



DOI:10.22144/ctujos.2026.115

LUẬT SỐ LỚN CHO BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN VỚI LỰC NGOÀI TÁC ĐỘNG

Lâm Hoàng Chương^{1,*}, Huỳnh Minh Đăng², Lê Trường Phát², Nguyễn Văn Kiện²,
Trang Thị Hiền³ và Lê Hoài Nhân¹

¹Trường Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

²Lớp Toán ứng dụng K48, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

³Phòng quản lý chất lượng, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

*Tác giả liên hệ (Corresponding author): lhchuong@ctu.edu.vn

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 07/09/2025

Sửa bài (Revised): 29/09/2025

Duyệt đăng (Accepted): 12/05/2026

Title: Law of large numbers for a random walk with an external force

Author(s): Lam Hoang Chuong^{1,*},
Huynh Minh Dang², Le Truong Phat²,
Nguyen Van Kien², Trang Thi Hien³ and
Le Hoai Nhan¹

Affiliation(s): ¹College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam; ²Applied math class K48, Can Tho University, Viet Nam; ³Department of Quality Management, Can Tho University, Viet Nam

TÓM TẮT

Mục tiêu của bài báo là nghiên cứu bước đi ngẫu nhiên với một lực ngoài tác động. Cụ thể, với xác suất chuyển trạng thái thỏa một số điều kiện cho trước, một dạng luật số lớn được chỉ ra trong mô hình đang xét. Đồng thời, các kết quả này cũng được mô phỏng thông qua ngôn ngữ lập trình Python.

Từ khóa: Bước đi ngẫu nhiên, luật số lớn, mô phỏng, toán tử Markov

ABSTRACT

This paper investigates random walks under the influence of an external force. Specifically, assuming that the state transition probabilities satisfy certain prescribed conditions, a version of the law of large numbers is established for the proposed model. In addition, the theoretical results are illustrated through numerical simulations implemented in the Python programming language.

Keywords: Law of large numbers, Markov operator, random walks, simulation

1. GIỚI THIỆU

Một bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n \geq 0}$ được xét có không gian trạng thái là tập số nguyên \mathbb{Z} và với điều kiện ban đầu $X_0 = 0$. Trong mô hình này ta giả sử xác suất chuyển đổi trạng thái của X_n được cho bởi

$$P(X_{n+1} = k + 1 | X_n = k) = \lambda \alpha_k,$$

$$P(X_{n+1} = k - 1 | X_n = k) = \alpha_{k-1},$$

$$P(X_{n+1} = k | X_n = k) = 1 - \lambda \alpha_k - \alpha_{k-1}$$

với mọi $n \geq 0$. Trong công thức trên, giá trị k là một số nguyên và $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ ký hiệu cho một dãy các số thực dương đảm bảo tất cả các xác suất trên đều không âm. Hằng số dương λ đặc trưng cho một lực ngoài tác động vào sự di chuyển của bước đi ngẫu nhiên. Trường hợp đặc biệt nếu $\lambda = 1$ thì xem

như mô hình không có lực ngoài tác động. Rõ ràng phân phối giới hạn của quá trình này phụ thuộc vào đặc tính của dãy các xác suất chuyển. Thật vậy, Duong and Lam (2025) đã chỉ ra rằng nếu dãy $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ hội tụ về một hằng số α , tức là

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \alpha_k = \alpha \quad (1)$$

với $0 < \alpha \leq 1/2$, thì tồn tại định một dạng luật số lớn liên quan đến bước đi ngẫu nhiên cho trường hợp có lực ngoài tác động, đó là

$$\frac{X_n}{n} \rightarrow \alpha(\lambda - 1)$$

theo xác suất khi n tiến tới vô cùng. Trong trường hợp không có lực ngoài tác động thì xuất hiện một dạng của định lý giới hạn trung tâm như sau

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0; 2\alpha)$$

theo phân phối khi n tiến tới vô cùng.

Đặc biệt hơn khi mà xác suất chuyển đổi là các hằng số, định lý giới hạn trung tâm áp dụng cho bước đi ngẫu nhiên cân bằng, có nghĩa là xác suất di chuyển qua phải (tăng 1 đơn vị) và qua trái (giảm 1 đơn vị) như nhau. Điều này đã được chứng minh bởi Chương và Ba (2017), Durrett (2019) và Chương và ctv. (2021). Trong khi đó, Chương (2021) đã chỉ ra một dạng luật số lớn được thỏa cho bước đi ngẫu nhiên không cân bằng với xác suất di chuyển qua phải và qua trái khác nhau. Để tìm hiểu thêm về bước đi ngẫu nhiên trong không gian một chiều, độc giả có thể tham khảo thêm trong các tài liệu Alili (1999), Ross (2010) cũng như trong nghiên cứu của Lawler và Limic (2010).

Ở bài báo này, dãy xác suất chuyển đổi $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ không thỏa điều kiện (1), tức là không hội tụ được nghiên cứu và chỉ ra rằng bước đi ngẫu nhiên vẫn thỏa luật số lớn trong trường hợp có lực ngoài tác động.

Toán tử Markov \mathcal{P} cho bước đi ngẫu nhiên X_n được cho bởi công thức

$$\mathcal{P}f(k) = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n = k],$$

trong đó f là một hàm đo được trên \mathbb{Z} . Khi đó, ta có thể viết lại công thức trên như sau

$$\mathcal{P}f(k) = \lambda \alpha_k [f(k+1) - f(k)] - \alpha_{k-1} [f(k) - f(k-1)]. \quad (2)$$

Toán tử \mathcal{P} này đóng một vai trò hết sức quan trọng trong việc xác định phân phối giới hạn của bước đi ngẫu nhiên đang xét. Nó có một số tính chất sẽ được đưa ra trong phần tiếp theo.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Ta nhắc lại Định lý Stolz-Cesàro liên quan đến giới hạn của dãy số được phát biểu như sau:

Định lý 1. (Cesàro, 1888; Stolz, 1885) Cho $(a_n)_{n \geq 1}$ và $(b_n)_{n \geq 1}$ là hai dãy số thực. Giả sử rằng dãy $(b_n)_{n \geq 1}$ là một dãy số đơn điệu nghiêm ngặt và phân kỳ, và giới hạn sau tồn tại:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Khi đó giới hạn sau được thỏa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Ta có hệ quả của Định lý 1 được phát biểu dưới dạng bổ đề như sau

Bổ đề 1. Cho $(u_n)_{n \geq 1}$ là một dãy số dương sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Khi đó với mỗi số nguyên không âm $\ell = 0, 1, 2, \dots$, giới hạn sau đây tồn tại:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\ell+1}} \sum_{i=1}^n i^\ell u_i = \frac{u}{\ell+1}.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 1 cho $a_n = \sum_{i=1}^n i^\ell u_i$ và $b_n = n^{\ell+1}$ với $n \geq 1$ ta được kết quả như mong muốn. \square

Bổ đề 2. Cho $(v_n)_{n \geq 1}$ là một dãy số thực. Nếu các giới hạn sau được thỏa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{2n}}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_{2n-1}}{2n-1} = L$$

thì ta cũng có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{v_n}{n} = L.$$

Chứng minh. Sử dụng ngôn ngữ $\delta - \varepsilon$ trong định nghĩa giới hạn ta sẽ có được kết luận mong muốn. \square

Liên quan đến toán tử \mathcal{P} ta có các mệnh đề sau

Mệnh đề 1. Cho h là một hàm số được xác định trên tập \mathbb{Z} và thỏa mãn phương trình

$$(\mathcal{P} - I)h(m) = 1$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$, I là toán tử đồng nhất, và điều kiện biên được cho bởi $h(0) = 0$. Khi đó, đẳng thức sau đây luôn đúng

$$\mathbb{E}[h(X_n)] = n$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Vì X_n nhận giá trị nguyên nên ta có thể thay m bằng X_n thỏa

$$(\mathcal{P} - I)h(X_n) = 1 \quad (3)$$

với mọi $n \geq 0$. Lấy kỳ vọng của cả hai vế của (3) ta được

$$\mathbb{E}[h(X_{n+1})] - \mathbb{E}[h(X_n)] = 1$$

bằng cách áp dụng tính chất của kỳ vọng có điều kiện cho toán tử \mathcal{P} được định nghĩa trong công thức (2). Do giả định $\mathbb{E}[h(X_0)] = \mathbb{E}[h(0)] = 0$, chúng ta có thể suy ra kết quả mong muốn bằng cách sử dụng đệ quy theo n . \square

Mệnh đề 2. Cho g là một hàm số được xác định trên tập \mathbb{Z} và thỏa mãn phương trình

$$(\mathcal{P} - I)g(m) = m$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$, và điều kiện biên được cho bởi $g(0) = 0$. Khi đó, ta có giới hạn sau

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[g(X_n)]}{n^2} = \frac{(\lambda - 1)\alpha}{3}.$$

Chứng minh. Lập luận như trong Mệnh đề 1 ta có

$$(\mathcal{P} - I)g(X_n) = X_n.$$

Lấy kỳ vọng hai vế ta được

$$\mathbb{E}[g(X_{n+1})] - \mathbb{E}[g(X_n)] = \mathbb{E}(X_n)$$

với mọi $n \geq 0$. Đệ quy theo n dẫn đến

$$\mathbb{E}[g(X_n)] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}(X_i)$$

với mọi $n \geq 1$. Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}[g(X_n)]}{n^2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{i}{n}\right)^1 \frac{\mathbb{E}(X_i)}{i} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{(\lambda - 1)2\alpha}{3} \\ &= \frac{(\lambda - 1)\alpha}{3} \end{aligned}$$

nhờ áp dụng Bổ đề 1 và công thức (5) bên dưới. Lưu ý rằng kết quả của công thức (5) được chứng minh dựa vào Mệnh đề 1 và hoàn toàn không phụ thuộc vào Mệnh đề 2. \square

Cuối cùng, Định lý Chebyshev liên quan đến luật số lớn được cho như sau

Định lý 2. (Billingsley, 1995) *Giả sử phân phối của biến ngẫu nhiên Z được xác định hoàn toàn bởi các moment của nó. Hơn nữa, giả sử rằng $(Z_n)_{n \geq 1}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên sở hữu các moment của mọi bậc. Nếu thỏa mãn điều kiện sau:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^\ell) = \mathbb{E}(Z^\ell) \text{ với mọi } \ell = 1, 2, 3, \dots$$

thì dãy $(Z_n)_{n \geq 1}$ sẽ hội tụ đến Z về phân phối khi n tiến ra vô cùng.

Ta có hệ quả của Định lý 2 được phát biểu dưới dạng bổ đề như sau

Bổ đề 3. Cho dãy $(Z_n)_{n \geq 1}$ là một tập hợp các biến ngẫu nhiên. Giả sử ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n) = c,$$

đồng thời

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^2) = c^2$$

thì dãy $(Z_n)_{n \geq 1}$ hội tụ về hằng số c theo xác suất khi n tiến tới vô cùng.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong phần này ta xét dãy các xác suất chuyển $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ như sau

$$\alpha_{2k} = \alpha \text{ và } \alpha_{2k-1} = \alpha/2 \quad (4)$$

với mọi $k \in \mathbb{Z}$ và $\alpha \neq 0$. Khi đó $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ là một dãy không hội tụ khi k tiến ra vô cùng.

Chúng ta thiết lập luật số lớn cho các bước đi ngẫu nhiên đã xét:

Định lý 3. *Nếu dãy xác suất chuyển $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ thỏa mãn điều kiện (4) thì sự hội tụ sau đây tồn tại theo xác suất:*

$$\frac{X_n}{n} \rightarrow \frac{2(\lambda - 1)\alpha}{3}$$

khi n tiến tới vô cùng.

Theo Bổ đề 3, để thiết lập Định lý 3 chúng ta chỉ cần chứng minh sự hội tụ của các giới hạn sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{X_n}{n} \right) = \frac{2(\lambda - 1)\alpha}{3} \quad (5)$$

và

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{n} \right)^2 \right] = \left[\frac{2(\lambda - 1)\alpha}{3} \right]^2. \quad (6)$$

Chứng minh (5). Xét phương trình sai phân

$$(\mathcal{P} - I)f_1(m) = 1 \quad (7)$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$ và $f_1(0) = 0$. Áp dụng Mệnh đề 1 ta có đẳng thức

$$\mathbb{E}f_1(X_n) = n \quad (8)$$

với mọi $n \geq 0$ vì theo giả thiết ban đầu $X_0 = 0$. Thật vậy, vì X_n nhận giá trị là số nguyên nên thế vào phương trình (7) ta được

$$(\mathcal{P} - I)f_1(X_n) = 1.$$

Điều này tương đương với

$$\mathcal{P}f_1(X_n) - f_1(X_n) = 1.$$

Lấy kỳ vọng hai vế ta có đẳng thức sau

$$\mathbb{E}f_1(X_{n+1}) - \mathbb{E}f_1(X_n) = 1.$$

Do đó, dãy các giá trị $\mathbb{E}f_1(X_n)$ là một cấp số cộng với công sai bằng 1 và $\mathbb{E}f_1(X_0) = 0$. Từ đó ta thu được (8).

Phương trình (7) được giải bằng phương pháp truy hồi theo m . Sử dụng định nghĩa của toán tử Markov \mathcal{P} thế vào phương trình (7) ta có phương trình tương đương là

$$\begin{aligned} \lambda \alpha_m [f_1(m+1) - f_1(m)] \\ - \alpha_{m-1} [f_1(m) - f_1(m-1)] = 1. \end{aligned}$$

Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} \alpha_m [f_1(m+1) - f_1(m)] \\ - \frac{1}{\lambda} \alpha_{m-1} [f_1(m) - f_1(m-1)] = \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Lặp lại quá trình trên ta thu được

$$\alpha_m [f_1(m+1) - f_1(m)] = \frac{1}{\lambda - 1}$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$. Tiến hành giải phương trình sau cùng ta được nghiệm là:

$$f_1(2m) = \frac{3m}{(\lambda - 1)\alpha} \quad \text{nếu } m \in \mathbb{Z}$$

và $f_1(2m - 1)$

$$= \begin{cases} \frac{3m}{(\lambda - 1)\alpha} - \frac{2}{(\lambda - 1)\alpha} & \text{nếu } m \geq 1, \\ \frac{-1}{(\lambda - 1)\alpha} & \text{nếu } m = 0, \\ \frac{3m}{(\lambda - 1)\alpha} + \frac{2}{(\lambda - 1)\alpha} & \text{nếu } m \leq -1 \end{cases}$$

bằng cách áp dụng phương pháp đệ quy theo m . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_1(2m)}{2m} &= \lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{3m}{2m(\lambda - 1)\alpha} \\ &= \frac{3}{2(\lambda - 1)\alpha} \end{aligned}$$

và tương tự

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_1(2m - 1)}{2m - 1} = \frac{3}{2(\lambda - 1)\alpha}.$$

Do đó, theo Bổ đề 2 ta có giới hạn sau

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_1(m)}{m} = \frac{3}{2(\lambda - 1)\alpha}. \quad (9)$$

Khi đó với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $M > 0$ sao cho với mọi $|m| > M$, ta có

$$\left| \frac{f_1(m)}{m} \times \frac{2(\lambda - 1)\alpha}{3} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (10)$$

Tiếp theo chúng ta sẽ đánh giá kỳ vọng của X_n/n để từ đó tìm ra giới hạn của nó. Áp dụng công thức (8) ta có

$$\begin{aligned} &\left| \mathbb{E} \left[\frac{X_n}{n} - \frac{2(\lambda - 1)\alpha}{3} \right] \right| \\ &= \left| \mathbb{E} \left[\frac{X_n}{n} - \frac{2(\lambda - 1)\alpha}{3} \times \frac{f_1(X_n)}{n} \right] \right|. \quad (11) \end{aligned}$$

Ta thấy rằng khi n tiến đến vô cùng thì biểu thức trên sẽ dần về 0. Thật vậy, nếu giá trị của X_n bị chặn thì $f_1(X_n)$ cũng bị chặn do tính hội tụ của giới hạn cho trong công thức (9). Trong khi đó giá trị của n có thể lớn tùy ý nên về phải của biểu thức (11) dần về 0 khi n dần ra vô cùng.

Trường hợp giá trị của X_n không bị chặn, tức là $|X_n| > M$. Áp dụng công thức (10) ta có

$$\left| \frac{f_1(X_n)}{X_n} \times \frac{2(\lambda - 1)\alpha}{3} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Vế phải của biểu thức (11) không vượt quá giá trị của biểu thức

$$\begin{aligned} &\mathbb{E} \left[\left| \frac{X_n}{n} \right| \times \left| 1 - \frac{2(\lambda - 1)\alpha}{3} \times \frac{f_1(X_n)}{X_n} \right| \right] \\ &< \varepsilon \mathbb{E} \left[\left| \frac{X_n}{n} \right| \right] = \varepsilon \end{aligned}$$

vì $|X_n| \leq n$. Khi đó nếu ε được chọn bé tùy ý thì vế phải của biểu thức (11) dần hội tụ về 0. \square

Chứng minh (6). Tương tự ta cũng xét phương trình

$$(\mathcal{P} - I)f_2(m) = m \quad (12)$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$ và $f_2(0) = 0$. Áp dụng Mệnh đề 2 ta được

$$\mathbb{E}f_2(X_n) \approx \frac{n^2}{2} \times \frac{(\lambda - 1)2\alpha}{3} = n^2 \frac{(\lambda - 1)\alpha}{3} \quad (13)$$

khi n đủ lớn. Thật vậy, vì X_n nhận giá trị là số nguyên nên thế vào phương trình (12) ta được

$$(\mathcal{P} - I)f_2(X_n) = X_n.$$

Điều này tương đương với

$$\mathcal{P}f_2(X_n) - f_2(X_n) = X_n.$$

Lấy kỳ vọng hai vế ta có đẳng thức sau

$$\mathbb{E}f_2(X_{n+1}) - \mathbb{E}f_2(X_n) = \mathbb{E}(X_n).$$

Đệ quy theo n ta có

$$\mathbb{E}f_2(X_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(X_k)$$

vì theo điều kiện ban đầu $\mathbb{E}f_2(X_0) = 0$. Áp dụng (5) ta có

$$\mathbb{E}(X_n) \approx \frac{n(\lambda - 1)2\alpha}{3}$$

khi n đủ lớn. Điều này dẫn đến (13).

Phương trình (12) có thể được biểu diễn lại theo dạng hồi quy như sau:

$$\begin{aligned} \alpha_m[f_2(m + 1) - f_2(m)] \\ - \frac{1}{\lambda}\alpha_{m-1}[f_2(m) - f_2(m - 1)] = \frac{1}{\lambda}m. \end{aligned}$$

Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} f_2(m + 1) - f_2(m) &= \frac{1}{\alpha_m} \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda^i} (m - i) \\ &= \frac{1}{\alpha_m} \left(\frac{m}{\lambda - 1} - \frac{\lambda}{(\lambda - 1)^2} \right). \end{aligned}$$

Bằng cách áp dụng đệ quy theo m , nghiệm của phương trình (12) là hàm f_2 được cho bởi công thức

$$f_2(2m) = \frac{3m^2 - m}{\alpha(\lambda - 1)} - \frac{3\lambda m}{\alpha(\lambda - 1)^2} \text{ nếu } m \in \mathbb{Z},$$

và $f_2(2m - 1)$

$$= \begin{cases} \frac{3m^2 - 3m}{\alpha(\lambda - 1)} - \frac{3\lambda m - 2\lambda}{\alpha(\lambda - 1)^2} & \text{nếu } m \geq 1, \\ \frac{3m^2 - 3m + 2}{\alpha(\lambda - 1)} + \frac{\lambda}{\alpha(\lambda - 1)^2} & \text{nếu } m \leq 0. \end{cases}$$

Tính giới hạn ta được

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_2(2m)}{(2m)^2} &= \lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{3m^2 - m}{4m^2\alpha(\lambda - 1)} \\ &= \frac{3}{4(\lambda - 1)\alpha} \end{aligned}$$

và tương tự

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_2(2m - 1)}{(2m - 1)^2} = \frac{3}{4(\lambda - 1)\alpha}.$$

Từ đó ta có thể suy ra giới hạn liên quan đến nghiệm của phương trình (12) là hàm $f_2(m)$ như sau

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_2(m)}{m^2} = \frac{3}{4(\lambda - 1)\alpha}$$

theo Bổ đề 2. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $N > 0$ sao cho với mọi $|m| > N$, ta có

$$\left| \frac{f_2(m)}{m^2} \times \frac{(\lambda - 1)4\alpha}{3} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Mặt khác, biểu thức

$$\left| \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{n} \right)^2 - \left[\frac{(\lambda - 1)2\alpha}{3} \right]^2 \right] \right|$$

tương đương với biểu thức

$$\left| \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{n} \right)^2 - \frac{(\lambda - 1)4\alpha}{3} \times \frac{f_2(X_n)}{n^2} \right] \right| \quad (14)$$

bằng cách áp dụng đẳng thức (13). Lập luận như trong chứng minh (5) ta thu được kết quả là biểu thức (14) hội tụ về 0 khi n dần tới ra vô cùng. \square

Chú ý 1. Trong trường hợp $\alpha = 0$, giới hạn liên quan đến hàm $f_1(m)$ và $f_2(m)$ như sau

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_1(m)}{m} = \infty \text{ và } \lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_2(m)}{m^2} = \infty.$$

Từ đó ta cũng có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{n} \right)^2 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{n} \right) \right] = 0.$$

Do đó, ta suy ra rằng $X_n/n \rightarrow 0$ theo xác suất khi n tiến tới vô cùng.

4. MÔ PHỎNG

Trong phần này ta sẽ mô phỏng sự di chuyển của bước đi đã xét trong các trường hợp $\lambda = 1$ tương ứng với hội tụ theo phân phối chuẩn và $\lambda \neq 1$ cho kết quả của luật số lớn.

Đầu tiên, ta tiến hành mô phỏng cho trường hợp $\lambda = 1$, xác suất chuyển qua phải và qua trái là α , trong đó α là một giá trị trong khoảng từ 0 đến 0,5. Khi đó, theo kết quả lý thuyết ta có

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0; 2\alpha)$$

theo phân phối khi n tiến tới vô cùng. Kết quả này sẽ được mô phỏng bằng ngôn ngữ lập trình Python với thuật toán như sau

```

=====
# Hàm mô phỏng bước đi ngẫu nhiên
def random_walk(steps, a):
    X_n = [0]
    # Bắt đầu từ X_0 = 0
    for n in range(steps):
        current_position = X_n[-1]
        if r < alpha:

```

```

        next_position = current_position + 1
    elif r < 2 * alpha:
        next_position = current_position - 1
    else:
        next_position = current_position
# Giữ nguyên vị trí
    X_n.append(next_position)
    return X_n
# Giá trị của a
a = round(random.uniform(0; 0,5), 2)
# Số bước đi ngẫu nhiên
steps = random.randint(200, 450)
print(f'Số bước n = {steps}')
# Số lần mô phỏng
num_simulations = random.randint(2300, 4100)
# Lưu toàn bộ giá trị X_n/ sqrt(n) cuối cùng để tính toán
scaled_X_n_all = []
for _ in range(num_simulations):
    X_n = random_walk(steps, a)

```

```

        scaled_X_n=[X_n[i]/np.sqrt(i)
for i in range(1, len(X_n))]
scaled_X_n_all.append(scaled_X_n[-1])
# Thống kê: Trung bình và phương sai mẫu
mean_val = np.mean(scaled_X_n_all)
var_val = np.var(scaled_X_n_all)

```

Kết quả thu được như sau: Với xác suất chuyển $\alpha = 0,1$ ta có

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0; 0,2)$$

theo phân phối khi n tiến tới vô cùng.

Số bước $n = 200$.

Số quỹ đạo mô phỏng là 2930.

Thống kê dữ liệu được mô phỏng: Trung bình mẫu $\approx -0,0061$ và Phương sai mẫu $\approx 0,1991$.

Bên dưới là đồ thị quỹ đạo của bước đi ngẫu nhiên và hàm mật độ giá trị mô phỏng.



Hình 1. Mô phỏng hội tụ phân phối chuẩn

Ở Hình 1 đường màu đỏ là đồ thị của hàm mật độ xác suất của phân phối giới hạn $\mathcal{N}(0; 0,2)$ trong trường hợp $\alpha = 0,1$, đó là

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{0,2 \times 2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2 \times 0,2}}$$

Kết quả cho thấy hàm mật độ được mô phỏng xấp xỉ hàm $\phi(x)$.

Tiếp theo, ta mô phỏng cho trường hợp $\lambda \neq 1$ và α là một giá trị trong khoảng từ 0 đến 0,5. Khi đó, theo kết quả lý thuyết ta có

$$\frac{X_n}{n} \rightarrow \frac{(\lambda - 1)2\alpha}{3}$$

theo xác suất khi n tiến tới vô cùng. Dưới đây là thuật toán mô phỏng

```

# Hàm mô phỏng bước đi ngẫu nhiên
def random_walk(steps, a, lambda_val):
    X_n = [0]
    # Bắt đầu từ X_0 = 0
    for n in range(steps):

```

```

current_position = X_n[-1]
# Nếu current_position chẵn thì alpha = a, lẻ thì
alpha = a/2
if current_position % 2 == 0:
    alpha = a
else:
    alpha = a / 2
r = random.uniform(0, 1)
if r < lambda_val * alpha:
    next_position = current_position + 1
elif r < lambda_val * alpha + alpha:
    next_position = current_position - 1
else:
    next_position = current_position
# Giữ nguyên vị trí
X_n.append(next_position)
return X_n
# Giá trị của a và lambda
a = round(random.uniform(0, 0,5), 2)
lambda_val = round(random.uniform(0; 0,99), 2)
limit_value = 2*(lambda_val - 1) * a / 3
# Số bước đi ngẫu nhiên
steps = random.randint(200, 450)
# Số lần mô phỏng
num_simulations = random.randint(2300, 4100)
# Lưu toàn bộ giá trị X_n/n cuối cùng để tính toán

```

```

scaled_X_n_all = []
for _ in range(num_simulations):
    X_n = random_walk(steps, a, lambda_val)
    scaled_X_n = [X_n[i] / i
    for i in range(1, len(X_n))]
# Chia cho n
scaled_X_n_all.append(scaled_X_n[-1])
# Thống kê: Trung bình và phương sai
mean_val = np.mean(scaled_X_n_all)
var_val = np.var(scaled_X_n_all)

```

Kết quả thu được như sau:

Xác suất nhảy khi trạng thái ở vị trí số chẵn là $\alpha = 0,17$ và lẻ là $\frac{\alpha}{2} = 0,085$; $\lambda = 0,46$. Khi đó ta có

$$X_n/n \rightarrow -0,06$$

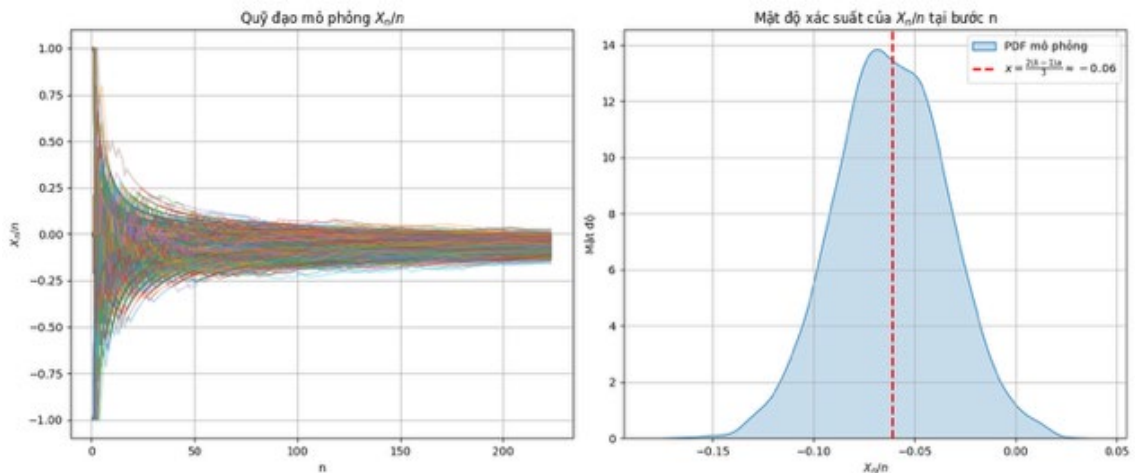
theo xác suất khi n tiến tới vô cùng.

Số bước $n = 223$

Số quỹ đạo mô phỏng là 2978.

Thống kê dữ liệu được mô phỏng: Trung bình mẫu $\approx -0,0619$ và Phương sai mẫu $\approx 0,0007$.

Bên dưới là đồ thị quỹ đạo của bước đi ngẫu nhiên và hàm mật độ giá trị mô phỏng.



Hình 2. Mô phỏng hội tụ đến hằng số

Kết quả được thể hiện ở Hình 2 cho thấy rằng hàm mật độ xác suất mô phỏng tiệm cận với đường thẳng giới hạn là $x = -0,06$ hoàn toàn phù hợp với lý thuyết chứng minh được. Lưu ý tỷ lệ giữa trục

hoành và trục tung đã được thay đổi theo hướng phóng đại giá trị hoành độ để làm rõ hàm mật độ xác suất mô phỏng.

5. KẾT LUẬN

Sự tồn tại của một dạng luật số lớn cho bước đi ngẫu nhiên cùng với mô phỏng thực nghiệm, kể cả mô phỏng cho trường hợp tồn tại định lý giới hạn trung tâm được chỉ ra. Điều này càng làm sâu sắc hơn mối liên hệ giữa lý thuyết và thực nghiệm trong

các nghiên cứu khoa học, đặc biệt là trong lĩnh vực toán học.

LỜI CẢM ƠN

Đề tài này được tài trợ bởi Đại học Cần Thơ, mã số: TSV2025-11.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Alili, S. (1999). Asymptotic behaviour for random walks in random environments. *Journal of Applied Probability*, 36, 334-349. <https://doi.org/10.1239/jap/1032374457>
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure* (3rd edition). John Wiley, New York.
- Cesàro, E. (1888). Sur la convergence des séries. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3(7), 49–59.
- Chuong, L. H., & Ba, D. T. B. (2017). Tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm cho bước đi ngẫu nhiên trong một chiều. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, (49), 73-78. <https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2017.010>
- Chuong, L. H. (2021). Luật số lớn trong mô hình trò chơi không công bằng. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, 57(2), 44-48. <https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.036>
- Chuong, L. H., Lộc, T. P., Kim, L. M., & Tuyền, D. T. (2021). Định lý giới hạn trung tâm trong mô hình trò chơi công bằng. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, 57(2), 39-43. <https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.035>
- Duong, T. B. B., & Lam, H. C. (2025). On the convergence of random walks in one dimensional space. *Acta Mathematica Hungarica*, 175(1), 174-184. <https://doi.org/10.1007/s10474-024-01497-w>
- Durrett R. (2019). *Probability: Theory and Examples* (5th edition). Cambridge University Press, New York. <https://doi.org/10.1017/9781108591034>
- Lawler, G. F., & Limic, V. (2010). *Random Walk: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, New York. <https://doi.org/10.1017/CBO9780511750854>
- Stolz, O. (1885). Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: nach den Neueren Ansichten. *Leipzig: Teubners*, 173–175.
- Ross, S. (2010). *Introduction to Probability Models* (10th edition). Academic Press, Boston. <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-375686-2.00007-8>