



DOI:10.22144/ctujos.2025.193

KHÔI PHỤC VÀ XẤP XỈ HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH TRONG KHÔNG GIAN BESOV VỚI ĐỘ TRƠN HỖN HỢP

Nguyễn Mạnh Cường*

Trường Đại học Kiên Giang, Việt Nam

*Tác giả liên hệ (Corresponding author): nmcuong@vnkgu.edu.vn

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 08/04/2025

Sửa bài (Revised): 05/05/2025

Duyệt đăng (Accepted): 20/08/2025

Title: Recovery and approximations of functions by linear methods in Besov spaces having mixed smoothness

Author: Nguyen Manh Cuong*

Affiliation(s): Kien Giang University, Viet Nam

TÓM TẮT

Bài báo được thực hiện nhằm nghiên cứu việc khôi phục và xấp xỉ hàm số trong không gian Besov có độ trơn hỗn hợp. Các phương pháp tuyến tính từ giá trị lấy mẫu được xây dựng để khôi phục hàm số thuộc không gian Besov và đánh giá tiệm cận tốc độ hội tụ của phương pháp. Kết quả chính của bài báo là mở rộng và tổng quát các kết quả đã có.

Từ khóa: Không gian Besov, khôi phục tuyến tính, khôi phục phi tuyến thích nghi

ABSTRACT

This paper studies recovery and approximation of functions in the Besov spaces with mixed smoothness. We construct linear sampling recovery methods of functions in the Besov spaces, and evaluate the asymptotic behavior of the method. The main result of the paper is to extend and generalize the previous results.

Keywords: Besov-type spaces, linear sampling recovery, nonlinear adaptive sampling recovery

1. GIỚI THIỆU

Bài toán khôi phục tín hiệu là một bài toán hết sức quan trọng có ứng dụng trong nhiều lĩnh vực của cuộc sống, vì trong thực tế không có một loại máy nào có thể cho ta thông tin chính xác của tín hiệu. Khi đó tín hiệu được mô hình hóa như một hàm số (Chui, 1992).

Bài toán nền tảng về khôi phục hàm số từ hữu hạn giá trị lấy mẫu đã được nghiên cứu: khôi phục gần đúng hàm số f từ n giá trị lấy mẫu. Trên cơ sở thông tin này chúng ta xây dựng một phương pháp để khôi phục. Trong cách tiếp cận truyền thống thì giá trị lấy mẫu và phương pháp khôi phục là không thích nghi với hàm số, nghĩa là các điểm lấy mẫu và phương pháp khôi phục được chọn giống nhau cho mọi hàm số (Temlyakov, 1985; Dinh, 2011a). Trong bài báo này, một trong những phương pháp khôi

phục không thích nghi đó là phương pháp tuyến tính cho lớp hàm số thuộc không gian Besov đã được nghiên cứu. Lý thuyết sóng nhỏ được hình thành và phát triển trong những năm 90 của thế kỷ trước, là một trong những công cụ biểu diễn hiệu quả trong bài toán khôi phục và xấp xỉ hàm số từ giá trị lấy mẫu, vì vậy để nghiên cứu bài toán khôi phục hàm số ta sử dụng các biểu diễn sóng nhỏ giả nội suy bởi các B-spline (Chui, 1992; DeVore & Lorentz, 1993). Như đã nói trên thì phương pháp tuyến tính là phương pháp truyền thống và mặc dù có nhiều cách tiếp cận cho bài toán khôi phục hàm số nhưng phương pháp tuyến tính vẫn luôn được quan tâm nghiên cứu bởi ưu điểm của nó, có thể kể đến các công trình nổi bật của Temlyakov (1985,1993), Dinh (2011a, 2016). Nguyen và Mai (2018) cũng đã nghiên cứu bài toán khôi phục xấp xỉ hàm số trong

không gian Besov $B_{p,\theta}^\Omega$ với độ trơn đẳng hướng bằng phương pháp tuyến tính.

Các ký hiệu sau đây được sử dụng trong bài báo: $A_n(f) \ll B_n(f)$ nếu $A_n(f) \leq C \cdot B_n(f)$, C là một hằng số độc lập với n và f ; $A_n(f) \asymp B_n(f)$ nếu $A_n(f) \ll B_n(f)$ và $B_n(f) \ll A_n(f)$; Cho $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}_+^d$: $x_+ = \max(0, x)$, $2^k = (2^{k_1}, \dots, 2^{k_d})$, $|k|_1 = \sum_{i=1}^d k_i$, $k \geq k'$ nếu $k_j \geq k'_j$, $\forall j = 1, \dots, d$; $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^d$; $\mathbb{I} = [0, 1]$.

Ta nhắc lại định nghĩa không gian Besov $B_{p,\theta}^a$ (Nguyen, 2019; Dinh, 2001).

Định nghĩa 1. Cho f là một hàm số thuộc không gian $L_q(\mathbb{I}^d)$, e là tập con bất kỳ của $[d] := \{1, 2, \dots, d\}$, toán tử sai phân bậc (l, e) của hàm số

$$|f|_{B_{p,\theta}^{a,e}} := \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{I}^d} \left\{ \prod_{i \in e} t_i^{-a_i} \omega_i^e(f, t)_p \right\}^\theta \prod_{i \in e} t_i^{-1} dt \right)^{1/\theta}, & \theta < \infty \\ \sup_{t \in \mathbb{I}^d} \left\{ \prod_{i \in e} t_i^{-a_i} \omega_i^e(f, t)_p \right\}, & \theta = \infty \end{cases}$$

Trường hợp đặc biệt, $|f|_{B_{p,\theta}^{a,\emptyset}} = \|f\|_p$, ở đây l là một số tự nhiên thỏa mãn $l > \max_{1 \leq i \leq d} a_i$. Định nghĩa nửa chuẩn này không phụ thuộc vào l , nói cách khác các giá trị khác nhau của l xác định các nửa chuẩn tương đương. Không gian $B_{p,\theta}^a$ là tập hợp tất cả các hàm số $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ sao cho chuẩn Besov sau đây là hữu hạn:

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^a} := \sum_{e \subset [d]} |f|_{B_{p,\theta}^{a,e}}.$$

Ký hiệu $U_{p,\theta}^a = \{f \in B_{p,\theta}^a : \|f\|_{B_{p,\theta}^a} \leq 1\}$ là hình cầu đơn vị của không gian $B_{p,\theta}^a$.

Ví dụ: Cho $l = 2$, $0 < \alpha < 2$, $d = 1$. Không gian Besov $B_{p,\theta}^\alpha$ các hàm số $f \in L_p(\mathbb{I})$ được xét. Khi đó các hàm số khả vi liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{I}$ thuộc không gian Besov $B_{p,\theta}^\alpha$ và không gian các hàm số liên tục đến cấp 2 trên $\mathbb{I}$ có thể xem là một không gian Besov.

Nếu $l > 2$, $0 < \alpha < l$, $d = 1$ thì không gian các hàm số có đạo hàm đến cấp l trên $\mathbb{I}$ và đạo hàm cấp l bị chặn trên $\mathbb{I}$ là không gian con của không gian Besov $B_{p,\theta}^\alpha$.

Bài báo được thực hiện nhằm nghiên cứu việc khôi phục và xấp xỉ cho lớp hàm số xác định trên

nhiều biến xác định trên $\mathbb{I}^d$ ký hiệu là $\Delta_h^{l,e}$ và được xác định bởi:

$$\Delta_h^{l,e} := \prod_{i \in e} \Delta_{h_i}^{l_i}, \quad \Delta_h^{l,\emptyset} = I$$

Ở đây toán tử $\Delta_{h_i}^{l_i}$ là toán tử sai phân tương ứng với hàm số khi xem f là hàm số một biến của biến x_i với các biến còn lại cố định. Đặt

$$\omega_l^e(f, t)_p := \sup_{|h_i| < t_i, i \in e} \|\Delta_h^{l,e} f\|_p, \quad t \in \mathbb{I}^d$$

là môđun tron hỗn hợp bậc (l, e) của f . Đặc biệt, $\omega_l^\emptyset(f, t)_p = \|f\|_p$.

Cho $0 < p, \theta \leq \infty$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}_+^d$. Chúng ta xây dựng nửa chuẩn $|f|_{B_{p,\theta}^{a,e}}$ của hàm số $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ như sau:

$\mathbb{I}^d := [0, 1]^d$ trong không gian Besov với độ trơn hỗn hợp $B_{p,\theta}^a$, $a = (a_1, a_2, \dots, a_d) \in \mathbb{R}_+^d$ bằng phương pháp tuyến tính. Dinh (2016) đã nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số trong không gian Besov $B_{p,\theta}^a$ khi $a_1 < a_2 \leq \dots \leq a_d$, phương pháp tuyến tính đã được xây dựng và đánh giá tiệm cận tốc độ hội tụ của phương pháp:

$$r_n \left(U_{p,\theta}^a, L_q(\mathbb{I}^d) \right) \asymp n^{-a_1 + (1/p - 1/q)_+}.$$

Dinh (2011a) nghiên cứu cho trường hợp $\alpha = a_1 = a_2 = \dots = a_d$, xây dựng phương pháp tuyến tính để khôi phục và xấp xỉ hàm số xác định trên $\mathbb{I}^d$ thuộc hình cầu đơn vị $U_{p,\theta}^{\alpha \mathbf{1}}$ trong không gian Besov $B_{p,\theta}^{\alpha \mathbf{1}}$, với $0 < p, \theta, q \leq \infty$ và $\alpha > 1/p$. Hơn nữa ta có

$$r_n \left(U_{p,\theta}^{\alpha \mathbf{1}}, L_q(\mathbb{I}^d) \right) \asymp n^{-\alpha + (1/p - 1/q)_+ + \log_2^{(d-1)b} n},$$

với $b = b(p, q, \alpha, \theta) > 0$.

Trong bài báo này ta mở rộng, tổng quát các kết quả đã có ở (Dinh, 2011a; Dinh, 2016) cho trường hợp $p \geq q$. Chúng ta xây dựng các phương pháp tuyến tính để khôi phục và xấp xỉ hàm số trong không gian Besov $B_{p,\theta}^a$ với $0 < \alpha = a_1 = a_2 = \dots = a_s = a_{s+1} < a_{s+2} \leq \dots \leq a_d$, $0 \leq s \leq d - 1$. Đánh giá tiệm cận tốc độ hội tụ của phương pháp

$$r_n \left(U_{p,\theta}^a, L_q(\mathbb{I}^d) \right) \asymp n^{-\alpha+(1/p-1/q)+\log_2^s n}.$$

Từ đó có thể nhận thấy rằng các kết quả của Dinh (2011a) và Dinh (2016) trong trường hợp $p \geq q$ lần lượt ứng với $s = d - 1$, $s = 0$.

2. BIỂU DIỄN B-SPLINE GIẢ NỘI SUY QUÁ GIÁ TRỊ LẤY MẪU

Định nghĩa 2. Ký hiệu N_r là B-spline chuẩn tắc bậc r với các nút tại các điểm $0, 1, \dots, r$ được xác định như sau: N_1 là hàm đặc trưng trên nửa khoảng $[0, 1]$; với $r \geq 2$, N_r được định nghĩa bởi tích chập

$$N_r(x) := \int_{-\infty}^{\infty} N_{r-1}(x-y)N_1(y)dy$$

Đặt $M_r(x) := N_r(x + r/2)$ được gọi là B-spline trung tâm bậc r .

Định nghĩa 2 có thể xem trong các tài liệu (Chui, 1992; DeVore & Lorentz, 1993).

Ta định nghĩa B - spline sóng nhỏ

$$M_{k,s}(x) := M(2^k x - s)$$

cho một số không âm k và $s \in \mathbb{Z}$. Ký hiệu $\mathbf{M}$ là tập hợp tất cả $M_{k,s}$ không triệt tiêu trên $\mathbb{I}$. Cho $\lambda = \{\lambda(j)\}_{j \in P(\mu)}$ là dãy chẵn hữu hạn, tức là $\lambda(j) = \lambda(-j)$, ở đây $P(\mu) := \{j \in \mathbb{Z} : |j| \leq \mu\}$ và $\mu \geq r - 1$. Chúng ta định nghĩa toán tử tuyến tính Q tác động lên hàm f xác định trên $\mathbb{R}$ bởi

$$Q(f, x) := \sum_{s \in \mathbb{Z}} \Lambda(f, s)M(x - s), \quad (1)$$

ở đây

$$\Lambda(f, s) := \sum_{j \in P(\mu)} \lambda(j)f(s - j). \quad (2)$$

$$U_k(f, x) := f(x_0) + \sum_{s=1}^{2r-1} \frac{2^{sk} \Delta_{2^{-k}}^s f(x_0)}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} (x - x_j)$$

$$V_k(f, x) := f(x_{2^k-2r+1}) + \sum_{s=1}^{2r-1} \frac{2^{sk} \Delta_{2^{-k}}^s f(x_{2^k-2r+1})}{s!} \prod_{j=0}^{s-1} (x - x_{2^k-2r+1+j}).$$

Ký hiệu $\bar{f}_k$ là hàm số mở rộng của f trên $\mathbb{R}$ và được xác định bởi:

$$\bar{f}_k(x) = \begin{cases} U_k(f, x), & x < 0 \\ f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ V_k(f, x), & x > 1. \end{cases}$$

Khi đó, từ định nghĩa của B-spline suy ra toán tử Q bị chặn trên $C(\mathbb{R})$ và

$$\|Q(f)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\Lambda\| \|f\|_{C(\mathbb{R})},$$

trong đó $\|\Lambda\| = \sum_{j \in P(\mu)} |\lambda(j)|$.

Ký hiệu $\mathcal{P}_{2r-1}$ là tập hợp các đa thức đại số có bậc không vượt quá $2r - 1$. Toán tử Q được xác định từ (1 - 2) được gọi là toán tử giả nội suy trong $C(\mathbb{R})$ nếu toán tử này tái tạo lại $\mathcal{P}_{2r-1}$, tức là

$$Q(p) = p, p \in \mathcal{P}_{2r-1}.$$

Giả sử Q là một toán tử giả nội suy từ (1 - 2), cho $h > 0$ và một hàm f xác định trên $\mathbb{R}$, chúng ta xác định toán tử $Q(\cdot; h)$ bởi

$$Q(f; h) := \sigma_h \circ Q \circ \sigma_{1/h}(f),$$

ở đây $\sigma_h(f, x) = f(x/h)$. Từ định nghĩa của $Q(f; h)$, ta có

$$Q(f, x; h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \Lambda(f, k; h)M(h^{-1}x - k),$$

với $\Lambda(f, k; h) = \sum_{j \in P(\mu)} \lambda(j)f(h(k - j))$.

Toán tử $Q(\cdot; h)$ có các tính chất tương tự như toán tử Q , cũng được gọi là một toán tử giả nội suy trên $C(\mathbb{R})$. Nhưng $Q(\cdot; h)$ không được định nghĩa cho f trên $\mathbb{I}$, do đó chưa khôi phục được hàm số f với các điểm lấy mẫu trong $\mathbb{I}$. Một cách tiếp cận được Dinh (2009) và Dinh (2011b) đề xuất để xây dựng toán tử giả nội suy cho một hàm số trên $\mathbb{I}$ là mở rộng nó bằng các đa thức nội suy Lagrange.

Cho một số nguyên không âm k , đặt $x_j = j2^{-k}$, $j \in \mathbb{Z}$. Nếu f là một hàm số trên $\mathbb{I}$, ký hiệu $U_k(f)$ và $V_k(f)$ lần lượt là các đa thức nội suy Lagrange tại $2r$ điểm bên trái $x_0, x_1, \dots, x_{2r-1}$ và $2r$ điểm bên phải $x_{2^k-2r+1}, x_{2^k-2r+3}, \dots, x_{2^k}$ trên đoạn $\mathbb{I}$ được xác định bởi:

Nếu f liên tục trên $\mathbb{I}$ thì $\bar{f}_k$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử Q là một toán tử giả nội suy (1 - 2) trên $C(\mathbb{R})$. Chúng ta xây dựng toán tử Q_k xác định bởi

$$Q_k(f, x) := Q(\bar{f}_k, x; 2^{-k}), x \in \mathbb{I}$$

với hàm f trên $\mathbb{I}$. Khi đó,

$$Q_k(f, x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x), \forall x \in \mathbb{I},$$

trong đó

$$J(k) := \{s \in \mathbb{Z}, -r < s < 2^k + r\}$$

và

$$\begin{aligned} a_{k,s}(f) &:= \Lambda(\bar{f}_k, s; 2^{-k}) \\ &= \sum_{|j| \leq \mu} \lambda(j) \bar{f}_k(2^{-k}(s - j)). \end{aligned}$$

Chúng ta nhận thấy Q_k cũng là toán tử giả nội suy trên $\mathcal{C}(\mathbb{I})$.

Cho $k \in \mathbb{Z}_+^d$, ta định nghĩa toán tử hỗn hợp Q_k :

$$Q_k := \prod_{i=1}^d Q_{k_i}, \quad (3)$$

ở đây các toán tử một biến Q_{k_i} được áp dụng tương tự cho hàm số một biến khi xem f là hàm số một biến x_i và các biến còn lại cố định. Ta cũng định nghĩa d -biến B -spline $M_{k,s}$ như sau:

$$M_{k,s}(x) := \prod_{i=1}^d M_{k_i, s_i}(x_i). \quad (4)$$

Chúng ta xây dựng toán tử nhiều biến Q_k được xác định bởi:

$$Q_k(f, x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x), \forall x \in \mathbb{I}^d$$

Ở đây

$$\begin{aligned} J(k) &:= \{s \in \mathbb{Z}^d, -r < s_i < 2^{k_i+k_0} + r, i \\ &= 1, 2, \dots, d\} \end{aligned}$$

là tập hợp các giá trị của s sao cho $M_{k,s}$ không đồng nhất bằng 0 trên $\mathbb{I}^d$. Chú ý rằng

$$a_{k,s}(f) = a_{k_1, s_1} \left(\left(a_{k_2, s_2} (\dots a_{k_d, s_d} (f)) \right) \right) \quad (5)$$

$$c_{k,s}(f) := a_{k,s}(f) - a'_{k,s}(f), k \geq 0,$$

$$a'_{k,s}(f) := 2^{-2r+1} \sum_{(m,j) \in C_r(k,s)} \binom{2r}{j} a_{k-1,m}(f), \quad k > 0, a'_{0,s}(f) := 0,$$

ở đây

$$\begin{aligned} C_r(k, s) &:= \{(m, j): 2m + j - r = s, m \\ &\in J(k-1), 0 \leq j \leq 2r\}, \end{aligned}$$

với các hàm hệ số a_{k_i, s_i} được áp dụng tương tự cho hàm số một biến khi xem f là hàm số một biến x_i với các biến còn lại cố định.

Tương tự như toán tử Q và $Q(\cdot; h)$, thì toán tử Q_k là tuyến tính bị chặn trên $\mathcal{C}(\mathbb{I}^d)$ và tái tạo $\mathcal{P}_{2r-1}$. Đặc biệt, chúng ta có:

$$\|Q_k(f)\|_{\mathcal{C}(\mathbb{I}^d)} \leq C \|\Lambda\| \|f\|_{\mathcal{C}(\mathbb{I}^d)} \quad (6)$$

với mỗi $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^d)$, hằng số C không phụ thuộc k và

$$Q_k(\varphi^*) = \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_{2r-1},$$

trong đó φ^* là hạn chế của φ trên $\mathbb{I}^d$. Toán tử nhiều biến Q_k được gọi là toán tử giả nội suy trên $\mathcal{C}(\mathbb{I}^d)$.

Cho $k \in \mathbb{Z}_+$, đặt $q_k := Q_k - Q_{k-1}$ với quy ước $Q_{-1}(f) = 0$, chúng ta có

$$Q_k = \sum_{k' \leq k} q_{k'}.$$

Bổ đề 1. Giả sử $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^d)$. Khi đó, ta có

$$\|f - Q_k(f)\|_{\infty} \leq C \omega_{2r}(f, 2^{-k})_{\infty}. \quad (7)$$

Do đó:

$$\|f - Q_k(f)\|_{\infty} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Bất đẳng thức (7) được suy ra từ (2,29) - (2,31) trong (Dinh, 2011b) và bất đẳng thức (6).

Cho bất kỳ $f \in \mathcal{C}(\mathbb{I}^d)$, từ (8) suy ra f có thể biểu diễn thành chuỗi

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} q_k(f), \quad (9)$$

với

$$q_k(f) = \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) M_{k,s},$$

chuỗi này hội tụ theo chuẩn trong $L_{\infty}(\mathbb{I}^d)$, $c_{k,s}$ là các phiếm hàm hệ số của f , được xác định như sau. Đầu tiên xác định $c_{k,s}$ cho hàm số một biến:

với $k > 0, C_r(0, s) := \{0\}$. Trong trường hợp hàm nhiều biến, chúng ta xác định $c_{k,s}$ tương tự như (5), tức là

$$c_{k,s}(f) = c_{k_1,s_1} \left(\left(c_{k_2,s_2} \left(\dots c_{k_d,s_d}(f) \right) \right) \right),$$

với các hàm hệ số c_{k_i,s_i} áp dụng cho hàm số một biến khi xem f là hàm số với biến x_i với các biến còn lại cố định.

Cho $k \in \mathbb{Z}_+^d$, ký hiệu $\Sigma(k)$ là không gian sinh bởi các B-splines $M_{k,s} \in J(k)$. Nếu $0 < p \leq \infty$ thì $g \in \Sigma(k)$ được biểu diễn bởi

$$g = \sum_{s \in J(k)} a_s M_{k,s}$$

và đẳng thức sau (Dinh, 2011b)

$$\|g\|_p \asymp 2^{-|k|_1/p} \|\{a_s\}\|_{p,k}, \quad (10)$$

ở đây

$$\|\{a_s\}\|_{p,k} := \left(\sum_{s \in J(k)} |a_s|^p \right)^{1/p},$$

với vế phải thay bằng supremum khi $p = \infty$.

Chúng ta cần bất đẳng thức về chuẩn trong $L_p(D)$ như sau: Nếu τ là số thỏa mãn $0 < \tau \leq \min(p, 1)$ thì với dãy hàm bất kỳ $\{f_k\} \subset L_p(D)$ ta có bất đẳng thức

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} f_k \right\|_{p,D}^\tau \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \|f_k\|_{p,D}^\tau. \quad (11)$$

Định lý sau đây được chứng minh trong (Dinh, 2016).

Định lý 1. Cho $0 < p, \theta \leq \infty$ và $a \in \mathbb{R}_+^d$. Khi đó ta có

(i) Nếu $1/p < \alpha < 2r$ thì một hàm số $f \in B_{p,\theta}^a$ có thể biểu diễn thành chuỗi (9) và

$$B_2(f) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \{2^{(a,k)} \|q_k(f)\|_p\}^\theta \right)^{1/\theta} \ll \|f\|_{B_{p,\theta}^a}. \quad (12)$$

(ii) Nếu $0 < \alpha < \min(2r, 2r - 1 + 1/p)$ và g là một hàm số được biểu diễn bởi

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} g_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s} M_{k,s}$$

sao cho

$$B_4(g) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d} \{2^{(a,k)} \|g_k\|_p\}^\theta \right)^{1/\theta} < \infty,$$

thì $g \in B_{p,\theta}^a$ và

$$\|g\|_{B_{p,\theta}^a} \ll B_4(g).$$

(iii) Nếu $1/p < \alpha < \min(2r, 2r - 1 + 1/p)$ thì một hàm số f xác định trên $\mathbb{I}^d$ thuộc $B_{p,\theta}^a$ khi và chỉ khi f có thể biểu diễn thành chuỗi có dạng (9) thỏa mãn điều kiện (12). Hơn nữa, chuẩn $\|f\|_{B_{p,\theta}^a}$ là tương đương với chuẩn $B_2(f)$.

Từ định lý 1, một hàm số thuộc không gian Besov $B_{p,\theta}^a$ được biểu diễn thành chuỗi các B-spline và chuẩn Besov tương đương với chuẩn $B_2(f)$, việc biểu diễn này là công cụ để chứng minh định lý 2 được trình bày ở phần tiếp theo.

3. KHÔI PHỤC VÀ XẤP XỈ HÀM SỐ BẰNG PHƯƠNG PHÁP TUYẾN TÍNH

Phương pháp về bất đẳng thức đã được sử dụng, ta chứng minh được kết quả sau đây: Cho $a, b \geq 0, 0 < q < \infty$, ta có

$$(a + b)^q \asymp a^q + b^q.$$

Khi đó $L_q(\mathbb{I}^d)$ là một không gian với “giả chuẩn” tích phân $\|\cdot\|_q$ thông thường cho trường hợp $0 < q < \infty$ và không gian $C(\mathbb{I}^d)$ các hàm liên tục với chuẩn $\max\|\cdot\|_\infty$ cho $q = \infty$ theo nghĩa: $\forall f, g \in L_q(\mathbb{I}^d)$ ta có

$$\|f + g\|_q \leq C(\|f\|_q + \|g\|_q),$$

với hằng số $C = C(p) > 0$.

Chúng ta xét bài toán khôi phục xấp xỉ hàm số xác định trên $\mathbb{I}^d = [0, 1]^d$. Hàm số cần khôi phục thuộc tập hợp $W \subset L_q(\mathbb{I}^d), 0 < q \leq \infty$.

Định nghĩa 3. Cho $X_n = \{x^j\}_{j=1}^n$ là n điểm của $\mathbb{I}^d$, $\Phi_n = \{\varphi_j\}_{j=1}^n$ là họ n hàm số thuộc không gian $L_q(\mathbb{I}^d)$. Để khôi phục hàm số f được xác định trên $\mathbb{I}^d$ từ các giá trị lấy mẫu $f(x^1), \dots, f(x^n)$, chúng ta định nghĩa phương pháp tuyến tính dựa trên giá trị lấy mẫu $L_n(X_n, \Phi_n, \cdot)$ bởi công thức sau đây

$$L_n(X_n, \Phi_n, f) := \sum_{j=1}^n f(x^j) \varphi_j. \quad (13)$$

Cho $W \subset L_q(\mathbb{I}^d)$. Chúng ta nghiên cứu tính tối ưu của phương pháp tuyến tính có dạng (13) để khôi

phục hàm số $f \in W$ từ n giá trị lấy mẫu bằng đại lượng sau

$$\varrho_n(W, L_q(\mathbb{I}^d)) := \inf_{X_n, \Phi_n} \sup_{f \in W} \|f - L_n(X_n, \Phi_n, f)\|_q.$$

Định nghĩa 3 có thể xem trong Nguyen và Mai, 2018.

Cho số nguyên không âm m , đặt $K(\xi) := \{(k, s) : k \in \Delta_\xi, s \in I^d(k)\}$, ở đây $I^d(k) = \{s \in \mathbb{Z}_+^d : 0 \leq s_i \leq 2^{k_i}\}$ và ký hiệu $M(\xi)$ là tập hợp gồm các B -splines $M_{k,s}, k \in \Delta_\xi, s \in J(k)$. Tập hợp $G(\xi) := \{2^{-k}s : (k, s) \in K(\xi)\}$ các điểm thuộc $\mathbb{I}^d$ được gọi là lưới Smolyak (Nikol'skii, 1975).

Chúng ta định nghĩa toán tử R_Δ của các hàm số $f \in B_{p,\theta}^a$ bởi

$$R_\Delta(f) := \sum_{k \in \Delta_\xi} q_k(f) = \sum_{k \in \Delta_\xi} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) M_{k,s}.$$

Bổ đề sau đây được suy ra từ Bổ đề 3.1 trong Dinh (2016).

Bổ đề 2. Toán tử R_Δ xác định một phương pháp tuyến tính có dạng (13) trên lưới $G(\xi)$. Cụ thể,

$$R_\Delta(f) = L_n(X_n, \Phi_n, f) = \sum_{(k,s) \in K(\xi)} f(2^{-k}s) \psi_{k,s}$$

$$\text{ở đây } X_n := G(\xi), \Phi_n := \{\psi_{k,s}\}_{(k,s) \in K(\xi)},$$

$$n := |G(\xi)| = \sum_{k \in \Delta_\xi} 2^{|k|_1} \asymp 2^{\xi/\alpha} \tau^s$$

và $\psi_{k,s}$ được xác định là tổ hợp tuyến tính của không quá NB -splines $M_{k,s} \in M(\xi)$ với N độc lập với k, j, ξ và f .

Để chứng minh kết quả chính của bài báo, ta cần thêm bổ đề sau.

Bổ đề 3. Cho ξ là một số tự nhiên, ký hiệu $\Delta_\xi := \{k \in \mathbb{Z}_+^d : (a, k) \leq \xi\}$. Khi đó tồn tại các hằng số dương C_1 và C_2 sao cho

$$C_2 2^{\xi/r} \xi^s \leq \sum_{k \in \Delta_\xi} 2^{|k|_1} \leq C_1 2^{\xi/r} \xi^s. \quad (14)$$

Việc chứng minh Bổ đề 3 được thể hiện trong nghiên cứu của Nguyen (2021) và Dinh (2000). Định lý sau đây là kết quả chính và mới của bài báo, ở đó chúng ta xây dựng được phương pháp tuyến tính $R_\Delta(f)$ việc đánh giá tiệm cận tốc độ hội tụ của

phương pháp được thực hiện để khôi phục hàm số thuộc không gian Besov $B_{p,\theta}^a, a \in \mathbb{R}_+^d$.

Định lý 2. Cho $0 < p, q, \theta \leq \infty, p \geq q$. Giả sử với mỗi $n \in \mathbb{Z}_+, \xi$ là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn

$$|G(\xi)| \leq n. \quad (15)$$

Khi đó R_Δ xác định phương pháp tuyến tính lấy mẫu tối ưu cho $\varrho_n := \varrho_n(U_{p,\theta}^a, L_q)$ như sau

$$R_\Delta(f) = L_n(X_n^*, \Phi_n^*, f) = \sum_{(k,s) \in K(\xi)} f(2^{-k}s) \psi_{k,s} \quad (16)$$

trong đó $X_n^* := G(\xi) = \{2^{-k}s : (k, s) \in K(\xi)\}, \Phi_n^* := \{\psi_{k,s}\}_{(k,s) \in K(\xi)}$ và ta có

$$\sup_{f \in U_{p,\theta}^a} \|f - R_\Delta(f)\|_q \asymp \varrho_n \asymp n^{-\alpha} \log_2^{\alpha} n. \quad (17)$$

Chứng minh.

Đánh giá cận trên. Theo Bổ đề 3 và do ξ là số tự nhiên lớn nhất thỏa mãn (15) nên ta có

$$|G(\xi)| \asymp 2^{\xi/\alpha} \xi^s \asymp n. \quad (18)$$

Từ đó suy ra tồn tại các hằng số dương C_1, C_2 sao cho: $C_1 n \leq 2^{\xi/\alpha} \xi^s \leq C_2 n$.

Ta có

$$\log_2 C_1 + \log_2 n \leq \frac{\xi}{\alpha} + s \log_2 \xi \leq \log_2 C_2 + \log_2 n.$$

Do đó

$$\frac{\log_2 C_1}{\xi} + \frac{\log_2 n}{\xi} \leq \frac{1}{\alpha} + s \frac{\log_2 \xi}{\xi} \leq \frac{\log_2 C_2}{\xi} + \frac{\log_2 n}{\xi},$$

cho $n \rightarrow \infty$ thì $\xi \rightarrow \infty$, ta được $\xi \asymp \log_2 n$ và do đó

$$2^{-\xi} \asymp n^{-\alpha} \log_2^{\alpha} n. \quad (19)$$

Xét $p \geq q$. Xuất phát từ bất đẳng thức $\|f\|_q \leq \|f\|_p$ dẫn đến chứng minh cho trường hợp này với $q = p$. Do $B_{p,\theta}^a \subset B_{p,\infty}^a$, chúng ta chỉ cần chứng minh cận trên của (17) cho $\theta = \infty$. Chúng ta lấy tùy ý $\xi \in \mathbb{Z}_+$,

$$\sup_{f \in U_{p,\infty}^a} \|f - R_\Delta(f)\|_p \ll 2^{-\xi} \quad (20)$$

Lấy bất kỳ $f \in U_{p,\infty}^a$. Đặt $\tau = \min(p, 1)$, định lý 1 và (11) được sử dụng, chúng ta nhận được

$$\begin{aligned} \|f - R_{\Delta}(f)\|_p^{\tau} &\ll \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_{\xi}} \|q_k(f)\|_p^{\tau} \\ &\ll \|f\|_{B_{p,\infty}^{\tau}}^{\tau} \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_{\xi}} 2^{-\tau(a,k)} \\ &\ll \sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_{\xi}} 2^{-\tau(a,k)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Tiếp tục đánh giá (21), ký hiệu $\sum_{k \in \mathbb{Z}_+^d \setminus \Delta_{\xi}} 2^{-\tau(a,k)} := \sum(\xi)$. Ta có

$$\sum(\xi) = \int_{W(\xi)} 2^{-\tau(a,k)} dx,$$

với $W(\xi) = \{x \in \mathbb{R}_+^d : \tau(a, x) > \tau\xi\}$, đặt

$$V(\xi, s) = \{x \in W(\xi) : \tau\xi + s - 1 \leq \tau(a, x) < \tau\xi + s\}, s \in \mathbb{N}$$

và $|V(\xi, s)|$ là lực lượng của tập hợp $V(\xi, s)$. Vì vậy ta có

$$\sum(\xi) \approx 2^{-\tau\xi} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} |V(\xi, s)|.$$

Mặt khác $|V(\xi, s)| \ll s^d$ (xem chứng minh trong (Dinh, 2016)). Do đó

$$\varrho_n(U_{p,\theta}^a(\mathbb{I}^d), L_q(\mathbb{I}^d)) \geq \varrho_n(U_{p,\theta}^{a^*}(\mathbb{I}^{s+1}), L_q(\mathbb{I}^{s+1})) \quad (23)$$

Từ các bất đẳng thức (22), (23) ta được

$$\varrho_n(U_{p,\theta}^a(\mathbb{I}^d), L_q(\mathbb{I}^d)) \gg n^{-\alpha} \log_2^{\alpha} n.$$

Đánh giá cận dưới được hoàn thành. Từ các đánh giá cận trên, cận dưới ở trên, chúng ta có ước lượng tiệm cận tốc độ hội tụ của phương pháp tuyến tính là

$$\varrho_n \approx n^{-\alpha} \log_2^{\alpha} n.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO (REFERENCES)

- Chui, C. K. (1992). *An Introduction to Wavelets*. Academic Press, New York.
<https://doi.org/10.1063/1.4823126>
- DeVore, R.A., & Lorentz, G.G. (1993). *Constructive approximation*. Springer, Berlin.
<https://doi.org/10.1007/978-3-662-02888-9>
- Dinh, D. (2000). Continuous algorithms in n -term approximation and nonlinear widths. *J. Approx. Theory*, 102, 217-242.
<https://doi.org/10.1006/jath.1999.3399>
- Dinh, D. (2001). Non-linear approximations using sets of finite cardinality or finite pseudo-

$$\sum(\xi) \ll 2^{-\tau\xi} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{-s} s^d \approx 2^{-\tau\xi}.$$

Từ bất đẳng thức cuối cùng và (21) ta nhận được (20). Từ (18) và $R_{\Delta}(f)$ được xác định bởi (16), nhận thấy rằng số giá trị lấy mẫu trong $R_{\Delta}(f)$ là $|G(\xi)| \approx n$. Ngoài ra kết hợp với (19), chúng ta có

$$\sup_{f \in U} \|f - R_{\Delta}(f)\|_q \ll n^{-\alpha} \log_2^{\alpha} n$$

Đánh giá cận dưới. Ký hiệu $U_{p,\theta}^{a^*}(\mathbb{I}^{s+1})$ là hình cầu đơn vị trong không gian Besov

$B_{p,\theta}^{a^*}(\mathbb{I}^{s+1})$, $B_{p,\theta}^{a^*}(\mathbb{I}^{s+1}) \subset L_q(\mathbb{I}^{s+1})$, trong đó $a^* := (a_1, a_2, \dots, a_{s+1}) = (\alpha, \alpha, \dots, \alpha) \in \mathbb{R}_+^{s+1}$. Trong (Dinh, 2011a) tác giả đã chứng minh được rằng với các điều kiện có trong định lý thì

$$\varrho_n(U_{p,\theta}^{a^*}(\mathbb{I}^{s+1}), L_q(\mathbb{I}^{s+1})) \approx n^{-\alpha} \log_2^{\alpha} n.$$

Chúng ta suy ra

$$\varrho_n(U_{p,\theta}^{a^*}(\mathbb{I}^{s+1}), L_q(\mathbb{I}^{s+1})) \gg n^{-\alpha} \log_2^{\alpha} n. \quad (22)$$

Chú ý rằng cho bất kỳ hàm số $f \in L_q(\mathbb{I}^{s+1})$, thì hàm số $g: \mathbb{I}^d \rightarrow \mathbb{R}$ được xác định bởi $g(x_1, x_2, \dots, x_d) = f(x_1, \dots, x_{s+1})$, thuộc không gian $L_q(\mathbb{I}^d)$. Ngoài ra, nếu $f \in U_{p,\theta}^{a^*}(\mathbb{I}^{s+1})$, thì $g \in U_{p,\theta}^a(\mathbb{I}^d)$. Do đó chúng ta có

4. KẾT LUẬN

Bài báo được thực hiện nhằm nghiên cứu khôi phục và xấp xỉ hàm số bằng phương pháp tuyến tính cho lớp hàm số thuộc không gian Besov $B_{p,\theta}^a$ với độ trơn hỗn hợp, việc xây dựng và đánh giá tiệm cận tốc độ hội tụ của phương pháp qua đại lượng đặc trưng cũng đã được tiến hành. Kết quả mới của bài báo là mở rộng và tổng quát kết quả của Dinh (2011a) và Dinh (2016) cho trường hợp $p \geq q$.

dimension. *J. Complexity.*, 17, 467-492.
<https://doi.org/10.1006/jcom.2001.0579>

Dinh, D. (2009). Non-linear sampling recovery based on quasi-interpolant wavelet representations. *Adv. in Comput. Math.*, 30, 375-401.
<https://doi.org/10.1007/s10444-008-9074-7>

Dinh, D. (2011a). B-spline quasi-interpolant representations and sampling recovery of functions with mixed smoothness. *J. Complex.*, 27, 541-567.
<https://doi.org/10.1016/j.jco.2011.02.004>

Dinh, D. (2011b). Optimal adaptive sampling recovery. *Adv. in Comput. Math.*, 34, 1-41.

- Dinh, D. (2016). Sampling and cubature on sparse grids based on a B-spline quasi-interpolation. *Found. Comp. Math.*, 16, 1193-1240. <https://doi.org/10.1007/s10208-015-9274-8>
- Nguyen, C. M., & Mai, T. X. (2018). Quasi-interpolation representation and sampling recovery of multivariate functions. *Acta Math. Vietnamica*, 43, 373-389.
- Nguyen, C. M. (2019). Nonlinear approximations of functions having mixed smoothness. *Journal of Computer Science and Cybernetics*, 35, 119-134. <https://doi.org/10.15625/1813-9663/35/2/13578>
- Nguyen, C. M. (2021). Adaptive sampling recovery and nonlinear approximations of multivariate functions in Besov-type spaces. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, 45, 461-482.
- Nikol'skii, S. (1975). *Approximation of Functions of Several Variables and Embedding Theorems*. SpringerVerlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/978-3-642-65711-5>
- Temlyakov, V. (1993). *Approximation of periodic functions*. Nova Science Publishers, Inc., New York.
- Temlyakov, V. (1985). Approximation recovery of periodic functions of several variables. *Mat. Sb.*, 128, 256-268.