Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN **1859-2333** | e-ISSN **2815-5599**

DOI:10.22144/ctujos.2026.117

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG ĐA TRỊ THEO CẤU TRÚC TRỘI VÀ CÁC ỨNG DỤNG

Lâm Quốc Anh[1] và Nguyễn Xuân Hải[2,*]
[1]*Trường Sư phạm, Đại học Cần Thơ, Việt Nam*
[2]*Khoa Cơ bản 2, Học viện Công nghệ bưu chính viễn thông, Việt Nam*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): haingx@ptit.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 27/09/2025
Sửa bài (Revised): 30/10/2025
Duyệt đăng (Accepted): 16/04/2026

Title: *Existence of solutions to set equilibrium problems under domination structure and applications*

Author(s): *Lam Quoc Anh[1] and Nguyen Xuan Hai[2,*]*

Affiliation(s): *[1]School of Education, Can Tho University, Viet Nam; [2]Department of Scientific Fundamentals 2, Posts and Telecommunications Institute of Technology, Viet Nam*

TÓM TẮT

Trong bài báo này,các bài toán cân bằng đa trị theo cấu trúc trội trong không gian tôpô không yêu cầu được trang bị cấu trúc tuyến tính được nghiên cứu. Sự tồn tại nghiệm của bài toán này được tiếp cận trực tiếp và không sử dụng đến cấu trúc lồi của tập ràng buộc và hàm mục tiêu cũng như các nguyên lý điểm bất động và nguyên lý biến phân Ekeland. Những kết quả trên được áp dụng vào bất đẳng thức biến phân và bài toán cân bằng mạng giao thông. Ngoài ra, bài báo cũng cung cấp những thí dụ số để minh họa cho khả năng vận dụng của các kết quả đạt được.

Từ khóa: *Bài toán cân bằng, bất đẳng thức biến phân, bài toán mạng giao thông, sự tồn tại nghiệm*

ABSTRACT

In this paper, we investigate set-valued equilibrium problems under domination structures in topological spaces without assuming any linear structure. The existence of solutions is established via a direct approach, without relying on the convexity of the constraint sets and objective mappings, or on fixed point principles and Ekeland's variational principles. The obtained results are further applied to variational inequalities and traffic network equilibrium problems. Moreover, numerical examples are provided to illustrate the applicability of the obtained results.

Keywords: *Equilibrium problems, existence of solution, traffic network problems, variational inequalities*

1. GIỚI THIỆU

Các khái niệm bài toán cân bằng lần đầu được Blum and Oettli (1994) giới thiệu như một sự tổng quát của bài toán tối ưu và các bài toán liên quan được đề cập trong bài báo. Từ đó đến nay, có rất nhiều ứng dụng khác của bài toán cân bằng được đề cập như: bài toán cân bằng Nash, bài toán minimax, bài toán mạng giao thông,… Vấn đề quan trọng hàng đầu trong lý thuyết khi nghiên cứu bài toán này chính là sự tồn tại nghiệm, ta có thể xem trong các tài liệu (Fu, 2005; Bianchi et al., 2007; Hai & Khanh, 2007a, 2007b; Gutierrez et al., 2017; Gutierrez et al., 2018; Al-Homidal & Ansari, 2020; Zhou et al., 2025). Công cụ để chứng minh sự tồn tại nghiệm rất phong phú, có thể liệt kê như: các dạng của định lý KKM, các định lý điểm bất động, nguyên lý biến phân Ekeland,… Phần lớn các kết quả khi sử dụng công cụ là các dạng của định lý KKM hay các định lý điểm bất động đều yêu cầu về tính lồi trên các dữ liệu của bài toán (Fu, 2005; Hai & Khanh, 2007a). Các kết quả khi áp dụng nguyên lý biến phân Ekeland có thể cần giả thiết không lồi, tuy nhiên các kết quả này phần lớn chỉ xét với mô hình của bài toán cân bằng dạng tương đối đơn giản (bài toán đơn trị chứa hai biến) trong không gian metric, chẳng hạn xem trong tài liệu Al-Homidal and Ansari (2020); Bianchi et al. (2007); Gutierrez et al. (2017).

Trong bài báo này, mô hình bài toán cân bằng đa trị gồm ba biến xét trong không gian tôpô tổng quát được nghiên cứu. Các kết quả đạt được về sự tồn tại nghiệm cho bài toán này với các giả thiết không lồi. Kỹ thuật chứng minh không cần đến các công cụ thường dùng như nguyên lý biến phân Ekeland hay các nguyên lý điểm bất động dạng KKM-Fan,… mà chỉ cần sử dụng các phép toán trên tập và ánh xạ đa trị. Điều này giúp cho việc tiếp cận của người đọc dễ dàng hơn, đặc biệt là các sinh viên và học viên cao học.

Sau khi đạt được các kết quả chính, bài báo cũng giới thiệu các ứng dụng của kết quả đạt được vào các mô hình cơ bản trong tối ưu hoá. Cụ thể, ứng dụng của kết quả trên vào bất đẳng thức biến phân và bài toán mạng giao thông. Đặc biệt với bài toán mạng giao thông, chúng tôi đưa ra một mô hình mới với ràng buộc tải năng tổng quát, sau đó thiết lập được điều kiện tồn tại của các loại dòng cân bằng của mô hình bài toán này.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Sau đây là một số kiến thức liên quan đến giải tích đa trị sẽ dùng trong bài báo. Gọi X, Y là các không gian vector tôpô, $P(Y)$ là tập hợp các tập con khác rỗng của Y.

Định nghĩa 2.1. Một tập con A của X được gọi là lồi nếu với mọi $x, z \in A$ và với mọi $t \in [0,1]$, ta luôn có được quan hệ dưới đây:

$$tx + (1-t)z \in A.$$

Định nghĩa 2.2. Một tập con C khác rỗng của Y được gọi là một nón nếu, với mọi $z \in C$ và với mọi số thực $r \geq 0$, ta luôn có $rz \in C$.

Nón $C \subset Y$ được gọi là một nón đóng nếu C là một nón và là một tập đóng trong Y.

Nón $C \subset Y$ được gọi là một nón lồi nếu C là một nón và là một tập lồi trong Y. Một dạng phát biểu tương đương của nón lồi là: C là một nón lồi nếu C là một nón và $C + C = C$.

Nón $C \subset Y$ được gọi là một nón có đỉnh (hay còn gọi là nón nhọn) nếu C là một nón và

$$C \cap (-C) = \{0_Y\}.$$

Ví dụ 2.1. Trong không gian $\mathbb{R}$, các nón lồi đóng có đỉnh bao gồm:

$$C_1 = \{0\},$$
$$C_2 = \mathbb{R}_+ := [0, +\infty),$$
$$C_3 = \mathbb{R}_- := (-\infty, 0].$$

Ví dụ 2.2. Trong không gian $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$, chúng ta sẽ có vô số các nón lồi đóng và có đỉnh. Các nón thông dụng được các nhà nghiên cứu quan tâm như:

Nón không âm:

$$\mathbb{R}^n_+ := \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_k \geq 0, k = 1, \cdots n\}.$$

Nón Lorent (nón que kem):

$$C_l := \left\{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq (x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Một ví dụ về nón có đỉnh không đóng và cũng không mở, nhưng là một nón lồi có đỉnh đó là nón từ điển, nón này thường được sử dụng trong việc xếp hạng các đội tham gia các kỳ thi đấu thể thao:

$$C_{lex} := 0_{\mathbb{R}^n} \cup \{(x_1, \cdots, x_n) : \exists k \in N, 1 \leq k \leq n, \\ x_l = 0 \ \forall\, l \leq k, x_k > 0\}.$$

Định nghĩa 2.3. Xét ánh xạ đa trị $H: X \to 2^Y$ và $x_0 \in X$. Khi đó, ánh xạ đa trị H được gọi là

(a) đóng nếu và chỉ nếu tập đồ thị

$$\text{Graph}H = (x, y) \in X \times Y : y \in H(x)$$

của H là một tập đóng trong $X \times Y$;

(b) nửa liên tục trên tại x_0 nếu, với mọi lân cận mở V của $H(x_0)$, tức là $H(x_0) \subset V$, tồn tại một lân cận mở U của x_0 sao cho

$$H(x) \subset V \ \ \forall x \in U;$$

(c) nửa liên tục dưới tại x_0 nếu, với mọi tập con mở V của Y với $H(x_0) \cap V \neq \emptyset$, tồn tại một lân cận mở U của x_0 sao cho

$$H(x) \cap V \neq \emptyset \ \ \forall x \in U;$$

(d) liên tục tại x_0, nếu H đồng thời là nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại x_0;

(e) nửa liên tục trên/nửa liên tục dưới/liên tục trên một tập con $A \subset X$, nếu H là nửa liên tục trên/nửa liên tục dưới/liên tục tại mọi điểm trong A. Trong trường hợp $A = X$, ta nói rằng H là nửa liên tục trên/nửa liên tục dưới/liên tục và bỏ đi cụm từ "trong X".

Từ định nghĩa về tính nửa liên tục của ánh xạ đa trị, chúng ta dễ dàng kiểm tra rằng, trong trường hợp ánh xạ đa trị H nhận giá trị đơn phần tử, tức là trở thành một ánh xạ đơn trị, thì các khái niệm nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới trùng với nhau. Do đó, để giảm nhẹ các khái niệm nửa liên tục ở trên để chúng vẫn là khác nhau ngay cả trong trường hợp H là ánh xạ đơn, các khái niệm nửa liên tục theo nón đã được đề xuất như định nghĩa bên dưới.

Định nghĩa 2.4. Xét ánh xạ đa trị $H: X \to P(Y)$, nón $C \subset Y$ và $x_0 \in X$. Khi đó, ánh xạ đa trị H được gọi là

(a) C-nửa liên tục trên tại x_0 nếu, với mọi lân cận mở V của $H(x_0)$, tồn tại một lân cận mở U của x_0 sao cho

$$H(x) \subset V + C \ \ \forall x \in U.$$

(b) C-nửa liên tục dưới tại $x_0 \in X$ nếu và chỉ nếu với mọi tập mở V trong Y với

$$V \cap H(x_o) \neq \emptyset,$$

thì tồn tại một lân cận mở của U của x_o sao cho

$$H(x) \cap (V - C) \neq \emptyset,$$

với mọi $x \in U \cap A$.

(c) C-liên tục tại x_0, nếu H đồng thời là C-nửa liên tục trên và C-nửa liên tục dưới tại x_0;

(d) C-nửa liên tục trên/C-nửa liên tục dưới/C-liên tục trên một tập con $A \subset X$, nếu H là C-nửa liên tục trên/C-nửa liên tục dưới/C-liên tục tại mọi điểm trong A. Trong trường hợp $A = X$, ta nói rằng H là nửa liên tục trên/nửa liên tục dưới/liên tục và bỏ đi cụm từ "trong X".

Ví dụ 2.3. Xét $X = Y = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}_+$, Q là tập hợp các số hữu tỉ, và ánh xạ đa trị $H: \mathbb{R} \to P(Y)$ được xác định bởi:

$$H(x) = \begin{cases} \{0,1\}, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, \\ \{0,2\}, & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Khi đó, H không nửa liên tục trên và không nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$. Tuy nhiên, H đồng thời là $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục trên và $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$.

Để minh hoạ cho sự khác biệt của các khái niệm nửa liên tục theo nón ngay cả trong trường hợp H là ánh xạ đơn trị, chúng ta xem xét thí dụ về các hàm nổi tiếng dưới đây.

Ví dụ 2.4. Xét $X = Y = R$, $C = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{Q}$ là tập hợp các số hữu tỉ, và hàm dưới đây:

Hàm Dirichlet: $D: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{nếu } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Hàm dấu: $\operatorname{sign}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} 1, & \text{nếu } x > 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0, \\ -1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Khi đó, D là $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x \in \mathbb{Q}$, và là $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục trên tại mọi điểm $x \in I := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Tuy nhiên, D không $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục trên tại mọi điểm $x \in \mathbb{Q}$ và cũng không $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x \in I$. Trong khi đó, hàm sign là $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục dưới tại mọi điểm $x > 0$, và là $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục trên tại mọi điểm $x < 0$. Nhưng hàm sign không là $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục trên tại bất kỳ điểm nào trong $(0, +\infty)$, và không là $\mathbb{R}_+$-nửa liên tục dưới tại bất kỳ điểm nào trong $(-\infty, 0)$.

3. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG THEO CẤU TRÚC TRỘI

Ta xét bài toán cân bằng như sau: cho X, Y, Z là các không gian tôpô; $A \subset X$ là tập compact khác rỗng và $C \subset Y$ là một tập con không rỗng trong Y. Xét các ánh xạ đa trị

$$T: A \to 2^Z,$$
$$F: T(A) \times A \times A \to 2^Y$$

Ta xét các bài toán cân bằng đa trị theo cấu trúc trội sau đây:

(EP1): Tìm $\overline{x} \in A$ sao cho $\forall y \in A$, $\forall \overline{t} \in T(\overline{x})$, $F(\overline{t}, y, \overline{x}) \subset C$.

(EP2): Tìm $\overline{x} \in A$ sao cho, $\forall y \in A$, $\exists \overline{t} \in T(\overline{x})$, $F(\overline{t}, y, \overline{x}) \subset C$.

Trong trường hợp C là một nón trong Y, thì các bài toán (EP1) và (EP2) trở thành các bài toán cân bằng đa trị đã được xem xét trong (Balaj, 2013). Tuy nhiên, để việc vận dụng của bài toán cân bằng được thuận lợi và đáp ứng đa dạng các trường hợp thực tế, nên trong nghiên cứu này chúng tôi không đưa ra những cấu trúc đặc biệt nào cho tập trội C. Hơn nữa, trong nghiên cứu này, chúng tôi cũng hạn chế sử dụ cấu trúc tuyến tính của các không gian, chỉ trừ trường hợp cần thảo luận cấu trúc liên tục mà chúng ta đã thảo luận trong mục trước.

Bây giờ chúng ta bắt đầu thảo luận về chủ đề chính của nghiên cứu này, tức là xem xét các điều kiện để các bài toán (EP1) và (EP2) có nghiệm.

Định lý 3.1. *Với bài toán (EP1) giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(i) Với mỗi $x \in A$ và $t \in T(x)$ ta có

$$F(t, x, x) \subset C.$$

(ii) Với mỗi $y \in A$, tập hợp

$$\{x \in A: \forall t \in T(x), F(t, y, x) \subset C\}$$

là đóng.

(iii) Với bất kỳ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ với $n \geq 2$ và $x_{n+1} := x_1$, tồn tại $i \in \{1,2, \ldots, n\}$ sao cho với mọi $t \in T(x_i)$ thì

$$F(t, x_i, x_{i+1}) \subset C.$$

Khi đó, bài toán (EP1) có nghiệm.

Chứng minh

Đầu tiên ta sẽ chứng minh

$$\bigcap_{y \in A}\{x \in A: \forall t \in T(x), F(t, y, x) \subset C\} \neq \emptyset. \quad (1)$$

Để làm điều này ta đặt ánh xạ đa trị $\Phi: A \to 2^A$ được xác định như sau:

$$\Phi(y) := \{x \in A: \forall t \in T(x),\ F(t, y, x) \subset C\},$$

với mọi $y \in A$.

Việc chứng minh được chia thành hai bước sau.

Bước 1: Với mọi $M = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset A$, ta sẽ chỉ ra rằng tồn tại $y_i \in M$ để bao hàm thức dưới đây xảy ra:

$$M \subset \Phi(y_i).$$

Thật vậy, giả sử ngược lại rằng $M \not\subset \Phi(y_i)$ với mọi $i = 1,2, \ldots, n$. Khi đó, $M \not\subset \Phi(y_1)$. Giả thiết (i) dẫn đến $y_1 \in \Phi(y_1)$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $y_2 \notin \Phi(y_1)$, tức là tồn tại $t \in T(y_2)$ để cho

$$F(t, y_2, y_1) \not\subset C.$$

Từ giả thiết (iii), ta suy ra rằng với mọi $t \in T(x_2)$, ta luôn có được bao hàm thức

$$F(t, y_1, y_2) \subset C,$$

nghĩa là $y_1 \in \Phi(y_2)$ và vì vậy

$$y_1, y_2 \in \Phi(y_2).$$

Hơn nữa, vì $M \not\subset \Phi(y_2)$, ta có thể giả sử

$$y_3 \notin \Phi(y_2).$$

Sử dụng giả thiết (iii) tương tự như trên ta sẽ được

$$y_2 \in \Phi(y_3),$$

Và

$$y_1 \in \Phi(y_3).$$

Như vậy,

$$\{y_1, y_2, y_3\} \in \Phi(y_3).$$

Tiếp tục quá trình này ta sẽ được

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_k\} \subset \Phi(y_k),$$

với mọi $k \in 1,2, \ldots, n$.

Do vậy, ta có

$$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset \Phi(y_n),$$

Đây là một điều không thể xảy ra.

Bước 2: Tiếp theo ta sẽ chứng tỏ rằng với bất kỳ tập hữu hạn $M = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} \subset A$ tồn tại $y_i \in M$ sao cho:

$$y_i \in \bigcap_{x_j \in M} \Phi(x_j). \quad (2)$$

Ta chứng minh khẳng định này bằng phương pháp qui nạp trên tập $M_k = \{y_1, y_2, \ldots, y_k\}$.

Hiển nhiên là (2) đúng với $M_1 = \{y_1\}$.

Giả sử rằng (2) đúng với $M_k = \{y_1, \ldots, y_k\} \subset A$, trong đó $k \in N$ nào đó.

Ta sẽ chứng minh (2) đúng với M_{k+1}.

Khi đó, từ Bước 1, với

$$M_{k+1} = y_1, \ldots, y_k, y_{k+1} \subset A,$$

tồn tại $y_m (1 \leq m \leq k+1)$ sao cho

$$M_{k+1} \subset \Phi(y_m).$$

Hơn nữa, theo giả thiết qui nạp, tồn tại

$$y_i \in M_{k+1} \setminus \{y_m\}$$

sao cho $y_i \in \bigcap_{y_j \in M_{k+1} \setminus \{y_m\}} \Phi(y_j)$. Do vậy ta có

$$\bigcap_{y_j \in M_{k+1}} \Phi(y_j) = \left(\bigcap_{y_j \in M_{k+1}\{y_m\}} \Phi(y_j)\right) \cap \Phi(y_m)$$

$$\supset y_i \cap M_{k+1} = y_i.$$

Như vậy (2) đúng với M_{k+1}. Nói một cách khác,

$$\bigcap_{y \in M}\{x \in A: \forall t \in T(x), F(t, y, x) \subset C\} \neq \emptyset,$$

với mọi tập hữu hạn $M \subset A$.

Từ giả thiết (ii),

$$\{x \in A: \forall t \in T(x), F(t, y, x) \subset C\}$$

là tập compact, điều này dẫn đến khẳng định (1) là đúng. Giả sử rằng

$\overline{x} \in \bigcap_{y\in A}\{x \in A: \forall t \in T(x), F(t,y,x) \subset C\}$.

Điều này có nghĩa là

$\overline{x} \in \{x \in A: \forall t \in T(x), F(t,y,x) \subset C\}$

với mọi $y \in A$.

Do đó,

$$\forall y \in A, \forall \overline{t} \in T(\overline{x}), F(\overline{t}, y, \overline{x}) \subset C,$$

tức là bài toán (EP1) có nghiệm. ■

Nhận xét 3.1. Đối với hướng nghiên cứu về điều kiện tồn tại nghiệm cho các mô hình tối ưu, trong đó có bài toán cân bằng, thông thường các nghiên cứu sẽ sử dụng các định lý điểm bất động dạng KKM-Fan hoặc nguyên lý biến phân Ekeland. Ở đây, chúng tôi đã tiếp cận trực tiếp sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng (EP1) mà không sử dụng đến các kết quả bổ trợ vừa nêu. Điều này giúp cho bài báo dễ đọc và dễ tiếp cận nội dung hơn, đặc biệt là đối với các bạn đọc mới bắt đầu theo hướng nghiên cứu này.

Đối với bài toán (EP2), chúng ta cũng có được kết quả về điều kiện tồn tại nghiệm theo hướng tiếp cận vừa đề cập trong nhận xét trên. Các lập luận trong chứng minh là không tầm thường, tuy nhiên các kỹ thuật và cấu trúc sử dụng là tương tự như đã sử dụng trong chứng minh của Định lý 3.1 với sự thay đổi ở hàm Φ như sau:

$\Phi(y) \coloneqq \{x \in A: \exists t \in T(x),\ F(t,y,x) \subset C\}$.
Khi đó ta thu được điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán (EP2):

Định lý 3.2. *Với bài toán (EP2) giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(i) Với mỗi $x \in A$, tồn tại $t \in T(x)$ để cho $F(t,x,x) \subset C$.

(ii) Với mỗi $y \in A$, tập hợp

$$\{x \in A: \exists t \in T(x), F(t,y,x) \subset C\}$$

là đóng.

(iii) Với bất kỳ $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset A$ với $n \geq 2$ và $x_{n+1} \coloneqq x_1$, tồn tại $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, tồn tại $t \in T(x_i)$ sao cho $F(t, x_i, x_{i+1}) \subset C$.

Khi đó, bài toán (EP2) có nghiệm.

Ví dụ 3.1. Đặt $C = \mathbb{R}_+, A = [0,1] \cup [2,3]$, $T: A \to 2^{\mathbb{R}}$, $F: T(A) \times A \times A \to 2^{\mathbb{R}}$, với

$$T(x) = [0,x],$$

$$F(t,y,x) = \begin{cases}[0, t(y^3 - x^3)], \text{khi} y^3 \geq x^3 \\ [t(y^3 - x^3), 0], \text{khi} y^3 < x^3\end{cases}.$$

Ta kiểm tra các điều kiện trong Định lý 3.1 là thỏa mãn. Điều kiện (i) là hiển nhiên. Để kiểm tra điều kiện (ii), tập sau

$$\{x \in A: \forall t \in T(x), F(t,y,x) \subset C\} =$$
$$= \{x \in A: x \leq y, \forall t \in T(x), F(t,y,x) \subset C\}$$
$$= \{x \in A: x \leq y\},$$

là một tập đóng. Để kiểm tra điều kiện (iii), ta thấy luôn tồn tại i sao cho $x_i^3 \geq x_{i+1}^3$, khi đó với mọi $t \in T(x_{i+1})$,

$$F(t, x_i, x_{i+1}) = [0, t(x_i^3 - x_{i+1}^3)] \subset \mathbb{R}^+.$$

Như vậy, dựa vào Định lý 3.1, bài toán (EP1) trong trường hợp này là có nghiệm, mặc dù A không là một tập lồi. Bằng cách kiểm tra trực tiếp ta cũng thấy $\overline{x} = 0$ là một nghiệm của bài toán này.

Nhận xét 3.2. Nếu Y là một không gian vector tôpô và C là một nón lồi đóng trong Y. Khi đó,

(a) Giả thiết (ii) trong Định lý 3.1 sẽ thỏa mãn nếu: T là nửa liên tục dưới, và $F(\cdot, y, \cdot)$ là C-nửa liên tục trên với mọi $y \in A$.

(b) Giả thiết (ii) trong Định lý 3.2 sẽ thỏa mãn nếu: T là nửa liên tục trên với giá trị compact, và $F(\cdot, y, \cdot)$ là C- nửa liên tục trên với mọi $y \in A$.

4. CÁC ÁP DỤNG

4.1. Bất đẳng thức biến phân đa trị

Trong mục này, ta nghiên cứu điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị.

Cho X là không gian tôpô; $A \subset X$ là tập compact khác trống, X^* là không gian đối ngẫu tôpô của X, và ánh xạ đa trị $T: A \to 2^{X^*}$. Ta xét các bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị sau đây:

(VI1): Tìm $\overline{x} \in A$ sao cho $\forall y \in A, \forall \overline{t} \in T(\overline{x})$,

$$\langle \overline{t}, y - \overline{x} \rangle \geq 0.$$

(VI2): Tìm $\overline{x} \in A$ sao cho, $\forall y \in A, \exists \overline{t} \in T(\overline{x})$,

$$\langle \overline{t}, y - \overline{x} \rangle \geq 0.$$

Ta có các kết quả sau.

Hệ quả 4.1. *Với bài toán (VI1) giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(i) Với mỗi $y \in A$, tập hợp

$$\{x \in A: \forall t \in T(x), \langle t, y - x \rangle \geq 0\}$$

là đóng.

(ii) Với bất kỳ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ với $n \geq 2$ và $x_{n+1} := x_1$, tồn tại $i \in \{1,2,\dots,n\}$ sao cho với mọi $t \in T(x_i)$ thì

$$\langle t, x_i - x_{i+1} \rangle \geq 0.$$

Khi đó, bài toán (VI1) có nghiệm.

Chứng minh

Xét ánh xạ F được cho bởi:

$$F(t, y, x) := \langle t, y - x \rangle.$$

Khi đó, bài toán (VI1) trở thành một trường hợp đặc biệt của bài toán (EP1). Hơn nữa, bằng các phép biến đổi cơ bản, chúng ta sẽ kiểm tra được rằng từ các giả thiết đã được đưa ra trong hệ quả trên sẽ dẫn đến tất cả các giả thiết của Định lý 3.1 đều được thỏa mãn. Do đó, việc bài toán (VI1) có nghiệm là một khẳng định đúng. ■

Bằng các lập luận như trong chứng minh của Hệ quả 4.1, chúng ta cũng có được kết quả về điều kiện giải được (điều kiện tồn tại nghiệm) của bài toán (VI2) thông qua Định lý 3.2 như sau:

Hệ quả 4.2. Với bài toán (VI2) giả sử các điều kiện sau đây thỏa mãn:

(i) Với mỗi $y \in A$, tập hợp

$$\{x \in A : \exists t \in T(x), \langle t, y - x \rangle \geq 0\}$$

là đóng.

(ii) Với bất kỳ $\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset A$ với $n \geq 2$ và $x_{n+1} := x_1$, tồn tại $i \in \{1,2,\dots,n\}$ sao cho tồn tại $t \in T(x_i)$ để cho

$$\langle t, x_i - x_{i+1} \rangle \geq 0.$$

Khi đó, bài toán (VI2) có nghiệm.

4.2. Bài toán mạng giao thông

Một trong nhiều ứng dụng của bất đẳng thức biến phân là bài toán cân bằng mạng giao thông. Phần lớn các nghiên cứu về bài toán mạng giao thông (Cao et al., 2018; Khanh & Luu, 2004; Maugeri, 1995) đều có ràng buộc tải năng trên các cung là tập không âm hoặc ngặt hơn là một khoảng đóng của R, tức là một tập lồi. Mô hình bài toán mạng giao thông chúng tôi đề xuất dưới đây với ràng buộc tải năng trên các cung là một tập tổng quát hơn (có thể không lồi).

Giử sử N là tập các nút, L là tập các cung,

$$W := (W_1, \dots, W_l)$$

là tập các cặp đầu cuối. Giả sử có r_j đường đi nối cặp đầu cuối W_j, ta đặt tập các đường đi này là P_j. Đặt

$$m := r_1 + \cdots + r_l,$$

tức là có tổng cộng m đường đi trong mạng giao thông. Gọi d_{ij} là nhu cầu giao thông trên cặp đầu cuối (i, j). Đặt

$$f := (f_1, \dots, f_m)$$

là vectơ dòng theo đường đi. Gọi x_a là dòng trên cung $a \in L$ và

$$x := (x_a)_{a \in L}$$

là vectơ dòng trên cung. Giả sử trên mỗi cung ta có ràng buộc tải năng $x_a \in B_a$ với $B_a \subset \mathbb{R}$. Giả sử giá trên mỗi đường đi R_s, $s = 1, \dots, m$, là tập

$$T_s(f) \subset R.$$

Do đó ta sẽ có một hàm đa trị $T: \mathbb{R}^m \to 2^{\mathbb{R}^m}$ với

$$T(f) := \big(T_1(f), \dots, T_m(f)\big).$$

Xét ma trận Δ liên kết đường đi-cung như sau

$$\Delta_{a,p} = \begin{cases} 1, & \text{khi } a \in p \\ 0, & \text{khi } a \notin p \end{cases}.$$

Khi đó ta có $x = \Delta . f$. Tập các dòng khả thi của mạng giao thông là:

$$\Omega := \left\{ f \in \mathbb{R}_+^m : \textstyle\sum_{p \in P_{ij}} f_p = d_{ij}, \forall (i,j) \in W; x_a \in B_a,\ \forall a \in L \right\}.$$

Chúng tôi đề xuất các khái niệm về dòng cân bằng cho bài toán như sau:

Định nghĩa 4.1.

(i) Một vectơ dòng đường đi f được gọi là một dòng cân bằng yếu nếu $\forall W_j \in W, \forall q, s \in P_j, \exists t \in T(f)$, sao cho nếu $f_p > 0$ thì $t_p \leq t_s$ miễn $x_a + \varepsilon \in B_a$ với mọi $a \in s$ và ε đủ nhỏ.

(ii) Một vectơ dòng đường đi f được gọi là một dòng cân bằng mạnh nếu $\forall W_j \in W, \forall q, s \in P_j, \forall t \in T(f)$, sao cho nếu $f_p > 0$ thì $t_p \leq t_s$ miễn $x_a + \varepsilon \in B_a$ với mọi $a \in s$ và ε đủ nhỏ.

Hệ quả 4.3. *Với bài toán mạng giao thông, giả sử Ω là tập compact và các điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(i) Với mỗi $f' \in \Omega$, tập hợp

$$\{f \in \Omega : \forall t \in T(f'), \langle t, f' - f \rangle \geq 0\}$$

là đóng.

(ii) Với bất kỳ $\{f^1, f^2, \dots, f^n\} \subset \Omega$ *với* $n \geq 2$ *và* $f^{n+1} \coloneqq f^1$*, tồn tại* $i \in \{1,2,\dots,n\}$ *sao cho với mọi* $t \in T(x_i)$ *thì*

$$\langle t, f^i - f^{i+1} \rangle \geq 0.$$

Khi đó, bài toán mạng giao thông có dòng cân bằng mạnh.

Chứng minh

Xét bài toán bất đẳng thức biến phân

(VI): Tìm $\overline{f} \in \Omega$ sao cho, $\forall f \in \Omega$, $\forall \overline{t} \in T(\overline{f})$,

$$\langle \overline{t}, f - \overline{f} \rangle \geq 0.$$

Khi đó, ta sẽ kiểm chứng được rằng từ các giả thiết được đưa ra trong Hệ quả 4.3 sẽ dẫn đến việc tất cả các điều kiện đặt ra trong Hệ quả 4.1 đều thỏa mãn. Vì vậy tồn tại nghiệm $\overline{f}$ của bài toán (VI). Bây giờ chúng ta sẽ chỉ ra rằng $\overline{f}$ cũng là dòng cân bằng mạnh của bài toán mạng giao thông.

Giả sử tồn tại một đường đi p nối cặp đầu cuối (i,j) sao cho $\overline{f}_p > 0$, khi đó nếu tồn tại một đường đi khác chưa bảo hòa q cũng nối cặp đầu cuối (i,j), ta xây dựng một vectơ dòng đường đi f như sau

$$f_r = \begin{cases} \overline{f}_r - \varepsilon, \text{ khi } r = p \\ \overline{f}_r + \varepsilon, \text{ khi } r = q \\ \overline{f}_r, \text{ khi } r \neq p, r \neq q \end{cases},$$

với $\varepsilon > 0$ đủ nhỏ. Khi đó với mọi $\overline{t} \in T(\overline{f})$:

$$\langle \overline{t}, f - \overline{f} \rangle = \overline{t}_q \varepsilon - \overline{t}_p \varepsilon = (\overline{t}_q - \overline{t}_p)\varepsilon \geq 0,$$

điều này dẫn đến

$$\overline{t}_q - \overline{t}_p \geq 0.$$

Do đó, $\overline{f}$ là dòng cân bằng mạnh của bài toán mạng giao thông. ■

Bằng các kỹ thuật tương tự như trong chứng minh của Hệ quả 4.3, chúng ta cũng có được kết quả đối với sự tồn tại của dòng cân bằng yếu của bài toán mạng giao thông như sau:

Hệ quả 4.4. *Với bài toán mạng giao thông, giả sử Ω là tập compact và các điều kiện sau đây thỏa mãn:*

(i) Với mỗi $f' \in \Omega$*, tập hợp*

$$\{f \in \Omega : \exists t \in T(f'), \langle t, f' - f \rangle \geq 0\}$$

là đóng.

(ii) Với bất kỳ $\{f^1, f^2, \dots, f^n\} \subset \Omega$ *với* $n \geq 2$ *và* $f^{n+1} \coloneqq f^1$*, tồn tại* $i \in \{1,2,\dots,n\}$ *sao cho tồn tại* $t \in T(x_i)$ *với*

$$\langle t, f^i - f^{i+1} \rangle \geq 0.$$

Khi đó, bài toán mạng giao thông có dòng cân bằng yếu.

Ví dụ 4.4. Xét bài bài toán mạng giao thông gồm 4 nút sau: A là nút nguồn, B là nút đích và C, D là các nút trung gian. Giả sử mạng trên chỉ gồm 2 đường đi:

$$A \to C \to B,$$

Và

$$A \to D \to B.$$

Tập ràng buộc tải năng trên mọi cung đều là

$$U \coloneqq [0, 10] \cup [20, 30],$$

và nhu cầu của cặp đầu cuối (A, B) là 40.

Giả sử vectơ dòng đường đi là $x = (x_1, x_2)$, hàm giá của các dòng xác định như sau

$$T(x) = \{((2x_1 + x_2), 2(2x_1 + x_2)); (2(2x_1 + x_2), 3(2x_1 + x_2))\}.$$

Bây giờ, chúng ta kiểm tra tính đúng đắn của các điều kiện trong Hệ quả 3.3 và 4.4 đối với dữ liệu cụ thể của bài toán được xem xét trong thí dụ này. Đầu tiên, ta kiểm tra điều kiện (i).

Đặt

$$f = (x_1, x_2), f' = (y_1, y_2).$$

Với $t = ((2y_1 + y_2), 2(2y_1 + y_2)) \in T(f')$ thì

$$\begin{aligned} \Sigma_1 \coloneqq \{f \in \Omega | \langle t, f' - f \rangle \geq 0\} &= \{(x_1, x_2) | x_1 \in U, x_2 \in U, x_1 + x_2 = 40, (2y_1 + y_2)(y_1 - x_1) + 2(2y_1 + y_2)(y_2 - x_2) \geq 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) | x_1 \in U, x_2 \in U, x_1 + x_2 = 40, (y_1 - x_1) + 2(y_2 - x_2) \geq 0\} \\ &= \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in [0,10] \cup [20,30], x_1 + x_2 = 40, x_1 + 2x_2 \leq y_1 + 2y_2\}. \end{aligned}$$

Tương tự, với

$$t = (2(2y_1 + y_2), 3(2y_1 + y_2)) \in T(f'),$$

Ta có

$$\Sigma_2 := \{f \in \Omega |\, \langle t, f' - f\rangle \geq 0\}$$
$$= \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in [0,10] \cup [20,30], x_1 + x_2 = 40, 2x_1 + 3x_2 \leq 2y_1 + 3y_2\}.$$

Rõ ràng, các tập hợp Σ_1, Σ_2 đều là các tập đóng nên điều kiện (i) trong Hệ quả 4.3 và 4.4 đều được thỏa mãn.

Kế tiếp, chúng ta sẽ kiểm tra điều kiện (ii).

Đặt $v = (x_1, x_2)$, $u = (y_1, y_2)$. Chọn

$$t = \big((2x_1 + x_2), 2(2x_1 + x_2)\big) \in T(v).$$

Ta có

$$\langle t, u - v\rangle = (2x_1 + x_2)(y_1 - x_1) + 2(2x_1 + x_2)(y_2 - x_2)$$
$$= (2x_1 + x_2)[(y_1 + 2y_2) - (x_1 + 2x_2)].$$

Đặt

$$g(u, v) := (y_1 + 2y_2) - (x_1 + 2x_2),$$

và để ý rằng với mọi $\{z^1, z^2, \ldots, z^n\} \subset \Omega$ với $n \geq 2$ và $z^{n+1} := z^1$ thì

$$\sum_{i=1}^{n} g(z^i, z^{i+1}) = 0.$$

Điều nãy dẫn đến sự tồn tại của *i* để

$$g(z^i, z^{i+1}) \geq 0,$$

và do đó dễ thấy giả thiết (ii) trong các Hệ quả 4.3 và 4.4 là thỏa mãn. Vì vậy, bài toán mạng giao thông này tồn tại dòng cân bằng mạnh và dòng cân bằng yếu. Hơn nữa, bằng cách kiểm tra trực tiếp, ta thấy rằng (30,10) vừa là dòng cân bằng mạnh vừa là dòng cân bằng yếu của bài toán mạng giao trong trường hợp này.

5. KẾT LUẬN

Điều kiện tồn tại nghiệm của các bài toán cân bằng đa trị trong không gian tôpô dựa trên cấu trúc trội được xem xét. Các kết quả chính sau đó đã được vận dụng vào việc nghiên cứu tính giải được của bài toán bất đẳng thức biến phân đa trị và bài toán mạng giao thông đa trị. Các kỹ thuật được trình bày trong nghiên cứu này có nhiều khả năng được vận dụng để xem xét tính giải được cho các mô hình tối ưu không có cấu trúc tuyến tính và các chủ đề có liên quan như tính ổn định theo tham số hoặc sự hội tụ nghiệm cho các mô hình này.

LỜI CẢM TẠ

Nghiên cứu này được hỗ trợ tài chính từ Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông qua đề tài mã số 01-2025-HV-CB2.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Al-Homidal, S., & Ansari, Q. H. (2020). Vectorial form of Ekeland variational principle with applications to vector equilibrium problem. *Optimization*, *69*(3), 415-436. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1589469

Bianchi, M., Kassay, G., & Pini, R. (2007). Ekeland's principle for vector equilibrium problems. *Nonlinear Analysis*, *66*(7), 1454-1464. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.02.003

Balaj, M. (2013). Three types of variational relation problems. *Taiwanese Journal of Mathematics*, *17*(1), 47-61. https://doi.org/10.11650/tjm.17.2013.2883

Blum, B., & Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Mathematics Student-India*, *63*, 123-145.

Cao, J. D., Li, R. X., Huang, W., Guo, J. H., & Wei. Y. (2018). Traffic network equilibrium problems with demands uncertainty and capacity constraints of arcs by scalarization approaches. *Science China Technological Sciences*, *61*(6), 1642–1653. https://doi.org/10.1007/s11431-017-9172-4

Fu, J. Y. (2005). Vector equilibrium problems. Existence theorems and convexity of solution set. *Journal of Global Optimization*, *31*(1), 109-119. https://doi.org/10.1007/s10898-004-4274-2

Gutierrez, C., Novo, V., & Rodenas-Pedregosa, J. L. (2018). A note on existence of weak efficient solutions for vector equilibrium problems. *Optimization Letters*, *12*(3), 615-623. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1242-1

Gutierrez, C., Kassay, G., Novo, V., & Rodenas-Pedregosa, J. L. (2017). Ekeland variational principles in vector equilibrium problems. *SIAM Journal on Optimization*, *27*(4), 2405-2425. https://doi.org/10.1137/17M111883X

Hai, N. X., & Khanh, P. Q. (2007a). Existence of solutions to general quasiequilibrium problems and applications. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *133*(3), 317-327. https://doi.org/10.1007/s10957-007-9170-8

Hai, N. X., & Khanh, P. Q. (2007b). The solution existence of general variational inclusion problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *328*(2), 268-1277. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.06.058

Khanh, P. Q., & Luu, L. M. (2004). On the existence of solutions to vector quasivariational inequalities and quasicomplementarity problems with applications break to traffic network equilibria. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *123*(3), 533-548. https://doi.org/10.1007/s10957-004-5722-3

Maugeri, A. (1995). Variational and Quasivariational Inequalities in Network Flow Models: Recent Developments in Theory and Algorithms. In F. Giannessi & A. Maugeri (Eds.), *Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems* (pp. 195-211). https://doi.org/10.1007/978-1-4899-1358-6_15

Zhou, Z., Liang, K., & Ansari, Q. H. (2025). Optimality conditions for Benson proper efficiency of set-valued equilibrium problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, *101*(1), 111-134. https://doi.org/10.1007/s00186-025-00887-2