}$ với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ và $f_+(u) := [f(u)]_+$ với mọi $u \in X$.

Mệnh đề 2.1 (Cuong & Kruger, 2021)

Cho X là một không gian mêtric, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ và $x \in \text{dom}f$ với $f(x) > 0$. Khi đó:

- (i) $|\nabla f|(x) \leq |\nabla f|^\circ(x)$;
- (ii) nếu X là không gian định chuẩn và f là hàm lồi thì $|\nabla f|(x) \leq |\nabla f|^\circ(x)$.

Bổ đề 2.1 (Ekeland, 1974)

Cho X là không gian mêtric đầy, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ nửa liên tục dưới, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$. Nếu $f(x) < \inf_X f + \varepsilon$, thì $\exists \hat{x} \in X$ sao cho:

- (i) $d(\hat{x}, x) < \lambda$;
- (ii) $f(\hat{x}) \leq f(x)$;
- (iii) $f(u) + (\varepsilon/\lambda)d(u, \hat{x}) \geq f(\hat{x})$, $\forall u \in X$.

Định nghĩa 2.2 (Cuong & Kruger, 2021)

Cho Ω_1, Ω_2 là các tập con của không gian định chuẩn X , và $\bar{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$.

(i) Họ $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\tau > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$(\Omega_1 - x_1) \cap (\Omega_2 - x_2) \cap B_\rho(\bar{x}) \neq \emptyset$$

với mọi $\rho \in (0, \delta)$ và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa $\max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} < \tau\rho$.

(ii) Họ $\{\Omega_1, \Omega_2\}$ là chính quy tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\tau > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$(\Omega_1 - \omega_1 - x_1) \cap (\Omega_2 - \omega_2 - x_2) \cap (\rho\mathbb{B}) \neq \emptyset$$

với mọi $\rho \in (0, \delta)$, $\omega_i \in \Omega_i \cap B_\delta(\bar{x})$ và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa $\max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} < \tau\rho$.

3. TÍNH CHÍNH QUY CỦA HỌ CÁC ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Cho (X_1, d_1) và (X_2, d_2) là các không gian mêtric, X là một không gian định chuẩn. Xét các ánh xạ đa trị $F_1: X_1 \rightrightarrows X$ và $F_2: X_2 \rightrightarrows X$, và các điểm $\bar{x}_1 \in X_1$, $\bar{x}_2 \in X_2$, $\bar{x} \in F_1(\bar{x}_1) \cap F_2(\bar{x}_2)$.

Định nghĩa 3.1

(i) Họ $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\tau > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$F_1(x_1) \cap F_2(x_2) \cap B_\rho(\bar{x}) \neq \emptyset$$

với mọi $\rho \in (0, \delta)$ và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa

$$\max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\} < \tau\rho. \quad (1)$$

(ii) Họ $\{F_1, F_2\}$ là chính quy tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\tau > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$(F_1(x_1) - \omega_1) \cap (F_2(x_2) - \omega_2) \cap (\rho\mathbb{B}) \neq \emptyset$$

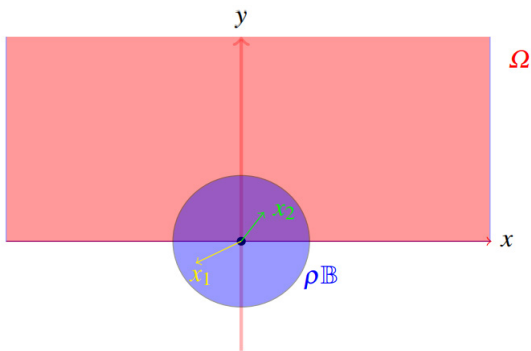
với mọi $\rho \in (0, \delta)$, $\omega_i \in F_i(x_i) \cap B_\delta(\bar{x})$ và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa (1).

Nhận xét 3.1

(i) Định nghĩa 3.1(i) là trường hợp đặc biệt của Định nghĩa 3.1(ii) với $\omega_1 = \omega_2 = \bar{x}$. Do đó, tính nửa chính quy là yếu hơn tính chính quy.

(ii) Xét $\Omega_1, \Omega_2 \subset X$, $\bar{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$, và $F_i : X \rightrightarrows X$ với $F_i(x) := \Omega_i - x$, $\forall x \in X$. Ta có $F_i(\bar{x}_i) = \Omega_i$ với $\bar{x}_i := 0$ ($i = 1, 2$) và $\bar{x} \in F_1(\bar{x}_1) \cap F_2(\bar{x}_2)$. Do đó, các tính chất trong Định nghĩa 3.1 là các dạng mở rộng tương ứng của các tính chất trong Định nghĩa 2.2.

(iii) Các tính chất trong Định nghĩa 2.2 yêu cầu các tập thu được bằng cách tịnh tiến các tập ban đầu phải có phần giao khác rỗng trong một lân cận của điểm đang xét. Ngược lại, các tính chất trong Định nghĩa 3.1 đảm bảo sự khác rỗng của phần giao thông qua việc sử dụng các ánh xạ đa trị. Rõ ràng cách tiếp cận thông qua ánh xạ đa trị là linh hoạt và tổng quát hơn cách tiếp cận thông qua phép tịnh tiến. Sự hiệu quả của cách tiếp cận này đã được chứng minh trong công trình của Mordukhovich et al. (2003) thông qua việc vận dụng tính cực trị của họ các ánh xạ đa trị để nghiên cứu các bài toán điều khiển tối ưu trong đó nghiệm không được phát biểu theo quan hệ nón. Đối với tính chính quy của ánh xạ đa trị, việc nghiên cứu các khía cạnh lý thuyết đã được tập trung thực hiện trong bài báo, các kết quả thu được có thể được vận dụng để nghiên cứu các bài toán tối ưu với dữ liệu phi tuyến và/hoặc ánh xạ đa trị.



Hình 1. $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$

Ví dụ 3.1

Cho $X := \mathbb{R}^2$ được trang bị chuẩn Euclid,

$$\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ hoặc } y \geq 0\}$$

$\bar{x} := (0, 0) \in \Omega$. Xét $F_1, F_2 : \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ với

$$F_1(x_1) := \Omega - x_1 \text{ và } F_2(x_2) := \Omega - x_2$$

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$. Ta có $F_1(\bar{x}_1) = F_2(\bar{x}_2) = \Omega$ với $\bar{x}_1 = \bar{x}_2 := (0, 0)$. Lấy $\tau \in (0, 1)$, $\delta > 0$ và $\rho \in$

$(0, \delta)$. Dễ thấy $F_1(x_1) \cap F_2(x_2) \cap B_\rho(\bar{x}) \neq \emptyset$ với mọi $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ thỏa $\max\{\|x_1\|, \|x_2\|\} < \tau\rho$. Theo Định nghĩa 3.1(i), $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$.

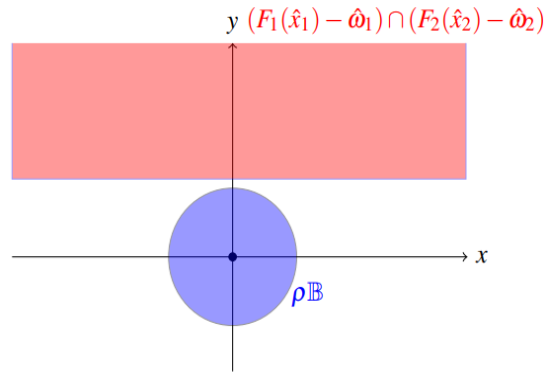
Chọn $\hat{\rho} \in (\rho, \delta)$, $\hat{\tau} \in (0, \tau)$, $\hat{x}_1 = (\hat{\tau}\rho, 0)$, $\hat{x}_2 = (-\hat{\tau}\rho, 0)$, $\omega_1 = \omega_2 = (0, -\hat{\rho})$. Khi đó

$$(F_1(\hat{x}_1) - \omega_1) \cap (F_2(\hat{x}_2) - \omega_2) = \{(x, y) \mid y \geq \hat{\rho}\}.$$

Do đó

$$(F_1(\hat{x}_1) - \omega_1) \cap (F_2(\hat{x}_2) - \omega_2) \cap (\rho\mathbb{B}) = \emptyset.$$

Theo Định nghĩa 3.1(ii), $\{F_1, F_2\}$ không chính quy tại $\bar{x}$.



Hình 2. $\{F_1, F_2\}$ không chính quy tại $\bar{x}$

Định lý 3.1

(i) Họ $\{F_1, F_2\}$ nửa chính quy tại $\bar{x}$ nếu và chỉ nếu tồn tại $\tau > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$\tau d(\bar{x}, F_1(x_1) \cap F_2(x_2)) \leq \max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\}$$

với mọi $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa

$$\max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\} < \tau\delta. \quad (2)$$

(ii) Họ $\{F_1, F_2\}$ chính quy tại $\bar{x}$ nếu và chỉ nếu tồn tại $\tau > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$\begin{aligned} \tau d(0, (F_1(x_1) - \omega_1) \cap (F_2(x_2) - \omega_2)) \\ \leq \max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\} \end{aligned}$$

với mọi $\omega_i \in F_i(\bar{x}_i) \cap B_\delta(\bar{x})$ và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa (2).

Chứng minh

(i) Giả sử $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$ với $\tau > 0$ và $\delta > 0$. Lấy $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa $\gamma := \max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\} < \tau\delta$ và $\rho \in (0, \delta)$ sao cho $\rho > \tau^{-1}\gamma$. Theo Định nghĩa 3.1(i), ta được $d(\bar{x}, F_1(x_1) \cap F_2(x_2)) < \rho$. Lấy giới hạn $\rho \downarrow \tau^{-1}\gamma$, ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Ngược

lại, lấy $\rho \in (0, \delta)$ và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa (1). Khi đó, $d(\bar{x}, F_1(x_1) \cap F_2(x_2)) < \rho$. Theo Định nghĩa 3.1(i), $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$.

(ii) Giả sử $\{F_1, F_2\}$ là chính quy tại $\bar{x}$ với $\tau > 0$ và $\delta > 0$. Lấy $x_i \in X_i$ thỏa $\gamma := \max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\} < \tau\delta$ và $\omega_i \in B_\delta(\bar{x}) \cap F_i(\bar{x}_i)$ ($i = 1, 2$). Chọn $\rho \in (0, \delta)$ sao cho $\rho > \tau^{-1}\gamma$. Theo Định nghĩa 3.1(ii), ta được

$$d(0, (F_1(x_1) - \omega_1) \cap (F_2(x_2) - \omega_2)) < \rho. \quad (3)$$

Lấy giới hạn $\rho \downarrow \tau^{-1}\gamma$, ta được bất đẳng thức cần chứng minh. Ngược lại, lấy $\rho \in (0, \delta)$ và $x_i \in X_i$ thỏa (1) và $\omega_i \in B_\delta(\bar{x}) \cap F_i(\bar{x}_i)$ ($i = 1, 2$). Khi đó, bất đẳng thức (3) được thỏa. Theo Định nghĩa 3.1(ii), $\{F_1, F_2\}$ là chính quy tại $\bar{x}$. ■

Định lý 3.2

Cho ánh xạ $\psi_i: X_i \rightarrow X$, $\bar{x}_i \in X_i$ với $\psi(\bar{x}_i) = 0$, Ω_1 và Ω_2 là các tập con lồi của X , $\bar{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$. Xét $F_i: X_i \rightrightarrows X$ được cho bởi $F_i(x_i) := \psi_i(x_i) + \Omega_i$ với mọi $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$).

(i) Nếu tồn tại $\tau > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$(\varphi_1(x_1) + \Omega_1) \cap (\varphi_1(x_2) + \Omega_2) \cap B_\delta(\bar{x}) \neq \emptyset$$

với mọi $\varphi_i = \gamma\psi_i$ ($\gamma > 1$) và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) với

$\max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), \|\varphi_i(x_i)\|\} < \tau\delta$, thì $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$.

(ii) Nếu tồn tại $\tau > 0$ và $\delta > 0$ sao cho

$$(\varphi_1(x_1) + \Omega_1 - \omega_1) \cap (\varphi_2(x_2) + \Omega_2 - \omega_2) \cap (\delta\mathbb{B}) \neq \emptyset$$

với mọi $\varphi_i = \gamma\psi_i$ ($\gamma > 1$), $x_i \in X_i$, $\omega_i \in B_\delta(\bar{x}) \cap F_i(\bar{x}_i)$ ($i = 1, 2$) thỏa $\max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), \|\varphi_i(x_i)\|\} < \tau\delta$, thì $\{F_1, F_2\}$ là chính quy tại $\bar{x}$.

Chứng minh

(i) Lấy $\rho \in (0, \delta)$ và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa $\max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), \|\psi_i(x_i)\|\} < \tau\rho$. Khi đó

$$\max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, \psi_i(x_i) + \Omega_i)\} < \tau\rho.$$

Đặt $t := \frac{\rho}{\delta}$ và $\varphi_i(x_i) := \frac{\psi_i(x_i)}{t}$ ($i = 1, 2$). Khi đó $0 < t < 1$ và $\|\varphi_i(x_i)\| = \frac{\|\psi_i(x_i)\|}{t} < \frac{\tau\rho}{t} = \tau\delta$ ($i = 1, 2$), và $\exists x' \in (\varphi_1(x_1) + \Omega_1) \cap (\varphi_2(x_2) + \Omega_2) \cap B_\delta(\bar{x})$. Ta có $x' \in B_\delta(\bar{x})$ và $x' = \varphi_i(x_i) + v_i$ với $v_i \in \Omega_i$ ($i = 1, 2$). Do đó $\psi_i(x_i) = t(x' - v_i)$ ($i =$

1, 2). Từ giả thiết lồi, ta được $tv_i + (1 - t)\bar{x} \in \Omega_i$ ($i = 1, 2$). Đặt $x := \bar{x} + t(x' - \bar{x})$. Khi đó $x = t(x' - v_i) + tv_i + (1 - t)\bar{x} \in \psi_i(x_i) + \Omega_i$ ($i = 1, 2$). Mặt khác, $\|x - \bar{x}\| = t\|x' - \bar{x}\| < \frac{\rho}{\delta}\delta = \rho$. Do đó $(\psi_1(x_1) + \Omega_1) \cap (\psi_2(x_2) + \Omega_2) \cap B_\rho(\bar{x}) \neq \emptyset$. Theo Định nghĩa 3.1(i), $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$.

(ii) Lấy $\rho \in (0, \delta)$, $\omega_i \in B_\delta(\bar{x}) \cap F_i(\bar{x}_i)$ và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) với $\max_{i=1,2} \{d_i(x_i, \bar{x}_i), \|\psi_i(x_i)\|\} < \tau\rho$.

Theo Định lý 3.2(i), với mỗi ω_1 và ω_2 , họ $\{F_1 - \omega_1, F_2 - \omega_2\}$ là nửa chính quy tại 0. Do đó $\{F_1, F_2\}$ là chính quy tại $\bar{x}$. ■

4. ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO TÍNH CHÍNH QUY

X được cho là một không gian định chuẩn, ta trang bị cho không gian X^3 chuẩn phụ thuộc vào tham số $\gamma > 0$ như sau:

$$\|(v_1, v_2, v)\|_\gamma := \max\{\|v\|, \gamma\|v_1\|, \gamma\|v_2\|\}$$

với mọi $v, v_1, v_2 \in X$.

Định lý 4.1

(i) Giả sử X là không gian Banach, F_1 và F_2 có giá trị đóng. Họ $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\tau > 0$, $\delta > 0$ và $\gamma > 0$ sao cho với mỗi $x_i \in B_{\tau\delta}(\bar{x}_i)$, $u_i \in F_i(x_i) \cap B_\delta(\bar{x}_i)$ ($i = 1, 2$) thì

$$\sup_{\substack{(v'_1, v'_2, x') \neq (v_1, v_2, x) \\ v'_i \in F_i(x_i) (i=1,2), x' \in X}} \frac{\max_{i=1,2} \|v_i - x\| - \max_{i=1,2} \|v'_i - x'\|}{\|(v_1, v_2, x) - (v'_1, v'_2, x')\|} \geq \tau$$

với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$, $v_i \in F_i(x_i) \cap B_{\frac{\delta}{\gamma}}(u_i)$ ($i = 1, 2$) thỏa

$$0 < \max\{\|v_1 - x\|, \|v_2 - x\|\} < \tau\delta. \quad (4)$$

(ii) Nếu $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$ với $\tau > 0$ và $\delta > 0$, thì

$$\sup_{\substack{(v'_1, v'_2, x') \neq (v_1, v_2, x) \\ v'_i \in F_i(x_i) (i=1,2), x' \in X}} \frac{\max_{i=1,2} \|v_i - \bar{x}\| - \max_{i=1,2} \|v'_i - x'\|}{\|(v_1, v_2, \bar{x}) - (v'_1, v'_2, x')\|} \geq \tau$$

với $\gamma := (\tau + 1)^{-1}$ và với mọi $x_i \in X_i$ và $v_i \in F_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) thỏa (4).

Chứng minh

(i) Ta chứng minh bằng phản chứng. Lấy $\tau > 0$, $\delta > 0$ và $\gamma > 0$. Giả sử $\{F_1, F_2\}$ không nửa chính quy tại $\bar{x}$. Theo Định nghĩa 3.1(i), tồn tại $\rho \in (0, \delta)$ và $x_i \in X_i$ ($i = 1, 2$) thỏa (1) sao cho

$$F_1(x_1) \cap F_2(x_2) \cap B_\rho(\bar{x}) = \emptyset.$$

Do đó, $x_i \in B_{\tau\delta}(\bar{x}_i)$ ($i = 1, 2$) và $\max\{\|z_1 - z\|, \|z_2 - z\|\} > 0$ với mọi $z \in B_\rho(\bar{x})$ và $z_i \in F_i(x_i)$ ($i = 1, 2$). Khi đó tồn tại $\hat{u}_i \in F_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) sao cho $\max\{\|\hat{u}_1 - \bar{x}\|, \|\hat{u}_2 - \bar{x}\|\} < \tau\rho < \tau\delta$, tức là, $\hat{u}_i \in F(x_i) \cap B_{\tau\delta}(\bar{x})$ ($i = 1, 2$). Việc xét

$f(z_1, z_2, z) := \max\{\|z_1 - z\|, \|z_2 - z\|\}$ được thực hiện với mọi $\forall z_1, z_2, z \in X$ và

$$\hat{f} := f + i_{F_1(x_1) \times F_2(x_2)}.$$

Ta có $0 < \hat{f}(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \bar{x}) < \tau\rho$. Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho $\hat{f}(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \bar{x}) < \varepsilon < \tau\rho$. Bổ đề 2.1 được áp dụng cho hàm $\hat{f}$ trên không gian Banach $F_1(x_1) \times F_2(x_2) \times X$, ta tìm được $x \in X$ và $v_i \in F_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) thỏa

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2, x) &\leq f(\hat{u}_1, \hat{u}_2, \bar{x}), \\ \|(v_1, v_2, x) - (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \bar{x})\|_\gamma &< \rho, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_1, v_2, x) - f(v'_1, v'_2, x') \\ \leq \frac{\varepsilon}{\rho} \|(v_1, v_2, x) - (v'_1, v'_2, x')\|_\gamma \end{aligned}$$

với mọi $(v'_1, v'_2, x') \in F_1(x_1) \times F_2(x_2) \times X$. Khi đó

$x \in B_\delta(\bar{x})$ và $v_i \in F_i(x_i) \cap B_{\delta/\gamma}(\hat{u}_i)$ ($i = 1, 2$), và

$$\frac{\max_{i=1,2} \|v_i - x\| - \max_{i=1,2} \|v'_i - x'\|}{\|(v_1, v_2, x) - (v'_1, v'_2, x')\|} \leq \frac{\varepsilon}{\rho} < \tau$$

với mọi $(v'_1, v'_2, x') \in F_1(x_1) \times F_2(x_2) \times X$, điều này mâu thuẫn với giả thiết.

(ii) Giả sử $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$ với $\tau > 0$ và δ . Lấy $x_i \in X_i$ và $v_i \in F_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) thỏa $0 < \max\{\|v_1 - \bar{x}\|, \|v_2 - \bar{x}\|\} < \tau\delta$. Đặt $\gamma := (\tau + 1)^{-1}$ và $M := \tau^{-1} \max\{\|v_1 - \bar{x}\|, \|v_2 - \bar{x}\|\} < \delta$. Cho $\eta \in (0, 1)$ và chọn $\gamma' \in (\eta\gamma, \gamma)$. Khi đó $(\gamma')^{-1} - \tau > 1$. Chọn $\xi > 1$ sao cho $\xi \leq \eta^{-1}$, $\xi \leq (\gamma')^{-1} - \tau$, và $\xi M < \delta$. Theo Định nghĩa 3.1(i), $F_1(x_1) \cap F_2(x_2) \cap B_{\xi M}(\bar{x}) \neq \emptyset$ và do đó, tồn tại $\hat{x} \in X$ và $\hat{v}_i \in F_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) với $\hat{v}_1 = \hat{v}_2 = \hat{x}$ sao cho $\|\hat{x} - \bar{x}\| < \xi M$. Do $\max\{\|\hat{v}_1 - \bar{x}\|, \|\hat{v}_2 - \bar{x}\|\} = 0$ và $\max\{\|v_1 - \bar{x}\|, \|v_2 - \bar{x}\|\} > 0$, nên $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{x}) \neq (v_1, v_2, \bar{x})$.

Hơn nữa,

$$\|\hat{v}_i - v_i\| \leq \|\hat{v}_i - \bar{x}\| + \|v_i - \bar{x}\|$$

$$< \xi M + \tau M \leq M(\gamma')^{-1} < M(\eta\gamma)^{-1} \quad (i = 1, 2),$$

và $\|(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{x}) - (v_1, v_2, \bar{x})\|_\gamma = \max_{i=1,2} \{\|\hat{x} - v_i\|, \gamma\|\hat{v}_i - v_i\|\} < M \max\{\xi, \eta^{-1}\} = M\eta^{-1}$.

Do đó,

$$\max_{i=1,2} \|v_i - \bar{x}\| > \eta\tau \|(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{x}) - (v_1, v_2, \bar{x})\|_\gamma.$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{(v'_1, v'_2, x') \neq (v_1, v_2, \bar{x}) \\ v'_i \in F_i(x_i) (i=1,2), x' \in X}} \frac{\max_{i=1,2} \|v_i - \bar{x}\| - \max_{i=1,2} \|v'_i - x'\|}{\|(v_1, v_2, \bar{x}) - (v'_1, v'_2, x')\|_\gamma} \\ &\geq \frac{\max_{i=1,2} \|v_i - \bar{x}\|}{\|(v_1, v_2, \bar{x}) - (\hat{u}_1, \hat{u}_2, \bar{x})\|_\gamma} > \eta\tau. \end{aligned}$$

Cho $\eta \uparrow 1$, ta được điều phải chứng minh. ■

Nhận xét 4.1

(i) Định lý 4.1(i) là một trường hợp riêng của Định lý 4.1(ii) với $x := \bar{x}$ và $u_i := v_i$ ($i = 1, 2$).

(ii) Kết quả của Định lý 4.1(ii) luôn đúng với bất kỳ $0 < \gamma \leq (\tau + 1)^{-1}$.

(iii) Việc nghiên cứu trên các không gian tích được trang bị chuẩn phụ thuộc tham số là một kỹ thuật thường được sử dụng trong việc thiết lập các điều kiện cần và đủ cho các tính chất chính quy. Khi các điều kiện được phát biểu trên không gian nền, vai trò của tham số chưa thực sự nổi bật. Tuy nhiên, khi các điều kiện này được vận dụng để nghiên cứu các điều kiện tương ứng trên không gian đối ngẫu, vai trò của tham số trở nên rõ ràng hơn vì nó mang lại sự linh hoạt trong quá trình tính toán và đưa ra các ước lượng trong không gian đối ngẫu.

(iii) Định lý 4.1 trình bày điều kiện cần và đủ dưới dạng độ dốc toàn cục cho tính nửa chính quy của họ các ánh xạ đa trị. Với cách tiếp cận tương tự, ta có thể thiết lập các điều kiện cần và đủ tương ứng cho tính chính quy trong định nghĩa 3.1(ii).

Hệ quả 4.1

(i) Giả sử X là không gian Banach, F_1 và F_2 nhận giá trị đóng. Họ $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\tau > 0$, $\delta > 0$ và $\gamma > 0$ sao cho với mỗi $x_i \in B_{\tau\delta}(\bar{x}_i)$, $u_i \in F_i(x_i) \cap B_\delta(\bar{x}_i)$ ($i = 1, 2$) thì

$$\limsup_{\substack{(v'_1, v'_2, x') \neq (v_1, v_2, x) \\ v'_i \xrightarrow{F_i(x_i)} v_i (i=1,2), x' \rightarrow x}} \frac{\max_{i=1,2} \|v_i - x\| - \max_{i=1,2} \|v'_i - x'\|}{\|(v_1, v_2, x) - (v'_1, v'_2, x')\|} \geq \tau$$

với mọi x, v_1, v_2 thỏa các điều kiện trong Định lý 4.1(i).

(ii) Giả sử F_1, F_2 có giá trị lồi. Nếu $\{F_1, F_2\}$ là nửa chính quy tại $\bar{x}$ với $\tau > 0$ và $\delta > 0$, thì

$$\limsup_{\substack{(v'_1, v'_2, x') \neq (v_1, v_2, \bar{x}) \\ v'_i \xrightarrow{F_i(x_i)} v_i \ (i=1,2), x' \rightarrow \bar{x}}} \frac{\max_{i=1,2} \|v_i - \bar{x}\| - \max_{i=1,2} \|v'_i - x'\|}{\|(v_1, v_2, \bar{x}) - (v'_1, v'_2, x')\|} \geq \tau$$

với $\gamma := (\tau + 1)^{-1}$ và với mọi v_1, v_2 thỏa các điều kiện trong Định lý 4.1(ii).

Chứng minh

(i) được suy ra từ Định lý 4.1(i) và Mệnh đề 2.1(i).

(ii) được suy ra từ Định lý 4.1(ii) và Mệnh đề 2.1(ii). ■

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Anh, H. N. H., My, N.T. D., & Cường, N. D. (2024). Nguyên lý cực trị cho họ các ánh xạ đa trị. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, 60(2), 59-64. <https://doi.org/10.22144/ctujos.2024.252>
- Cuong, N. D., & Kruger, A. Y. (2021). Primal necessary characterizations of transversality properties. *Positivity*, 25, 531-558. <https://doi.org/10.1007/s11117-020-00775-5>
- Cuong, N. D., & Kruger, A. Y. (2025). Sequential extremal principle and necessary conditions for minimizing sequences. *Optimization*, 25, 1-27. <https://doi.org/10.1080/02331934.2025.2534122>
- Drusvyatskiy, D., Ioffe, A. D., & Lewis, A. S. (2015). Transversality and alternating projections for nonconvex sets. *Foundations of Computational Mathematics*, 15, 1637-1651. <https://doi.org/10.1007/s10208-015-9279-3>

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, một số tính chính quy mới của họ ánh xạ đa trị được đề xuất và nghiên cứu; đồng thời, các đặc trưng hình học và mêtric tương ứng cũng được thiết lập. Các kết quả trong trường hợp ánh xạ đa trị nhận giá trị lồi được thiết lập. Các công cụ hiện đại của giải tích phi tuyến và giải tích lồi đã được vận dụng; các điều kiện cần và đủ dưới dạng độ dốc cho tính nửa chính quy của họ các ánh xạ đa trị đã được đưa ra trong bài báo. Hướng nghiên cứu tiếp theo của bài báo được đề xuất là vận dụng các quy tắc tổng của các dưới vi phân (Clarke, Ioffe, Fréchet, lồi) để thiết lập các điều kiện cần và đủ dưới dạng các phần tử trong không gian đối ngẫu cho các tính chính quy của họ các ánh xạ đa trị.

LỜI CẢM ƠN

Đề tài này được tài trợ bởi Đại học Cần Thơ, Mã số: TSV2025-10.

- Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 47(3), 324-353. [https://doi.org/10.1016/0022-247X\(74\)90025-0](https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0)
- Kruger, A.Y. (2005). Stationarity and regularity of set systems. *Pacific Journal of Optimization*, 15(1), 101-126.
- Mordukhovich, B. S. (2006). *Variational Analysis and Generalized Differentiation. I: Basic Theory*. Springer, Berlin. <https://doi.org/10.1007/3-540-31247-1>
- Mordukhovich, B. S., Treiman, J. S., & Zhu, Q. J. (2003). An extended extremal principle with applications to multiobjective optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 14(2), 359-379. <https://doi.org/10.1137/S1052623402414701>