Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2026.153

TÍNH CHẤT HÀM VÔ HƯỚNG HÓA PHI TUYẾN DẠNG GERSTEWITZ TỔNG QUÁT VÀ ÁP DỤNG

Nguyễn Thái Anh[1], Trần Ngọc Tâm[2*], Trần Thị Bích Trâm[2] và Phạm Thị Vui[3]
[1]*Trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long, Việt Nam*
[2]*Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam*
[3]*Trường Sư phạm, Đại học Cần Thơ, Việt Nam*
[*]*Tác giả liên hệ (Corresponding author): tntam@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 18/10/2025
Sửa bài (Revised): 01/11/2025
Duyệt đăng (Accepted): 15/07/2026

Title: *Properties of generalized nonlinear Gerstewitz scalarization functions and applications*

Author(s): *Nguyen Thai Anh[1], Tran Ngoc Tam[2*], Tran Thi Bich Tram[2] and Pham Thi Vui[3]*

Affiliation(s): *[1]Nguyen Binh Khiem Gifted High School, Viet Nam; [2]College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam; [3]School of Education, Can Tho University, Viet Nam*

TÓM TẮT

Một số tính chất của hàm vô hướng hóa phi tuyến tổng quát dạng Gerstewitz được nghiên cứu. Sau đó, các tính chất này được sử dụng để nghiên cứu các đặc trưng của các quan hệ tập thông qua cấu trúc trội chứa biến và nguyên lý biến phân Ekeland cho bài toán tối ưu véc-tơ với cấu trúc trội chứa biến.

Từ khóa: *Bài toán tối ưu véc-tơ, cấu trúc trội chứa biến, nguyên lý biến phân Ekeland, hàm vô hướng hóa phi tuyến*

ABSTRACT

Several properties of the generalized nonlinear scalarization function of the Gerstewitz type are investigated. These properties are then employed to study the characteristics of set relations via variable domination structures and Ekeland's variational principle for vector optimization problems with variable domination structures.

Keywords: *Vector optimization problem, variable domination structure, Ekeland variational principle, nonlinear scalarization function*

1. GIỚI THIỆU

Trong quá trình nghiên cứu bài toán tối ưu véc-tơ, phương pháp vô hướng hóa đã nổi bật như một công cụ hữu hiệu, cho phép chuyển đổi bài toán tối ưu véc-tơ thành các bài toán vô hướng tương ứng, từ đó áp dụng các kỹ thuật cổ điển để đạt được các kết quả quan trọng. Đặc biệt, các phương pháp vô hướng hóa phi tuyến theo nghĩa Gerstewitz đã chứng tỏ hiệu quả vượt trội trong việc xử lý các mô hình không lồi và các bài toán có cấu trúc trội chứa biến phức tạp, xem Chen and Yang (2002), Chen et al. (2005), Anh and Tam (2024).

Vào năm 1974, Yu (1974) đã đề xuất một lớp bài toán tối ưu véc-tơ có cấu trúc thứ tự đặc biệt gọi là cấu trúc thứ tự chứa biến, trong đó quan hệ thứ tự phụ thuộc vào chính biến tối ưu. Mô hình này mở rộng khái niệm tính trội cổ điển, giúp mô tả tốt hơn các bài toán thực tế có tính linh hoạt trong thứ tự ưu tiên và có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực thực tiễn. Do đó, bài toán này đã thu hút sự quan tâm rộng rãi của các nhà toán học, xem Engau (2008), Eichfelder (2014).

Bên cạnh đó, nguyên lý biến phân Ekeland (viết tắt là EVP) là một trong những công cụ toán học quan trọng trong giải tích phi tuyến và lý thuyết tối ưu, với nhiều ứng dụng trong kinh tế học, lý thuyết điều khiển, lý thuyết trò chơi và các lĩnh vực liên quan. Trong vài thập kỷ qua, EVP đã được mở rộng theo nhiều hướng khác nhau, đặc biệt là cho các hàm có giá trị véc-tor, cả đơn trị lẫn đa trị. Cụ thể, Oettli

and Théra (1993) đã nghiên cứu EVP cho song hàm vô hướng và đạt được nhiều kết quả đáng chú ý, bao gồm cả nguyên lý cực tiểu không lồi của Takahashi như một hệ quả. Bianchi et al. (2005) tiếp tục phát triển hướng nghiên cứu này và ứng dụng vào các bài toán cân bằng không lồi. Đối với trường hợp EVP cho song hàm véc-tơ, các kết quả thú vị đã được công bố trong các công trình của Bianchi et al. (2007), Ansari (2007), Araya et al. (2008), Finet and Quarta (2008) và Qiu (2016). Ngoài ra, việc mở rộng EVP sang trường hợp song hàm đa trị cũng được chú ý trong các nghiên cứu của Zeng and Li (2009) và Tammer and Zălinescu (2011).

Xuất phát từ các quan sát trên, bài báo này tập trung nghiên cứu hai vấn đề chính. Thứ nhất là nghiên cứu một số tính chất hữu dụng của hàm vô hướng hóa phi tuyến tổng quát dạng Gerstewitz. Các tính chất này sau đó được sử dụng để nghiên cứu một số đặc trưng của quan hệ tập thông qua cấu trúc trội chứa biến và nghiên cứu một phiên bản của EVP cho bài toán tối ưu véc-tơ với cấu trúc trội chứa biến.

2. HÀM VÔ HƯỚNG HÓA PHI TUYẾN

2.1. Các khái niệm đại số trong không gian tuyến tính

Cho Y là một không gian tuyến tính. Một tập con A của Y được gọi là lồi nếu với mọi $y_1, y_2 \in A$ và $\lambda \in [0,1]$ thì $(1-\lambda)y_1 + \lambda y_2 \in A$. Tập con K của Y được gọi là một nón nếu với mọi $k \in K$ và $\alpha \geq 0$ thì $\alpha k \in K$. Nón K được gọi là lồi nếu K là một tập lồi và có đỉnh nếu $K \cap (-K) = \{0_Y\}$ với 0_Y là véc-tơ không trong không gian tuyến tính Y.

Định nghĩa 2.1. (Anh and Tam, 2024) Cho Ω là một tập con khác rỗng của không gian tuyến tính Y. Khi đó,

(a) *phần trong đại số* của Ω là tập hợp

$$\mathrm{cor}\Omega := \{a \in \Omega: \forall y \in Y, \exists \delta > 0 \text{ sao cho } a + [0,\delta]y \subset \Omega\}.$$

(b) *biên đại số* của Ω là tập hợp

$$\mathrm{abd}\Omega := \{y \in Y: y \notin \mathrm{cor}\Omega \text{ và } y \notin \mathrm{cor}(Y \backslash \Omega)\}.$$

(c) Điểm $y \in Y$ được gọi là một *điểm dính đại số* của Ω nếu như tồn tại $a \in \Omega$ sao cho $(1-\lambda)a + \lambda y \in \Omega$ với mọi $\lambda \in [0,1)$.

Tập hợp Ω cùng với tất cả các điểm dính đại số của Ω được gọi là *bao đóng đại số* của nó và được kí hiệu là $\mathrm{acl}\Omega$.

Tập Ω được gọi là *mở đại số* nếu $\Omega = \mathrm{cor}\Omega$; *đóng đại số* nếu $\Omega = \mathrm{acl}\Omega$ và *đặc đại số* nếu $\mathrm{cor}\Omega$ là tập không rỗng.

2.2. Hàm vô hướng hóa phi tuyến

Trước hết, ta nhắc lại một số khái niệm về tính dưới cộng tính, đơn điệu và đơn điệu chặt ứng với một tập cho trước của hàm số thực.

Định nghĩa 2.2. Cho $\zeta: Y \to \mathbb{R}$ là một hàm số và Γ là một tập con không rỗng của Y. Khi đó,

(a) ζ được gọi là *dưới cộng tính* nếu với mọi $y_1, y_2 \in Y$ thì

$$\zeta(y_1 + y_2) \leq \zeta(y_1) + \zeta(y_2).$$

(b) ζ được gọi là Γ-*đơn điệu tăng* nếu với mọi $y_1, y_2 \in Y$ thỏa mãn $y_2 \in y_1 + \Gamma$ thì

$$\zeta(y_1) \leq \zeta(y_2).$$

(c) ζ được gọi là Γ-*đơn điệu tăng chặt* nếu với mọi $y_1, y_2 \in Y$ thỏa mãn $y_2 \in y_1 + \mathrm{cor}\Gamma$ thì

$$\zeta(y_1) < \zeta(y_2).$$

Định nghĩa 2.3. Cho Θ là một tập con đóng và chính thường (tức là $\emptyset \neq \Theta \neq Y$) của Y, $q \in Y \setminus \{0_Y\}$ và điều kiện sau đây được thỏa mãn

$$\Theta + [0,+\infty)q \subset \Theta.$$

Khi đó, hàm số có giá trị thực mở rộng $\phi_\Theta^q: Y \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ xác định như sau, với mỗi $y \in Y$,

$$\phi_\Theta^q(y) := \inf\{t \in \mathbb{R}: y \in tq - \Theta\}, \qquad (1)$$

được gọi là hàm Gerstewitz.

Ta xét giả thiết sau đây:

(H_0): Θ là một tập đóng đại số, đặc đại số, có đỉnh, chính thường, $0_Y \in \Theta$ và thỏa mãn điều kiện

$$\Theta + (0,+\infty)q \subset \mathrm{cor}\Theta.$$

Bổ đề sau đây được suy ra từ các Định lý 3.5, 3.10 và 3.12 trong Anh and Tam (2024).

Bổ đề 2.1. *Giả sử điều kiện (H_0) được thỏa mãn. Khi đó,*

(i) ϕ_Θ^q *là liên tục;*
(ii) $\phi_\Theta^q(y) \leq t \Leftrightarrow y \in tq - \Theta$;
(iii) $\phi_\Theta^q(y) < t \Leftrightarrow y \in tq - \mathrm{cor}\Theta$;
(iv) $\phi_\Theta^q(y) = t \Leftrightarrow y \in tq - \mathrm{abd}\Theta$;
(v) $\phi_\Theta^q(y + tq) = \phi(y) + t$;

(vi) ϕ_Θ^q *là* Γ*-đơn điệu khi và chỉ khi* $\Theta + \Gamma \subset \Theta$ *với* Γ *là một tập con khác rỗng của* Y.

Hệ quả sau đây cho ta các tính chất của hàm số ϕ_Θ^q trong Bổ đề 2.1 và chúng được sử dụng trong các phần tiếp theo. Ta kí hiệu

$$\mathbb{R}_+ := \{r \in \mathbb{R}: r \geq 0\}.$$

Hệ quả 2.1. *Với* $\epsilon \in \mathbb{R}_+$*, các kết quả sau đây là đúng.*

(i) $\phi_\Theta^q(q) = 1$.

(ii) $\phi_\Theta^q(0_Y) = 0$.

(iii) $\phi_\Theta^q(\epsilon q) = \epsilon$ *và*

$$\phi_\Theta^q(-\epsilon q) = -\phi(\epsilon q) = -\epsilon.$$

Chứng minh: (i) Theo định nghĩa ta có

$$\phi_\Theta^q(y) := \inf\{t \in \mathbb{R}: y \in tq - \Theta\}.$$

Mặt khác, do $0_Y \in \mathrm{abd}\Theta$ nên $q \in q - \mathrm{abd}\Theta$. Áp dụng Bổ đề 2.1(iv), ta được $\phi(q) = 1$.

(ii) Được suy ra trực tiếp từ (i).

(iii) Ta chứng minh rằng $\phi_\Theta^q(\epsilon q) = \epsilon$. Thật vậy, theo Bổ đề 2.1(v), với mọi $y \in Y, t \in \mathbb{R}$, ta có

$$\phi_\Theta^q(y + tq) = \phi_\Theta^q(y) + t.$$

Do đó,

$$\phi_\Theta^q(\epsilon q) = \phi_\Theta^q(0_Y + \epsilon q) = \phi_\Theta^q(0_Y) + \epsilon,$$

Theo (ii) ta được $\phi_\Theta^q(0_Y) = 0$. Do đó, ta suy ra $\phi_\Theta^q(\epsilon q) = \epsilon$. Phần còn lại của việc chứng minh được thực hiện tương tự. □

Lấy động lực từ khái niệm nửa liên tục dưới của ánh xạ véc-tơ đơn trị trong Luc (1989), chúng tôi giới thiệu khái niệm sau đây.

Định nghĩa 2.4. Xét X là không gian véc-tơ tô pô, S là một tập con không rỗng của X và $g: X \to Y$ là một ánh xạ có giá trị véc-tơ. Khi đó, g được gọi là (q, Θ, S)*-nửa liên tục dưới* nếu tập hợp

$$L := \{w \in S: g(w) \in tq - \mathrm{acl}\Theta\},$$

là một tập con đóng trong X với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Nhận xét 2.1. Trong trường hợp Y là một không gian véc-tơ tô pô và $\Theta = C$ là một nón thì Định nghĩa 2.4 trùng với định nghĩa tương ứng trong Luc (1989). Ta dễ dàng thấy rằng mỗi ánh xạ là C-nửa liên tục cũng là (q, C, S)-nửa liên tục dưới. Hơn nữa, nếu $Y = \mathbb{R}$ thì Định nghĩa 2.4 thu về các khái niệm cổ điển của tính nửa liên tục.

Bổ đề 2.2. *Giả sử rằng*

(i) *điều kiện* (H_0) *được thỏa mãn*;

(ii) g *là* (q, Θ, S)*-nửa liên tục dưới.*

Khi đó, hàm số $\left(\phi_\Theta^q \circ g\right)$ *là nửa liên tục dưới.*

Chứng minh: Vì ánh xạ g là (q, Θ, S)-nửa liên tục dưới và tính đóng đại số của Θ nên ta suy ra tập hợp

$$L = \{w \in S: g(w) \in tq - \Theta\},$$

là một tập con đóng trong X với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Mặt khác, áp dụng Bổ đề 2.1(ii), ta có

$$\begin{aligned} L &= \{w \in S: g(w) \in tq - \Theta\} \\ &= \left\{w \in S: \phi_\Theta^q(g(w)) \leq t\right\} \\ &= \left\{w \in S: (\phi_\Theta^q \circ g)(w) \leq t\right\}. \end{aligned}$$

Do đó, tập $\left\{w \in S: (\phi_\Theta^q \circ g)(w) \leq t\right\}$ là đóng với mọi $t \in \mathbb{R}$. Điều này có nghĩa là $\phi_\Theta^q \circ g$ là nửa liên tục dưới. □

3. ĐẶC TRƯNG CỦA QUAN HỆ TẬP CHỨA BIẾN

Trong mục này, ta xét Y là một không gian tuyến tính, $q \in Y \setminus \{0_Y\}$ và kí hiệu $\mathcal{P}(Y)$ là tập hợp gồm các tập con khác rỗng của Y, tức là

$$\mathcal{P}(Y) := \{A \subset Y: A \neq \emptyset\}.$$

Sau đây, ta nhắc lại các quan hệ tập trong không gian tuyến tính Y.

Định nghĩa 3.1 Cho $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ và $D: Y \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó,

(a) *quan hệ dưới tổng quát chứa biến* được định nghĩa như sau:

$$A \preccurlyeq_l^D B :\Leftrightarrow B \subset \bigcup_{a \in A} (a + D(a)).$$

(b) *quan hệ trên tổng quát chứa biến* được định nghĩa như sau:

$$A \preccurlyeq_u^D B :\Leftrightarrow A \subset \bigcup_{b \in B} (b - D(b)).$$

Trong các phần sau, ta sử dụng các ký hiệu sau đây:

$$\widetilde{D}(A) := \bigcup_{a \in A} D(a),$$

$$\overline{D}(A) := \bigcap_{a \in A} D(a).$$

Các giả thiết sau đây đóng vai trò quan trọng trong việc nghiên cứu các đặc trưng của các quan hệ tập được đề cập ở trên.

(H_1) Với mọi $y \in Y, D(y)$ là đóng đại số và

$$D(y) + (0, +\infty)q \subset D(y).$$

(H_2) Với mọi $A \in \mathcal{P}(Y), \widetilde{D}(A)$ là đóng đại số, chính thường và

$$\widetilde{D}(A) + (0, +\infty)q \subset \widetilde{D}(A).$$

(H_3) Với mọi $A \in \mathcal{P}(Y), \overline{D}(A)$ là đóng đại số, chính thường và

$$\overline{D}(A) + (0, +\infty)q \subset \overline{D}(A).$$

Bây giờ, ta phát biểu kết quả cho sự đặc trưng của quan hệ $\preceq_l^D$.

Định lý 3.1. *Giả sử (H_2) được thỏa mãn và $\widetilde{D}(A) + \widetilde{D}(A) \subset \widetilde{D}(A)$ với mọi $A \in \mathcal{P}(Y)$. Khi đó, với mọi $A, B \in \mathcal{P}(Y)$, ta có*

$$A \preceq_l^D B \Longrightarrow \inf_{a\in A} \phi^q_{\widetilde{D}(A)}(a) \leq \inf_{b\in B} \phi^q_{\widetilde{D}(A)}(b).$$

Chứng minh: Giả sử rằng $A \preceq_l^D B$. Khi đó, với mọi $b \in B$ thì tồn tại $a_0 \in A$ sao cho

$$b \in a_0 + D(a_0).$$

Do đó,

$$b \in a_0 + \widetilde{D}(A).$$

Từ điều kiện $\widetilde{D}(A) + \widetilde{D}(A) \subset \widetilde{D}(A)$ và Bổ đề 2.1(vi) ta suy ra hàm số $\phi^q_{\widetilde{D}(A)}$ là $\widetilde{D}(A)$-đơn điệu. Suy ra $\phi^q_{\widetilde{D}(A)}(a_0) \leq \phi^q_{\widetilde{D}(A)}(b)$.

Điều này dẫn đến

$$\inf_{a\in A} \phi^q_{\widetilde{D}(A)}(a) \leq \inf_{b\in B} \phi^q_{\widetilde{D}(A)}(b).$$

Ta kết thúc chứng minh. □

Bây giờ ta nghiên cứu đặc trưng của quan hệ $\preceq_l^D$ bằng cách áp dụng hàm số (1) với $\Theta = a + \widetilde{D}(A)$ hoặc $\Theta = a + \overline{D}(A)$, với $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ và $a \in A$ cho trước.

Định lý 3.2. *Giả sử các giả thiết (H_2) và (H_3) được thỏa mãn. Khi đó, với mọi $A, B \in \mathcal{P}(Y)$, ta có:*

(i) $A \preceq_l^D B \Longrightarrow \sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \phi^q_{a+\widetilde{D}(A)}(-b) \leq 0$

(ii) Nếu $\inf_{a\in A} \phi^q_{a+\overline{D}(A)}(-b)$ đạt được với mọi $b \in B$ thì

$$\sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \phi^q_{a+\overline{D}(A)}(-b) \leq 0 \Longrightarrow A \preceq_l^D B.$$

Chứng minh: (i) Giả sử rằng $A \preceq_l^D B$. Khi đó với mọi $b \in B$ thì tồn tại $a_0 \in A$ sao cho

$$b \in a_0 + D(a_0),$$

hay tương đương,

$$a_0 - b \in -D(a_0).$$

Theo Bổ đề 2.1(ii), ta suy ra với mọi $b \in B$,

$$\phi^q_{a_0+\widetilde{D}(A)}(-b) \leq 0.$$

Suy ra

$$\sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \phi^q_{a+\widetilde{D}(A)}(-b) \leq 0.$$

(ii) Với $q \in \overline{D}(A) \setminus \{0_Y\}$ cho trước thỏa mãn với mọi $b \in B$, giá trị $\inf_{a\in A} \phi^q_{a+\overline{D}(A)}(-b)$ là đạt được. Giả sử rằng

$$\sup_{b\in B} \inf_{a\in A} \phi^q_{a+\overline{D}(A)}(-b) \leq 0.$$

Tức là, với mọi $b \in B$, ta có

$$\inf_{a\in A} \phi^q_{a+\overline{D}(A)}(-b) \leq 0.$$

Vì với mọi $b \in B$, $\inf_{a\in A} \phi^q_{a+\overline{D}(A)}(-b)$ là đạt được nên tồn tại $\bar{a}_0 \in A$ sao cho

$$\phi^q_{\bar{a}_0+\overline{D}(A)}(-b) = \inf_{a\in A} \phi^q_{a+\overline{D}(A)}(-b) \leq 0.$$

Áp dụng Bổ đề 2.1 ta suy ra

$$\bar{a}_0 - b \in -\overline{D}(A) \subset -D(\bar{a}_0),$$

hay

$$b \in \bar{a}_0 + D(\bar{a}_0).$$

Do đó, $A \preceq_l^D B$. □

Sau đây, ta áp dụng hàm số được định nghĩa trong (1) với $\Theta = -b + \widetilde{D}(B)$ hoặc $\Theta = -b + \overline{D}(B)$, với $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ và $b \in B$ cho trước.

Định lý 3.3. Giả sử giả thiết (H_2) và (H_3) được nghiệm đúng. Khi đó, với mọi $A, B \in \mathcal{P}(Y)$, ta có:

(i) $A \preceq_u^D B \Longrightarrow \sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \phi^q_{-b+\widetilde{D}(B)}(a) \leq 0.$

(ii) *Nếu $\inf_{b\in B} \phi^q_{-b+\overline{D}(B)}(a)$ đạt được với mọi $a \in A$. Khi đó,*

$$\sup_{a\in A} \inf_{b\in B} \phi^q_{-b+\overline{D}(B)}(a) \leq 0 \Longrightarrow A \preceq_u^D B.$$

Chứng minh: Vì kỹ thuật chứng minh tương tự với kỹ thuật chứng minh của Định lý 3.2 nên ta không trình bày ở đây. □

Chú ý 3.1. Ta thấy rằng với mọi $B \in \mathcal{P}(Y)$,

$$\widetilde{D}(B) \subset \widetilde{D}(Y) \text{ và } \overline{D}(Y) \subset \overline{D}(B).$$

Do đó, nếu các giả thiết của Định lý 3.3 được thỏa mãn thì ta được

(i) $A \preceq_u^D B \Longrightarrow \sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\phi^q_{-b+\widetilde{D}(Y)}(a) \leq 0.$

(ii) Nếu $\inf_{b\in B}\phi^q_{-b+\overline{D}(Y)}(a)$ đạt được với mọi $a \in A$ thì

$$\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\phi^q_{-b+\overline{D}(Y)}(a) \leq 0 \Longrightarrow A \preceq_u^D B.$$

4. NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND

4.1. Bài toán tối ưu véc-tơ

Cho X, Y là hai không gian tuyến tính, S là một tập con không rỗng của X, $D: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị và $q \in Y \setminus \{0_Y\}$ cho trước. Cho $f: X \to Y$ là một ánh xạ có giá trị véc-tơ. Bài toán tối ưu véc-tơ với cấu trúc trội chứa biến được xác định bởi ánh xạ đa trị D, kí hiệu là (VDOP), được phát biểu như sau:

$$\text{Min}\{f(x): x \in S\}.$$

Định nghĩa 4.1. Xét một phần tử $x_0 \in S$. Khi đó

(a) x_0 được gọi là một *ϵq-nghiệm cực tiểu* của (VDOP) nếu

$$(f(x_0) - \epsilon q - (D(x_0)\backslash\{0_Y\})) \cap f(S) = \emptyset.$$

(b) x_0 được gọi là một *ϵq-nghiệm cực tiểu yếu* của (VDOP) nếu

$$\big(f(x_0) - \epsilon q - \text{cor}D(x_0)\big) \cap f(S) = \emptyset.$$

Ta kí hiệu tập hợp các ϵq-nghiệm cực tiểu và tập hợp các ϵq-nghiệm cực tiểu yếu lần lượt là ϵq-Eff(S, f, D) và ϵq-wEff(S, f, D).

Bây giờ ta xét một phiên bản khác của hàm số (1) như sau: với mỗi $x \in S$, xét hàm số $\phi_x : Y \to \mathbb{R}$ xác định như sau, với mỗi $y \in Y$,

$$\phi_x(y) := \inf\{t \in \mathbb{R}: y \in tq - D(x)\}.$$

Bổ đề 4.1. *Cho $C: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị nón (tức là $C(x)$ là một nón với mọi $x \in X$). Giả sử rằng*

(i) *điều kiện (H_0) được thỏa mãn với $\Theta = D(x)$;*

(ii) *với mọi $x \in S, q \in \text{cor}D(x)$ và*

$$D(x) + C(x) \setminus \{0_Y\} \subset D(x).$$

Khi đó, nếu $x_0 \in \epsilon q$-$Eff(S, f, D)$ thì hàm số ϕ_{x_0} là C-đơn điệu chặt, liên tục và thỏa mãn điều kiện

$$\forall x \in S, \phi_{x_0}\big(f(x_0)\big) \leq \phi_{x_0}(f(x) + \epsilon q). \quad (2)$$

Hơn nữa, nếu giả thiết thêm rằng $D(x_0) + D(x_0) \subset D(x_0)$ thì hàm số ϕ_{x_0} là dưới cộng tính trên Y và thỏa mãn điều kiện

$$\forall x \in S, \phi_{x_0}\big(f(x_0)\big) \leq \phi_{x_0}\big(f(x)\big) + \phi_{x_0}(\epsilon q). \quad (3)$$

Chứng minh: Vì $x_0 \in \epsilon q$-Eff(S, f, D) nên theo định nghĩa ta có

$$\big(f(x_0) - \epsilon q - (D(x_0) \setminus \{0_Y\})\big) \cap f(S) = \emptyset.$$

Điều này tương đương với

$$\big(f(x_0) - (D(x_0) \setminus \{0_Y\})\big) \cap (f(S) + \epsilon q) = \emptyset.$$

Đặt $V(x_0) := f(x_0) - D(x_0) \setminus \{0_Y\}$ và $U := f(S) + \epsilon q$. Bằng cách lập luận tương tự như chứng minh của Định lý 2.3.6 trong Göpfert (2003), ta suy ra tồn tại một hàm số liên tục $\phi_{x_0}: Y \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\phi_{x_0}\big(f(x_0)\big) \leq \phi_{x_0}(f(S) + \epsilon q),$$

hay

$$\forall x \in S, \phi_{x_0}\big(f(x_0)\big) \leq \phi_{x_0}(f(x) + \epsilon q).$$

Nếu điều kiện $D(x_0) + D(x_0) \subset D(x_0)$ nghiệm đúng thì theo Định lý 3.8 trong Anh and Tam (2024) ta suy ra ϕ_{x_0} là một hàm số dưới cộng tính và từ bất đẳng thức trên ta suy ra

$$\forall x \in S, \phi_{x_0}\big(f(x_0)\big) \leq \phi_{x_0}(f(x)) + \phi_{x_0}(\epsilon q).$$

Ta kết thúc chứng minh ở đây. □

Bổ đề 4.2. *Cho $C: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị nón. Giả sử rằng*

(i) *$q \in \text{cor}C(x)$ với mọi $x \in S$.*

(ii) *ϕ_{x_0} là C-đơn điệu chặt, liên tục, dưới cộng tính và thỏa mãn điều kiện*

$$\forall x \in S, \phi_{x_0}\big(f(x_0)\big) \leq \phi_{x_0}\big(f(x)\big) - \phi_{x_0}(-\epsilon k^0).$$

Khi đó, $x_0 \in \epsilon q$-$wEff(S, f, D)$ với $D: X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị thỏa mãn các điều kiện sau đây

(a) $C(x_0) \setminus \{0_Y\} \subset D(x_0), 0_Y \in \text{acl}D(x_0) \setminus D(x_0)$,

(b) $\text{acl}D(x_0) + (C(x_0) \setminus \{0_Y\}) \subset D(x_0)$.

Chứng minh: Ta định nghĩa $D(x_0)$ như sau:

$$D(x_0) := \{y \in Y : \phi_{x_0}(-y + f(x_0) - \epsilon q) < \phi_{x_0}(f(x_0) - \epsilon q)\}.$$

Ta xét ánh xạ $\varphi_{x_0} : Y \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\varphi_{x_0}(y) := \phi_{x_0}(y + f(x_0) - \epsilon q), \forall y \in Y.$$

Khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}\varphi_{x_0}\big(f(S) + \epsilon q - f(x_0)\big) &= \phi_{x_0}(f(S)) \\ &\geq \phi_{x_0}\big(f(x_0)\big) + \phi_{x_0}(-\epsilon q) \\ &\geq \phi_{x_0}(f(x_0) - \epsilon q) \\ &= \varphi_{x_0}(0_Y).\end{aligned}$$

Suy ra

$$\begin{aligned}\phi_{x_0}\big(-D(x_0)\big) &= \phi_{x_0}(-D(x_0) + f(x_0) - \epsilon q) \\ &< \phi_{x_0}(f(x_0) - \epsilon q) \\ &= \phi_{x_0}(0_Y).\end{aligned}$$

Do đó,

$$\big(-\mathrm{cor}D(x_0)\big) \cap \big(f(S) + \epsilon q - f(x_0)\big) = \emptyset.$$

Điều này lại suy ra

$$\big(f(x_0) - \epsilon q - \mathrm{cor}D(x_0)\big) \cap f(S) = \emptyset.$$

Vì ϕ_{x_0} là C-đơn điệu chặt nên ta có

$$C(x_0) \setminus \{0_Y\} \subset D(x_0).$$

Ta chứng minh rằng

$$\mathrm{acl}D(x_0) + (C(x_0) \setminus \{0_Y\}) \subset D(x_0).$$

Thật vậy, lấy bất kỳ $y \in \mathrm{acl}D(x_0)$ và $b \in y + C(x_0) \setminus \{0_Y\}$, vì ϕ_{x_0} là C-đơn điệu chặt và $y \in \mathrm{acl}D(x_0) \subset \{y : \phi_{x_0}(-y) \leq \phi_{x_0}(0_Y)\}$ nên ta suy ra

$$\phi_{x_0}(-b) < \phi_{x_0}(-y) \leq \phi_{x_0}(0_Y).$$

Do đó, ta được

$$b \in \mathrm{acl}D(x_0) + (C(x_0) \setminus \{0_Y\}).$$

Điều này dẫn đến $b \in D(x_0)$. Vì $q \in \mathrm{cor}C(x_0)$ và $\mathrm{acl}D(x_0) + (C(x_0) \setminus \{0_Y\}) \subset D(x_0)$ nên ta suy ra

$$D(x_0) + \epsilon q \subset D(x_0).$$

Hơn nữa, do $0_Y \in \mathrm{acl}(C(x_0) \setminus \{0_Y\}), C(x_0) \setminus \{0_Y\} \subset D(x_0)$ và $0_Y \notin D(x_0)$ nên ta suy ra $0_Y \in \mathrm{acl}D(x_0) \setminus D(x_0)$. □

4.2. Nguyên lý biến phân Ekeland

Trong phần này, ta xét X là một không gian Banach và D, C có giá trị lồi và đóng. Trước hết, ta nhắc lại nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm số có giá trị thực (Ekeland, 1979) như sau:

Định lý 4.1. (Nguyên lý biến phân Ekeland) *Cho U là một tập con đóng của X, $h : U \to \mathbb{R}$ là một hàm số nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trong U và $\epsilon > 0$. Với mỗi $u \in U$ thỏa mãn*

$$h(u) \leq \inf\{h(v) : v \in U\} + \epsilon,$$

thì tồn tại $u_\epsilon \in U$ thỏa mãn các điều kiện sau

(a) $h(u_\epsilon) \leq h(u) \leq \inf\{h(v) : v \in U\} + \epsilon$,
(b) $\|u_\epsilon - u\| \leq \sqrt{\epsilon}$,
(c) $\forall v \in U, h(u_\epsilon) \leq h(v) + \sqrt{\epsilon}\|u_\epsilon - u\|$.

Định lý sau đây cho ta một sự mở rộng của Nguyên lý biến phân Ekeland cho nghiệm cực tiểu xấp xỉ của bài toán (VDOP).

Định lý 4.2. *Xét bài toán (VDOP) với S là tập đóng, giả sử rằng*

(i) *điều kiện (H_0) được thỏa mãn;*
(ii) $D(x) + D(x) \subset D(x)$ *với mọi* $x \in S$;
(iii) *với mọi* $x \in S, q \in \mathrm{cor}C(x)$ *và* $D(x) + C(x) \setminus \{0_Y\} \subset D(x)$;
(iv) f *là* (q, D, S)*-nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trong* S;
(v) *tồn tại* $\bar{x} \in \epsilon q\text{-Eff}(S, f, D)$ *và với mọi* $x \in S$ *thì* $D(x) \subset D(\bar{x})$.

Khi đó, tồn tại một điểm $x_\epsilon \in S$ thỏa mãn các điều kiện sau đây:

(a) $x_\epsilon \in \epsilon q\text{-wEff}(S, f, C)$,
(b) $\|\bar{x} - x_\epsilon\| \leq \sqrt{\epsilon}$,
(c) $x_\epsilon \in \mathrm{wEff}\big(S, f_{\epsilon q}, C\big)$ *với*

$$f_{\epsilon q}(x) := f(x) + \sqrt{\epsilon}\|x - x_\epsilon\| q.$$

Chứng minh: Ta sẽ chứng minh phần (a) và (b) trước. Vì $\bar{x} \in \epsilon q\text{-Eff}(S, f, D)$ nên ta có

$$(f(\bar{x}) - \epsilon q - (D(\bar{x}) \setminus \{0_Y\})) \cap f(S) = \emptyset.$$

Đặt $\bar{f} := f - f(\bar{x})$. Khi đó,

$$\big(\bar{f}(\bar{x}) - \epsilon q - (D(\bar{x}) \setminus \{0_Y\}) \cap \bar{f}(S) = \emptyset.$$

Kết hợp điều này với điều kiện $D(\bar{x}) + D(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$ rồi áp dụng Bổ đề 4.1, tồn một hàm số $\phi_{\bar{x}} : Y \to \mathbb{R}$ là C-đơn điệu chặt, liên tục và dưới cộng tính thỏa mãn

$$\forall s \in S, \phi_{\bar{x}}(\bar{f}(\bar{x})) \leq \phi_{\bar{x}}(\bar{f}(s)) + \phi_{\bar{x}}(\epsilon q) = \phi_{\bar{x}}(\bar{f}(s)) + \epsilon.$$

Suy ra

$$\phi_{\bar{x}}(\bar{f}(\bar{x})) \leq \inf_{s\in S} \phi_{\bar{x}}(\bar{f}(s)) + \epsilon.$$

Vì f và $\bar{f}$ là các hàm (q, D, S)-nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trong S nên ta suy ra được tính nửa liên tục dưới và bị chặn dưới của hàm số $\phi_{\bar{x}} \circ \bar{f}$. Áp dụng Định lý 4.1, tồn tại một phần tử $x_\epsilon \in S$ sao cho

$$\phi_{\bar{x}}(\bar{f}(x_\epsilon)) \leq \phi_{\bar{x}}(\bar{f}(\bar{x})) \leq \inf_{s\in S} \phi_{\bar{x}}(\bar{f}(s)) + \epsilon,$$

và $\|x_\epsilon - \bar{x}\| \leq \sqrt{\epsilon}$, tức là ta đã chứng minh xong các phần (a) và (b).

(c) Ta sẽ chứng minh rằng với mọi $s \in S$ thì

$$\phi_{\bar{x}}\left(\bar{f}(x_\epsilon)\right) \leq \phi_{\bar{x}}\left(\bar{f}(s)\right) + \sqrt{\epsilon}\|s - x_\epsilon\|.$$

Theo kết quả câu (a), với mọi $s \in S$, ta có

$$\begin{aligned}\phi_{\bar{x}}\left(\bar{f}(x_\epsilon)\right) &\leq \inf_{s\in S} \phi_{\bar{x}}\left(\bar{f}(s)\right) + \epsilon \\ &\leq \phi_{\bar{x}}\left(\bar{f}(s)\right) + \phi_{\bar{x}}(\epsilon q) \\ &= \phi_{\bar{x}}\left(\bar{f}(s)\right) - \phi_{\bar{x}}(-\epsilon q).\end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề 2.1(iii), $\bar{f} := f - f(\bar{x})$ và $C(x_\epsilon) \subset D(x_\epsilon) \subset D(\bar{x})$, ta có thể viết

$$\left(\bar{f}(x_\epsilon) - \epsilon q - \mathrm{cor} C(x_\epsilon)\right) \cap \bar{f}(S) = \emptyset.$$

Điều này suy ra $x_\epsilon \in \epsilon q\text{-wEff}(S, f, C)$.

Bây giờ ta giả sử rằng tồn tại một phần tử $s \in S$ sao cho

$$f(s) \in f(x_\epsilon) - \sqrt{\epsilon}\|s - x_\epsilon\|q - \mathrm{cor} C(x_\epsilon).$$

Hay tương đương

$$\bar{f}(s) \in \bar{f}(x_\epsilon) - \sqrt{\epsilon}\|s - x_\epsilon\|q - \mathrm{cor} C(x_\epsilon).$$

Vì $\phi_{\bar{x}}$ là C-đơn điệu chặt, liên tục và dưới cộng tính nên ta suy ra

$$\begin{aligned}\phi_{\bar{x}}(\bar{f}(s)) &< \phi_{\bar{x}}\left(\bar{f}(x_\epsilon) - \sqrt{\epsilon}\|s - x_\epsilon\|q\right) \\ &\leq \phi_{\bar{x}}\left(\bar{f}(x_\epsilon)\right) \\ &\quad + \phi_{\bar{x}}\left(-\sqrt{\epsilon}\|s - x_\epsilon\|\mathrm{q}\right).\end{aligned}$$

Áp dụng Hệ quả 2.1(iii), ta được

$\phi_{\bar{x}}\left(-\sqrt{\epsilon}\|s - x_\epsilon\|q\right) = -\sqrt{\epsilon}\|s - x_\epsilon\|$. Do đó

$$\phi_{\bar{x}}\left(\bar{f}(x_\epsilon)\right) > \phi_{\bar{x}}(\bar{f}(s)) + \sqrt{\epsilon}\|s - x_\epsilon\|.$$

Đây là một điều mâu thuẫn và ta kết thúc chứng minh. □

Trong trường hợp đặc biệt, khi $D(x) = D$ là một nón cố định lồi và đặc với mọi $x \in S$, ta suy ra được kết quả sau đây.

Hệ quả 4.1. *Giả sử rằng $D: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị với $D(x)$ là một nón lồi và đặc với mọi $x \in S$ và $q \in \bigcap_{x\in S} corD(x)$. Xét bài toán (VDOP) và giả sử rằng hàm mục tiêu $f: X \to Y$ là (q, D, S)-nửa liên tục và bị chặn dưới trong $S \subset X$ và $\epsilon > 0$. Nếu $\bar{x} \in \epsilon q\text{-}Eff(S, f, D)$ và $D(x) \subset D(\bar{x})$ với mọi $x \in S$ thì tồn tại một phần tử $x_\epsilon \in S$ thỏa mãn*

(i) $x_\epsilon \in \epsilon q\text{-wEff}(S, f, D)$,

(ii) $\|\bar{x} - x_\epsilon\| \leq \sqrt{\epsilon}$,

(iii) $x_\epsilon \in \mathrm{wEff}\left(S, f_{\epsilon q}, D\right)$ *với*

$$f_{\epsilon q}(x) := f(x) + \sqrt{\epsilon}\|x - x_\epsilon\|q.$$

LỜI CẢM TẠ

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Đại học Cần Thơ, mã số: CTCS2024-10-02.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q., & Tam, T. N. (2024). The use of a family of Gerstewitz scalarization functions in the context of vector optimization with variable domination structures to derive scalarization results. *Optimization Methods and Software, 39*(2), 368-383. https://doi.org/10.1080/10556788.2023.2296440

Ansari, Q. H. (2007). Vectorial form of Ekeland-type variational principle with applications to vector equilibrium problems and fixed-point theory. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *334*(1), 561-575. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.12.076

Araya, Y., Kimura, K., & Tanaka, T. (2008). Existence of vector equilibria via Ekeland's variational principle. *Taiwanese Journal of Mathematics*, *12*(8), 1991-2000. https://doi.org/10.11650/twjm/1500405131

Bianchi, M., Kassay, G., & Pini, R. (2005). Existence of equilibria via Ekeland's principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *305*(2), 502-512. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.11.042

Bianchi, M., Kassay, G., & Pini, R. (2007). Ekeland's principle for vector equilibrium problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *66*(7), 1454-1464. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.02.003

Chen, G. Y., & Yang, X. Q. (2002). Characterizations of variable domination

structures via nonlinear scalarization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *112*(1), 97-110. https://doi.org/10.1023/A:1013044529035

Chen, G. Y., Yang, X. Q., & Yu, H. (2005). A nonlinear scalarization function and generalized quasi-vector equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*, *32*(4), 451-466. https://doi.org/10.1007/s10898-003-2683-2

Eichfelder, G. (2014). Variable ordering structures in vector optimization. Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-54283-1

Ekeland, I. (1979). Nonconvex minimization problems. *Bulletin of the American Mathematical Society, 1*, 443–474. https://doi.org/10.1090/S0273-0979-1979-14595-6

Engau, A. (2008). Variable preference modeling with ideal-symmetric convex cones. *Journal of Global Optimization*, *42*(2), 295-311. https://doi.org/10.1007/s10898-007-9246-x

Finet, C., & Quarta, L. (2008). Vector-valued perturbed equilibrium problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *343*(1), 531-545. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.01.052

Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C., & Zălinescu, C. (2003). *Variational methods in partially ordered spaces*. New York: Springer.

Luc, D. T. (1989). *Theory of vector optimization*. Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4

Oettli, W., & Théra, M. (1993). Equivalents of Ekeland's principle. *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *48*(3), 385-392. https://doi.org/10.1017/S0004972700015847

Qiu, J. H. (2016). An equilibrium version of vectorial Ekeland variational principle and its applications to equilibrium problems. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, *27*, 26-42. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2015.07.05

Tammer, C., & Zălinescu, C. (2011). Vector variational principles for set-valued functions. In *Recent Developments in Vector Optimization* (pp. 367-415). Berlin, Heidelberg: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-21114 0_11

Yu, P. L. (1974). Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *14*(3), 319-377. https://doi.org/10.1007/BF00932614

Zeng, J., & Li, S. J. (2009). An Ekeland's variational principle for set-valued mappings with applications. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, *230*(2), 477-484. https://doi.org/10.1016/j.cam.2008.12.014