

DOI:10.22144/ctu.2025.099

LEPTOGENESIS TRONG MÔ HÌNH ĐỐI XỨNG S_4 MODULAR VỚI CƠ CHẾ SEESAW TỐI THIỂU

Đặng Thị Huyền Trân¹ và Nguyễn Thanh Phong^{2*}

¹Trường Trung học phổ thông chuyên Bến Tre, tỉnh Bến Tre, Việt Nam

²Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ, Việt Nam

*Tác giả liên hệ (Corresponding author): thanhphong@ctu.edu.vn

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 14/02/2025

Sửa bài (Revised): 04/05/2025

Duyệt đăng (Accepted): 30/05/2025

Title: Leptogenesis in an S_4 modular symmetry model with minimal seesaw mechanism

Author: Dang Thi Huyen Tran¹ and Nguyen Thanh Phong^{2*}

Affiliation(s): ¹Ben Tre Gifted High School, Ben Tre province, Viet Nam;

²College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam

TÓM TẮT

Mô hình đối xứng S_4 modular được xây dựng với cơ chế seesaw tối thiểu nhằm làm giảm bớt số lượng các tham số tự do cũng như các hạt mới khi mở rộng Mô hình chuẩn. Mô hình nghiên cứu đã thỏa mãn tất cả các dữ liệu thực nghiệm khu vực lepton như khối lượng neutrino, các tham số của ma trận trộn lepton. Trên cơ sở đó, miền giá trị được phép của các tham số của mô hình cũng được xác định. Mô hình cũng giải thích thành công bất đối xứng giữa vật chất và phản vật chất của vũ trụ thông qua quá trình leptogenesis.

Từ khóa: Dạng modular, leptogenesis, S_4 modular, seesaw tối thiểu

ABSTRACT

An S_4 modular symmetry model with a minimal seesaw mechanism is proposed to reduce the number of free parameters and unwanted new particles when the Standard model is expanded. The proposed model satisfies the experimental data of the lepton sector such as neutrino mass and the lepton mixing matrix, such that the values of the model's parameter space are found. The leptogenesis process of the model was studied, where the asymmetry between matter and antimatter of the Universe is successfully generated.

Keywords: Modular form, leptogenesis, S_4 modular, minimal seesaw

1. GIỚI THIỆU

Mô hình chuẩn (the Standard Model - SM) là mô hình lý thuyết thành công nhất của vật lý hạt cơ bản. Bên cạnh những thành công không thể phủ nhận, mô hình này vẫn còn tồn tại những hạn chế nhất định, trong đó có thể kể ra như mô hình tiên đoán khối lượng neutrino bằng không và không có sự trộn giữa các thế hệ neutrino. Tuy nhiên thực nghiệm về dao động neutrino đã dẫn đến kết luận rằng, neutrino có khối lượng (dù rất nhỏ, cỡ dưới eV) và giữa các thế hệ neutrino có sự trộn, tương tự như sự trộn giữa các quark trong SM. Kết quả thực nghiệm từ dao động

neutrino đã dẫn đến đòi hỏi một mô hình lý mới cho phép giải quyết những hạn chế của SM. Những mô hình mới này đều dựa trên nền tảng lý thuyết của SM, do đó được gọi chung là các Mô hình chuẩn mở rộng (Beyond the Standard Model, BSM). Một BSM đơn giản nhất là thêm vào SM hai hoặc ba neutrino nặng phân cực phải (Right Handed Neutrino - RHN). Theo đó, khối lượng các neutrino hoạt động (active neutrinos), là các neutrino mà thí nghiệm dao động neutrino đo được hiệu bình phương khối lượng giữa chúng, được sinh ra từ cơ chế seesaw (SS) (Minkowski, 1977). Nếu mô hình chứa hai RHN thì có được cơ chế SS tối thiểu

(minimal seesaw mechanism). Tuy nhiên, một mô hình như vậy vẫn còn quá nhiều tham số tự do, mang đến rất nhiều thách thức cho thực nghiệm để xác định giá trị các tham số này dựa trên dữ liệu thực nghiệm, đặc biệt là ma trận trộn khu vực lepton, U_{PMNS} .

Trước năm 2012, dữ liệu thí nghiệm cho thấy ma trận U_{PMNS} có cấu trúc tri-bimaximal (TBM), $U_{PMNS} = U_{TBM}$ (Harrison et al., 2002), theo đó góc trộn $\theta_{23} = 45^\circ$ và $\theta_{13} = 0^\circ$. Sau đó, một loạt các BSM dựa trên các nhóm đối xứng gián đoạn thêm vào nhóm chuẩn của SM được đề xuất, chẳng hạn như S_3 (Mohapatra et al., 2006), A_4 (Feruglio et al., 2007), S_4 (Bazzocchi & Morisi, 2009), ... Các BSM này có các đặc điểm chung như: (i) cần thêm các Higgs nặng mới có trị trung bình chân không rất lớn (được gọi là các flavon) để phá vỡ đối xứng các nhóm đối xứng này xuống các đối xứng thặng dư; dẫn đến việc (ii) cấu trúc trộn U_{TBM} được tạo ra một cách tự nhiên từ nội tại lý thuyết của mô hình; và (iii) các đối xứng gián đoạn thêm vô chỉ tồn tại ở mức năng lượng rất cao. Sau năm 2012 đến nay, cấu trúc trộn U_{TBM} không còn đúng nữa, do thực nghiệm cho thấy $\theta_{13} \sim 10^\circ$. Sau đó, các mô hình đối xứng gián đoạn được điều chỉnh để phù hợp với dữ liệu cập nhật này. Các BSM với đối xứng gián đoạn vẫn còn nhiều tham số tự do và tồn tại thách thức rất lớn cho thực nghiệm là các flavon không thể quan sát bằng thực nghiệm hiện nay và/hoặc trong tương lai gần.

Ngoài ra, để khắc phục hạn chế của đối xứng gián đoạn, nhóm đối xứng modular (đẳng cấu với đối xứng gián đoạn) (Ferruccio, 2017) cho thấy là ứng viên hiệu quả cho BSM. Đối xứng modular có cùng tính chất với đối xứng gián đoạn trong việc tạo ra cấu trúc trộn khu vực lepton. Ngoài ra, để đối xứng modular bị phá vỡ, đối xứng gián đoạn không cần hoặc cần rất tiết kiệm các flavon. Hướng BSM này đã và đang thu hút khá nhiều nhà vật lý hạt trong việc tìm kiếm một mô hình đơn giản và hiệu quả cho việc mô tả thế giới hạt cơ bản.

Bên cạnh đó, theo lý thuyết Vụ nổ lớn (Big-bang theory) (Weinberg, 1993), Vũ trụ được hình thành từ Vụ nổ lớn và ngay sau đó vật chất và phản vật chất dần được sinh ra và tiến triển theo cùng một quỹ cách, với cùng số lượng cho đến ngày nay. Tuy nhiên các thí nghiệm về quan sát bức xạ nền của vũ trụ (Cosmic Microwave Background - CMB) và tổng hợp hạt nhân sau Vụ nổ lớn (Big Bang Nucleosynthesis - BBN) cho thấy, ngày nay phản vật chất hầu như không quan sát thấy trong Vũ trụ, trừ ở tầng trên của khí quyển và trong các máy gia

tốc. Điều này được gọi đây là bất đối xứng vật chất – phản vật chất của vũ trụ, hay bất đối xứng baryon (Baryon Asymmetry of the Universe, BAU). May mắn thay, các BSM với các RHN có thể giải thích BAU bằng sự phân rã của các RHN thông qua một cơ chế được gọi là leptogenesis (Fukugita & Yanagida, 1986).

Với động lực từ nhóm đối xứng modular, trong nghiên cứu này, mô hình S_4 modular được xây dựng, trong đó nhóm chuẩn của SM được mở rộng bằng nhóm modular đẳng cấu với nhóm S_4 . Mô hình này có hai RHN để sinh khối lượng neutrino hoạt động thông qua cơ chế SS, do đó được gọi là SS tối thiểu. Sau đó, miền giá trị cho phép của các tham số khu vực lepton của mô hình dựa trên dữ liệu thực nghiệm được đi tìm. Trên miền không gian tham số tìm được, quá trình leptogenesis (Fukugita & Yanagida, 1986) được nghiên cứu để giải thích BAU.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Cũng giống như các nghiên cứu khác về lĩnh vực lý thuyết trường và vật lý hạt cơ bản, phương pháp sử dụng lý thuyết nhóm và lý thuyết trường lượng tử được sử dụng để phân tích và tính toán lý thuyết. Để phục vụ tính số và vẽ hình phần mềm tính số Mathematica được sử dụng.

3. XÂY DỰNG MÔ HÌNH

3.1. Nhóm modular và dạng modular

Ở mục này, tổng quan về nhóm modular (modular group) và dạng modular (modular form) được trình bày. Nhóm modular $\Gamma(N)$, còn được gọi các các nhóm con đồng dư chính (principal congruence subgroups) bậc N , với $N = 1, 2, 3, \dots$, được định nghĩa (Ferruccio, 2017):

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}), \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{N} \right\}, \quad (1)$$

cũng là các nhóm con chuẩn tắc của nhóm modular đồng nhất $\Gamma \equiv \Gamma(1) \cong SL(2, \mathbb{Z})$. Trong đó $SL(2, \mathbb{Z})$ là nhóm các ma trận 2×2 mà các yếu tố ma trận là những số nguyên và định thức bằng 1. Nhóm $\Gamma(N)$ tác dụng lên biến số phức τ (được gọi là các modulus) nằm ở nửa mặt phẳng trên ($Im(\tau) > 0$) và biến đổi như sau:

$$\tau \rightarrow \gamma\tau = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, ((a, b, c, d) \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1), \quad (2)$$

trong đó $\gamma \in \Gamma(N)$.

Hàm $f(\tau)$ được gọi là dạng modular (modular form) với trọng số k và bậc N là các hàm phức giải tích, biến đổi đối với nhóm modular $\Gamma(N)$ như sau:

$$f(\tau) \rightarrow (c\tau + d)^k f(\tau), \quad (3)$$

trong đó k là các số nguyên dương chẵn, được gọi là trọng số modular. Các nhóm con xạ ảnh đồng dư chính (the projective principal congruence subgroups) được định nghĩa là $\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N)/\pm I$ với $N = 1, 2$. Với $N \geq 3$, ta có $\bar{\Gamma}(N) = \Gamma(N)$ bởi vì phần tử $-I$ không thuộc nhóm $\Gamma(N)$. Nhóm modular $\bar{\Gamma} = \Gamma/\pm I$ được sinh bởi hai phần tử S và T . Hai phần tử này tác dụng lên modulus τ làm cho biến đổi như sau:

$$S: \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}, \quad T: \tau \rightarrow \tau + 1. \quad (4)$$

S và T thỏa điều kiện

$$S^2 = (ST)^3 = (TS)^3 = I. \quad (5)$$

Chúng có thể được biểu diễn bởi các ma trận thuộc $\text{PSL}(2, \mathbb{Z})$ như sau:

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nhóm Γ_N là các nhóm modular hữu hạn, có được bằng các thêm điều kiện $T^N = I$ vào các điều kiện ở phương trình (5), trong đó $\Gamma_N \equiv \bar{\Gamma}/\bar{\Gamma}(N)$. Dưới phép biến đổi của nhóm Γ_N , các modular form $f(\tau)$ biến đổi như sau:

$$f(\tau) \rightarrow (c\tau + d)^k \rho^{(f)}(\gamma) f(\tau), \gamma \in \Gamma_N, \quad (6)$$

trong đó, một lần nữa, k là các số nguyên chẵn và dương.

Khi xây dựng các mô hình đối xứng modular cho lý thuyết vật lý hạt, các siêu trường chiral $\phi^{(I)}$ biến đổi dưới nhóm Γ_N như sau:

$$\phi^{(I)} \rightarrow (c\tau + d)^{-k_I} \rho^{(I)}(\gamma) \phi^{(I)}, \quad (7)$$

trong đó $-k_I$ là trọng số đồng hành với siêu trường $\phi^{(I)}$. Trong hai phương trình (6) và (7), $\rho(\gamma)$ là các ma trận biểu diễn của phép biến đổi γ . Ở phương trình (7), nếu ta không đòi hỏi $\phi^{(I)}$ có dạng modular (như hầu hết các mô hình ứng dụng nhóm modular), thì $-k_I$ chỉ yêu cầu là các số nguyên.

Các nhóm Γ_N được tìm thấy là đẳng cấu với các nhóm gián đoạn $S_3, A_4, S_4, \dots$ tương ứng với $N = 2, 3, 4, \dots$ (Ferruccio, 2017). Trong công trình này, nhóm $\Gamma_4 \simeq S_4$ được gọi là nhóm (mô hình) đối xứng S_4 modular được tập trung nghiên cứu. Chi tiết về nhóm đối xứng gián đoạn S_4 , cùng các tính chất

liên quan, có thể tham khảo công trình của Ahn (Ahn et al., 2010). Trong nhóm đối xứng S_4 modular, siêu thể $\mathcal{W}(\tau, \phi)$ là bất biến và có thể khai triển theo các số hạng chứa các siêu đa tuyến như sau:

$$\mathcal{W}(\tau, \phi) = \sum_n \sum_{I_1, \dots, I_n} Y_{I_1, \dots, I_n}(\tau) \phi^{(I_1)} \dots \phi^{(I_n)}, \quad (8)$$

trong đó hệ số $Y_{I_1, \dots, I_n}(\tau)$, xem như các hằng số (ma trận) tương tác Yukawa, được xem như có dạng formular và biến đổi dưới nhóm Γ_N như sau, phương trình (6):

$$Y_{I_1, \dots, I_n} \rightarrow (c\tau + d)^{k_Y} \rho_Y(\gamma) Y_{I_1, \dots, I_n}. \quad (9)$$

Tính bất biến của siêu thể $\mathcal{W}(\tau, \phi)$ dẫn đến yêu cầu $k_Y = k_1 + \dots + k_n$ và $\rho_Y \otimes \rho_{I_1} \otimes \dots \otimes \rho_{I_n} \ni I$.

Trong trường hợp của mô hình $\Gamma_4 \simeq S_4$, có 5 dạng modular độc lập tuyến tính với trọng số thấp nhất là $k_Y = 2$, ký hiệu là $Y_i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, 5$ (Dang, 2024) được chứng minh. Các modular form cơ sở này được sắp xếp thành một lưỡng tuyến **2** và một tam tuyến **3'** dưới các phép biến đổi của nhóm đối xứng S_4 modular. Cụ thể là:

$$Y_2(\tau) \equiv \begin{pmatrix} Y_1(\tau) \\ Y_2(\tau) \end{pmatrix}, \quad Y_{3'}(\tau) \equiv \begin{pmatrix} Y_3(\tau) \\ Y_4(\tau) \\ Y_5(\tau) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Biểu thức tường minh của các modular form $Y_i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, 5$ (Dang, 2024).

Từ 5 modular form cơ sở này, các modular form với trọng số cao hơn có thể được xây dựng, dựa vào phép nhân các biểu diễn của nhóm đối xứng S_4 . Ở đây, các modular form liên quan đến mô hình lý thuyết của nghiên cứu này được trình bày chi tiết. Cụ thể bao gồm, một đơn tuyến **1** và một lưỡng **2** tuyến trọng số bằng 4:

$$Y_1^{(4)} = Y_1^2 + Y_2^2, \quad Y_2^{(4)} = \begin{pmatrix} Y_2^2 - Y_1^2 \\ 2Y_1Y_2 \end{pmatrix}.$$

Hai tam tuyến **3** và **3'** với trọng số bằng 4:

$$Y_3^{(4)} = \begin{pmatrix} -2Y_2Y_3 \\ \sqrt{3}Y_1Y_5 + Y_2Y_4 \\ \sqrt{3}Y_1Y_4 + Y_2Y_5 \end{pmatrix},$$

$$Y_{3'}^{(4)} = \begin{pmatrix} 2Y_1Y_3 \\ \sqrt{3}Y_2Y_5 - Y_1Y_4 \\ \sqrt{3}Y_2Y_4 - Y_1Y_5 \end{pmatrix}.$$

Hai đơn tuyến **1** và **1'** với trọng số bằng 6:

$$Y_1^{(6)} = Y_1(3Y_2^2 - Y_1^2), \quad Y_{1'}^{(6)} = Y_2(3Y_1^2 - Y_2^2).$$

Nhị tuyến 2 và tam tuyến 3 với trọng số bằng 6:

$$Y_2^{(6)} = (Y_1^2 + Y_2^2) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix},$$

$$Y_3^{(6)} = \begin{pmatrix} Y_1(Y_4^2 - Y_5^2) \\ Y_3(Y_1Y_5 + \sqrt{3}Y_2Y_4) \\ -Y_3(Y_1Y_4 + \sqrt{3}Y_2Y_5) \end{pmatrix}.$$

Cuối cùng là hai tam tuyến 3' với trọng số bằng

6 là: $Y_{3',1}^{(6)} = (Y_1^2 + Y_2^2) \begin{pmatrix} Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix},$

$$Y_{3',2}^{(6)} = (Y_1^2 + Y_2^2) \begin{pmatrix} Y_2(Y_5^2 - Y_4^2) \\ -Y_3(Y_2Y_5 - \sqrt{3}Y_1Y_4) \\ Y_3(Y_2Y_4 - \sqrt{3}Y_1Y_5) \end{pmatrix}.$$

3.2. Nhóm S_4 modular cho khu vực lepton

Ở mục này, nhóm đối xứng modular S_4 được áp dụng vào khu vực lepton của vật lý hạt cơ bản. Theo đó, các siêu thể khu vực lepton và các hằng số tương tác tương ứng là $f_x(\tau)$ (là hàm của modulus τ và là các modular form) được trình bày ở Bảng 1. Các modular form $f_x(\tau)$ là các đơn tuyến đối với nhóm $SU(2)_L$ và là tam tuyến đối với nhóm modular S_4 , ngoại trừ duy nhất trường hợp $f_R(\tau)$ là nhị tuyến. Hai hạt RHNs là đơn tuyến đối với $SU(2)_L$ và tạo thành một lưỡng tuyến đối với nhóm S_4 modular. Hai hạt RHN được thêm vào trong mô hình để sinh khối lượng cho các neutrino hoạt động thông qua cơ chế SS tối thiểu, kết quả có một neutrino hoạt động có khối lượng bằng không.

$$M_l = \frac{v_d}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \alpha_1 Y_3 & -2\alpha_2 Y_2 Y_3 & \alpha_3 Y_1(Y_4^2 - Y_5^2) \\ \alpha_1 Y_5 & \alpha_2(\sqrt{3}Y_1Y_4 + Y_2Y_5) & -\alpha_3 Y_3(Y_1Y_4 + \sqrt{3}Y_2Y_5) \\ \alpha_1 Y_4 & \alpha_2(\sqrt{3}Y_1Y_5 + Y_2Y_4) & \alpha_3 Y_3(Y_1Y_5 + \sqrt{3}Y_2Y_4) \end{pmatrix}^*, \quad (14)$$

Bảng 1. Bảng các trường của mô hình và các hằng số tương tác $f_x(\tau)$ tương ứng. Tích của các trường đối với nhóm đối xứng chuẩn $SU(2)_L$ và đối xứng S_4 modular được liệt kê chi tiết, với $-k_l$ là trọng số modular

	l_L	e_R, μ_R, τ_R	N_R	h_u	h_d	$f_e(\tau), f_\mu(\tau), f_\tau(\tau)$	$f_D(\tau), f'_D(\tau)$	$f_R(\tau)$
$SU(2)_L$	2	1	1	2	2	1	1	1
S_4	3	1', 1, 1	2	1	1	3', 3, 3	3, 3'	2
$-k_l$	-5	3, 1, -1	-1	0	0	$k_{e,\mu,\tau} = 2, 4, 6$	$k_D = 6$	$k_R = 2$

$$M_D = \frac{v_u}{\sqrt{2}} \left[g_1 \begin{pmatrix} Y_1(Y_4^2 - Y_5^2) & 0 \\ \frac{1}{2}Y_3(Y_1Y_4 + \sqrt{3}Y_2Y_5) & \frac{\sqrt{3}}{2}Y_3(Y_1Y_5 + \sqrt{3}Y_2Y_4) \\ -\frac{1}{2}Y_3(Y_1Y_5 + \sqrt{3}Y_2Y_4) & -\frac{\sqrt{3}}{2}Y_3(Y_1Y_4 + \sqrt{3}Y_2Y_5) \end{pmatrix} + g_2(Y_1^2 + Y_2^2) \begin{pmatrix} 0 & -Y_3 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}Y_4 & \frac{1}{2}Y_5 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}Y_5 & \frac{1}{2}Y_4 \end{pmatrix} \right]^*, \quad (15)$$

Ba lưỡng tuyến lepton phân cực trái hợp nên tam tuyến đối với nhóm S_4 modular, trong khi các lepton mang điện phân cực phải đều là các đơn tuyến đối với cả hai nhóm này. Để sinh khối lượng các hạt, mô hình cần hai lưỡng tuyến Higgs, với trị trung bình chân không (VEV) lần lượt là $\langle h_u \rangle = v_u$, $\langle h_d \rangle = v_d$. Với $v_u = v \sin\beta$, $v_d = v \cos\beta$, $\sqrt{v_u^2 + v_d^2} = v = 246 \text{ GeV}$, với v VEV của trường Higgs của SM. Đại lượng $\tan\beta$ là một tham số trong mô hình hai lưỡng tuyến Higgs, được định nghĩa $\tan\beta = \frac{v_u}{v_d}$.

Với cấu trúc hạt được cho ở Bảng 1, siêu thể của mô hình gồm 3 phần, $\mathcal{W} = \mathcal{W}_l + \mathcal{W}_D + \mathcal{W}_R$, trong đó:

$$\mathcal{W}_l = \alpha_1 \left[(l_L e_R)_{3'} (f_e(\tau))_{3'} \right]_1 h_d + \alpha_2 \left[(l_L \mu_R)_3 (f_\mu(\tau))_3 \right]_1 h_d + \alpha_3 \left[(l_L \tau_R)_3 (f_\tau(\tau))_3 \right]_1 h_d, \quad (11)$$

$$\mathcal{W}_D = g_1 \left[(l_L N_R)_3 (f_D(\tau))_3 \right]_1 h_u + g_2 \left[(l_L N_R)_{3'} (f'_D(\tau))_{3'} \right]_1 h_u, \quad (12)$$

$$\mathcal{W}_R = \frac{1}{2} \Lambda \left[(N_R N_R)_2 (f_R(\tau))_2 \right]_1. \quad (13)$$

Từ các biểu thức của siêu thể cho ở các phương trình (11 – 13), ma trận khối lượng của các lepton mang điện M_l , của neutrino Dirac M_D và của các neutrino Majorana phân cực phải, M_R , rút ra được như sau:

$$M_R = \Lambda \begin{pmatrix} -Y_1 & Y_2 \\ Y_2 & Y_1 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

với Λ là thang khối lượng của các RHN, được cho là thực và dương. Khi đó, khối lượng của các neutrino hoạt động nhận được từ công thức SS:

$$m_\nu = -M_D M_R^{-1} M_D^T \sim v_u^2 g_1^2 / 2\Lambda \equiv m_0, \quad (17)$$

trong đó m_0 là thang khối lượng của các neutrino hoạt động, có độ lớn nhỏ hơn eV.

Để tìm các giá trị được phép (phù hợp với số liệu thực nghiệm) của các tham số của mô hình, cần thực hiện chéo hóa các ma trận khối lượng M_l và m_ν để tìm các trạng thái vật lý của các lepton mang điện và các neutrino hoạt động. Tuy nhiên, để thuận tiện cho việc tính toán, các ma trận Hermite $M_l M_l^\dagger$ và $m_\nu m_\nu^\dagger$ được chéo hóa như sau:

$$U_l^\dagger (M_l M_l^\dagger) U_l = \text{Diag}(m_e^2, m_\mu^2, m_\tau^2), \quad (18)$$

$$U_\nu^\dagger (m_\nu m_\nu^\dagger) U_\nu = \text{Diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2). \quad (19)$$

Khi đó ma trận trộn khu vực lepton nhận được là $U_{PMNS} = U_l^\dagger U_\nu$.

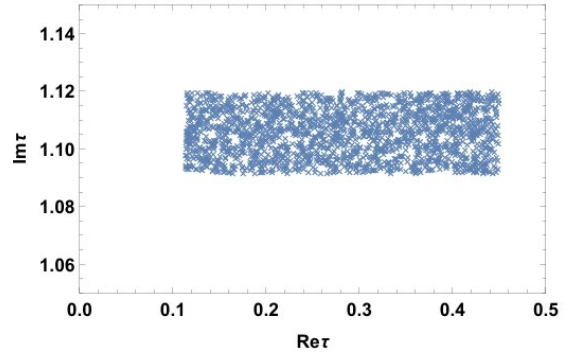
Bảng 2. Bảng giá trị thực nghiệm của khối lượng neutrino và các góc trộn khu vực lepton cho trường hợp (Esteban et al., 2019)

	Best fit	3 σ
$\sin^2\theta_{12}$	0.310	0.275 – 0.3500
$\sin^2\theta_{13}$	0.02241	0.02046 – 0.02040
$\sin^2\theta_{23}$	0.558	0.427 – 0.609
$\delta [^\circ]$	222	141 – 370
$\Delta m_{21}^2 [10^{-5} \text{eV}^2]$	7.39	6.79 – 8.01
$\Delta m_{31}^2 [10^{-5} \text{eV}^2]$	2.523	2.432 – 2.618

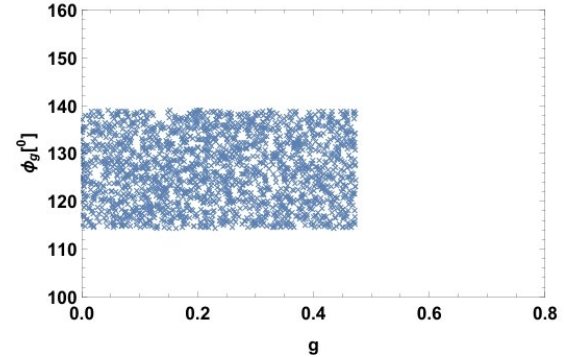
Từ các ma trận khối lượng M_l, M_D, M_R chúng ta có thể thấy được rằng mô hình có bảy tham số độc lập, đó là $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, g \equiv g_2/g_1, \phi_g = \arg(g_2/g_1), \text{Re}(\tau), \text{Im}(\tau)$. Bên cạnh các tham số Λ, v_u, v_d và $\tan\beta$ có thể được chọn trước. Các tham số $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, có thể xem là thực dương (vì phần ảo có thể xem như nằm hoàn toàn trong các modular form $Y_i(\tau), i = 1, 2, \dots, 5$). Ba tham số này hoàn toàn có thể được xác định từ khối lượng của các lepton mang điện $m_e = 0.511 \text{ MeV}$, $m_\mu = 105.7 \text{ MeV}$ và $m_\tau = 1776.86 \text{ MeV}$ (Esteban et al., 2019). Năm tham số còn lại có thể được xác định từ sáu dữ liệu thực nghiệm của các thí nghiệm về dao động neutrino cho ở Bảng 2, với miền giá trị được chọn ở độ tin cậy 3σ , cho trường hợp phân bậc tự nhiên (Normal Hierarchy, NH) của khối lượng các neutrino hoạt động, tức là $m_1 < m_2 < m_3$. Cũng lưu ý thêm rằng, thang khối lượng của neutrino hoạt

động, m_0 , có thể ước lượng được từ Δm_{31}^2 , tức là $m_0 \equiv v_u^2 g_1^2 / 2\Lambda \sim \sqrt{\Delta m_{31}^2} \sim 0.05 \text{ eV}$. Bằng cách đưa các giá trị thực nghiệm ở độ tin cậy 3σ vào các phương trình (14-19), các giá trị cho phép của các tham số của mô hình có thể được tìm thấy và được biểu diễn trên Hình 1 và Hình 2.

Từ hai hình vẽ Hình 1 và Hình 2, chúng ta có thể thấy được các giá trị được phép của các tham số $g, \phi_g, \text{Re}(\tau)$ và $\text{Im}(\tau)$ lần lượt là $0.11 \leq \text{Re}(\tau) \leq 0.45$, $1.09 \leq \text{Im}(\tau) \leq 1.12$, $0 \leq g \leq 0.48$ và $114^\circ \leq \phi_g \leq 140^\circ$.



Hình 1. Miền giá trị cho phép của $\text{Re}(\tau)$ và $\text{Im}(\tau)$.



Hình 2. Miền giá trị cho phép của g và ϕ_g .

Cho đến lúc này việc xây dựng mô hình đối xứng S_4 modular đã hoàn thành. Mô hình đã thành công trong việc giải thích khối lượng và các tham số trộn của khu vực lepton. Đồng thời qua đó, miền giá trị cho phép của các tham số tự do của mô hình cũng được xác định. Tiếp theo, quá trình leptogenesis của mô hình được nghiên cứu để tìm hiểu xem mô hình nghiên cứu có giải thích được bất đối xứng BAU của vũ trụ hay không.

4. LEPTOGENESIS

Để khảo sát quá trình leptogenesis do sự phân rã của các RHN, trước hết, ma trận khối lượng của chúng cần được chéo hóa và đưa các RHN về các trạng thái vật lý:

$$U_R^\dagger M_R U_R^* = \text{Diag}(M_1, M_2), \quad (20)$$

trong đó

$$U_R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} i & i \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

với

$$\varphi_1 = \text{Arg}[Y_1^*(\tau) - iY_2^*(\tau)],$$

$$\varphi_2 = \text{Arg}[Y_1^*(\tau) + iY_2^*(\tau)]. \quad (22)$$

Khối lượng của hai hạt RHN Majorana nặng nhận được như sau:

$$M_{1,2} = \Lambda \sqrt{|Y_1(\tau)|^2 + |Y_2(\tau)|^2 \pm \text{Im}[Y_1^*(\tau)Y_2(\tau)]}.$$

Có thể thấy khối lượng của các RHN phụ thuộc chủ yếu vào modulus τ , bởi vì thang khối lượng RHN Λ , như thông thường, được chọn một cách tùy ý. Vì leptogenesis phụ thuộc chủ yếu vào sự phân rã của RHN nhẹ nhất, tức là phụ thuộc vào dấu của số hạng $\text{Im}[Y_1^*(\tau)Y_2(\tau)]$. Do đó, leptogenesis được khảo sát trong hai trường hợp hạt RHN nhẹ nhất là M_1 hoặc M_2 . Bên cạnh đó, khi chuyển hệ cơ sở để các lepton mang điện và các RHN về các trạng thái vật lý (tức là M_i và M_R là chéo và thực), thì ma trận tương tác Yukawa của neutrino Dirac biến đổi như sau: $Y_\nu \rightarrow \tilde{Y}_\nu = U_L^\dagger Y_\nu U_R^*$, trong đó $Y_\nu = \sqrt{2}M_D/v_u$.

Quá trình leptogenesis bắt đầu với sự phân rã vi phạm CP (Charge conjugate and Parity) của RHN nhẹ nhất. Quá trình phân rã này tạo ra bất đối xứng (số) lepton (lepton asymmetry). Nếu sự phân rã của các RHN nhẹ nhất xảy ra khi nhiệt độ của Vũ trụ vào cỡ $T > (1 + \tan^2 \beta) \cdot 10^{12} \text{ GeV}$, thì sự phân rã của RHN ra các thế hệ lepton khác nhau là không phân biệt được, và được gọi là leptogenesis thông thường (conventional leptogenesis), hoặc leptogenesis không hương vị (unflavored leptogenesis) (Ahn, 2010). Tuy nhiên, nếu khối lượng của RHN vào khoảng $M \leq (1 + \tan^2 \beta) \cdot 10^{12} \text{ GeV}$, thì đóng góp của quá trình ra ra các lepton thế hệ khác nhau vào bất đối xứng lepton là khác nhau và ta gọi đây là quá trình leptogenesis có tính hương vị (flavored leptogenesis). Nếu trường hợp này xảy ra, như trong nghiên cứu này, thì bất đối xứng CP được tạo ra do quá trình rã của RHN thứ i (là RHN nhẹ nhất) được cho bởi (Nguyen, 2014):

$$\varepsilon_i^\alpha = \frac{1}{8\pi H_{ii}} \text{Im}[H_{ij}(\tilde{Y})_{i\alpha}^* (\tilde{Y})_{j\alpha}] g\left(\frac{M_j^2}{M_i^2}\right), \quad (23)$$

với $i \neq j$, và $H = \tilde{Y}_\nu^\dagger \tilde{Y}_\nu$. Hàm $g(x)$ được tính từ các giản đồ một vòng đóng góp vào ε_i^α được cho bởi:

$$g\left(\frac{M_j^2}{M_i^2}\right) \equiv g_{ij}(x) = \sqrt{x} \left(\frac{2}{1-x} - \ln \frac{1+x}{x} \right). \quad (24)$$

Bên cạnh đại lượng ε_i^α , để tính số bất đối xứng baryon ta cần phải tính các tham số suy giảm (washout parameter) K_i^α do sự phân rã ngược của RHN thứ i ra lepton thế hệ α ($\alpha = e, \mu, \tau$). Biểu thức tường minh của K_i^α được cho như sau (Nguyen, 2014):

$$K_i^\alpha = \frac{\Gamma_i^\alpha}{H(M_i)} = \frac{\tilde{m}_i^\alpha}{m_*}, \quad (25)$$

trong đó $\tilde{m}_i^\alpha$ được cho bởi $\tilde{m}_i^\alpha = \frac{v_u^2 (\tilde{Y}_\nu)_{i\alpha} (\tilde{Y}_\nu^\dagger)_{i\alpha}}{M_i}$ và khối lượng hiệu dụng của mô hình được định nghĩa

$$m_* = \frac{16\pi^{5/2}}{3\sqrt{5}} \sqrt{g_*} \frac{v_u^2}{M_{\text{Planck}}}.$$

Khối lượng Planck $M_{\text{Planck}} = 1,22 \cdot 10^{19} \text{ GeV}$. Γ_i^α là độ rộng phân rã riêng phần của kênh $N_i \rightarrow l^\alpha \varphi^\dagger$, $H(M_i)$ là hằng số Hubble và $g_* = 288,75$ là số bậc tự do hiệu dụng của mô hình ở nhiệt độ cỡ $T = M_i$.

Sau khi bất đối xứng CP do phân rã của RHN thứ i là ε_i^α và tham số suy giảm được tính toán, giá trị cuối cùng của bất đối xứng baryon được cho bởi, trường hợp khối lượng của RHN nhẹ nhất thỏa $M \leq (1 + \tan^2 \beta) \cdot 10^9 \text{ GeV}$ (Nguyen, 2014):

$$\eta_B \simeq -10^{-2} \sum_{N_i} \left[\varepsilon_i^e \kappa_i^e \left(\frac{93}{110} K_i^e \right) + \varepsilon_i^\mu \kappa_i^\mu \left(\frac{19}{30} K_i^\mu \right) + \varepsilon_i^\tau \kappa_i^\tau \left(\frac{19}{30} K_i^\tau \right) \right]. \quad (26)$$

Đối với trường hợp khối lượng RHN nhẹ nhất thỏa điều kiện $(1 + \tan^2 \beta) \cdot 10^9 \text{ GeV} \leq M \leq (1 + \tan^2 \beta) \cdot 10^{12} \text{ GeV}$ là:

$$\eta_B \simeq -10^{-2} \sum_{N_i} \left[\varepsilon_i^e \kappa_i^e \left(\frac{541}{761} K_i^e \right) + \varepsilon_i^\tau \kappa_i^\tau \left(\frac{494}{761} K_i^\tau \right) \right] \quad (27)$$

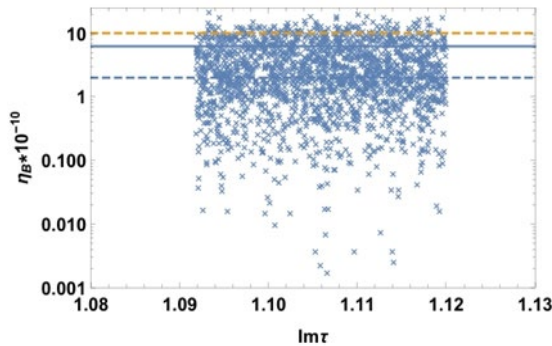
Trong đó $\varepsilon_i^2 = \varepsilon_i^e + \varepsilon_i^\mu$ and $K_i^2 = K_i^e + K_i^\mu$. Trong hai phương trình (24) và (25), hệ số suy giảm (washout factor) κ_i^α được định nghĩa:

$$\kappa_i^\alpha \simeq \left(\frac{8.25}{K_i^\alpha} + \left(\frac{K_i^\alpha}{0.2} \right)^{1.16} \right)^{-1}. \quad (28)$$

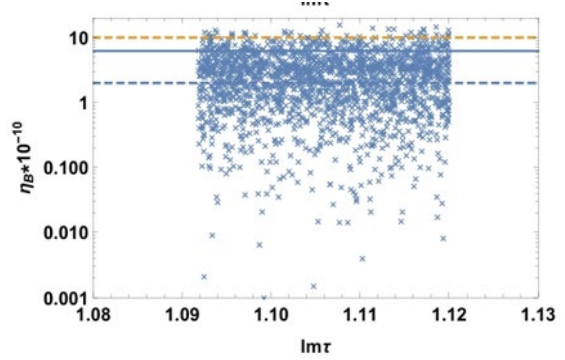
Cho đến lúc này, các yếu tố cần thiết cho quá trình tính BAU, η_B , đã được trình bày đầy đủ. Các giá trị cho phép của các tham số của mô hình tìm được ở trên (mục 3) được sử dụng để thực hiện tính

số. Như đã đề cập ở trên, leptogenesis, hay giá trị của BAU, chủ yếu do sự phân rã của RHN nhẹ nhất, do đó trong quá trình tính số, ta xét hai trường hợp. Trong trường hợp $M_1 < M_2$ ($M_2 < M_1$), thì BAU nhận đóng góp chủ đạo của RHN có khối lượng M_1 (M_2). Các giá trị tiên đoán của mô hình cho η_B tương ứng cho hai trường hợp được biểu diễn tương ứng trên Hình 3 và Hình 4. Trong cả hai trường hợp này, thang khối lượng của RHN được chọn là vào cỡ $2 \cdot 10^{11}$ GeV, tham số $\tan\beta$ được chọn là $\tan\beta = 30$. Trong cả hai hình này, đường đứt nét nằm ngang là giá trị phù hợp nhất (the best fit value) của BAU, $\eta_B = 6.2 \cdot 10^{-10}$. Các đường đứt nét nằm ngang là các giá trị cho phép của thực nghiệm về giá trị của BAU, $2 \cdot 10^{-10} \leq \eta_B \leq 10^{-9}$ (Ade et al., 2016).

Các kết quả số biểu diễn trên Hình 3 và Hình 4 cho thấy, mô hình đã thành công trong giải thích bất đối xứng vật chất – phản vật chất của Vũ trụ (BAU), với thang khối lượng của các RHN vào khoảng 10^{11} GeV.



Hình 3. Giá trị tiên đoán của mô hình cho giá trị của BAU, η_B , như là hàm của $Im(\tau)$ cho trường hợp $M_1 < M_2$.



Hình 4. Giá trị tiên đoán của mô hình cho giá trị của BAU, η_B , như là hàm của $Im(\tau)$ cho trường hợp $M_2 < M_1$.

5. KẾT LUẬN

Mô hình đối xứng S_4 modular, trong hình thức luận siêu đối xứng tối thiểu, cho khu vực lepton được nghiên cứu. Với mục tiêu ban đầu là làm giảm số lượng các tham số tự do và các hạt mới không có khả năng phát hiện bằng thực nghiệm hiện nay cũng như tương lai gần, khi so sánh với các mô hình đối xứng gián đoạn thuần nhất. Mô hình đã giải thích thỏa đáng các dữ liệu thực nghiệm của khu vực lepton ở độ tin cậy 3σ . Trên cơ sở này, miền giá trị cho phép của các tham số của mô hình cũng được tìm thấy. Với các giá trị được phép này, quá trình leptogenesis có tính đến hiệu ứng của các lepton thế hệ được tính toán nhằm tính bất đối xứng baryon, BAU. Giá trị thực nghiệm của BAU hoàn toàn được giải thích bởi mô hình nghiên cứu khi thang khối lượng của các RHN được chọn vào khoảng 10^{11} GeV hoặc nặng hơn, với tham số $\tan\beta = 30$. Trong nghiên cứu này, trường hợp phân bậc tự nhiên trong khối lượng các neutrino hoạt động được giới hạn. Trường hợp khối lượng phân bậc nghịch hoàn toàn có thể được tính toán một cách tương tự.

TÀI LIỆU THAM KHẢO (REFERENCES)

- Ade, P. A. R., et al. (Planck Collaboration) (2016). Planck 2015 results: XIII Cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics*, 594 (A13), 63.
<https://doi.org/10.1051/0004-6361/201525830>
- Ahn Y. H., Kang S. K., Kim C. S., & Nguyen, T. Phong. (2010). Direct link between neutrinoless double beta decay and leptogenesis in a seesaw model with S_4 symmetry. *Phys. Rev. D* 82 (9), 093005.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.82.093005>
- Bazzocchi, F., & Morisi S. (2009). S_4 as a natural flavor symmetry for lepton mixing. *Phys. Rev. D* 80 (9), 096005.
<https://doi.org/10.1103/PhysRevD.80.096005>
- Dang, T. H. T. (2024). *S_4 Modular Symmetry Model and Leptogenesis* (Master's thesis). Can Tho University (in Vietnamese).
- Esteban, I., Gonzalez-Garcia M.C., Alvaro, H. C., Maltoni M., & Schwetz T. (2019). Global analysis of three-flavour neutrino oscillations: synergies and tensions in the determination of θ_{23} , δ_{CP} and the mass ordering. *J. High Energ. Phys.* 01 (106), 1-34.
[https://doi.org/10.1007/JHEP01\(2019\)106](https://doi.org/10.1007/JHEP01(2019)106)
- Fukugita, M., & Yanagida, T. (1986). Baryogenesis without grand unification. *Phys. Lett. B* 174 (1),

- 45-47.
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(86\)91126-3](https://doi.org/10.1016/0370-2693(86)91126-3)
- Ferruccio F. (2017). *Are neutrino masses modular forms?*. World Scientific Connect.
https://doi.org/10.1142/9789813238053_0012
- Feruglio, F., Hagedorn M., Lin Y., & Merlo L. (2007). Tri-bimaximal neutrino mixing and quark masses from a discrete flavour symmetry. *Nucl. Phys. B* 775 (1-2), 120-142.
<https://doi.org/10.1016/j.nuclphysb.2007.04.002>
- Harrison, P.F., Perkins, D.H., & Scott, W.G. (2002). Tri-bimaximal mixing and the neutrino oscillation data. *Phys. Lett. B* 530 (1-4), 167-173.
[https://doi.org/10.1016/S0370-2693\(02\)01336-9](https://doi.org/10.1016/S0370-2693(02)01336-9)
- Minkowski, P. (1977). $\mu \rightarrow e\gamma$ at a rate of one out of 109 muon decays. *Phys. Lett. B* 67 (4), 421-428.
[https://doi.org/10.1016/0370-2693\(77\)90435-X](https://doi.org/10.1016/0370-2693(77)90435-X)
- Mohapatra, R.N., Nasri, S., & Yu, H. B. (2006). S_3 symmetry and tri-bimaximal mixing. *Phys. Lett. B* 639 (3-4), 318-321.
<https://doi.org/10.1016/j.physletb.2006.06.032>
- Nguyen, T. P. (2014). *Neutrino and Baryon Asymmetry of the Universe*. Vietnam National University Publishing House, Ho Chi Minh city (in Vietnamese).
- Weinberg, S. (1993). *The First Three Minutes: A Modern View Of The Origin Of The Universe*, (2nd ed.). Basic Books. ISBN 0-465-02437-8.