



DOI:10.22144/ctujos.2025.141

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO CÁC DẠNG NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR

Lâm Quốc Anh¹, Võ Thị Mộng Thúy^{2*} và Đặng Thị Mỹ Vân³

¹Trường Sư phạm, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

²Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô, Việt Nam

³Khoa Kinh tế Quản trị, Trường Cao đẳng Cần Thơ, Việt Nam

*Tác giả liên hệ (Corresponding author): vtmthuy@tdtu.edu.vn

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 25/03/2025

Sửa bài (Revised): 21/04/2025

Duyệt đăng (Accepted): 23/08/2025

Title: Optimality conditions for different types of efficient solutions of the vector optimization problem

Author: Lam Quoc Anh¹, Vo Thi Mong Thuy^{2*} and Dang Thi My Van³

Affiliation(s): ¹School of Education, Can Tho University, Viet Nam; ²Basic Studies Faculty, Tay Do University, Viet Nam; ³Faculty of Economics and Management, Can Tho College, Viet Nam

TÓM TẮT

Trong bài báo, việc thiết lập các điều kiện tối ưu cho các dạng nghiệm hữu hiệu liên quan đến tập hợp bất kỳ và nón lùi xa của nó cho bài toán tối ưu vector đã được thực hiện. Đầu tiên, các định lý tách cho tập lồi, các khái niệm về tập cải tiến và nón lùi xa của một tập bất kỳ được nhắc lại, đồng thời một số tính chất mới của chúng cũng được khảo sát. Sau đó, mô hình bài toán tối ưu vector cùng với nghiệm hữu hiệu Pareto tương ứng với tập hợp bất kỳ và nghiệm hữu hiệu Benson tương ứng với nón lùi xa của bài toán tối ưu vector được xem xét. Cuối cùng, bằng cách sử dụng phương pháp vô hướng hóa tuyến tính, các điều kiện cần và đủ tối ưu cho các nghiệm hữu hiệu này được thiết lập.

Từ khóa: Bài toán tối ưu vector, nghiệm hữu hiệu, nghiệm hữu hiệu Benson, điều kiện tối ưu, tập cải tiến, nón lùi xa, phương pháp vô hướng hóa

ABSTRACT

In the paper, optimality conditions are established for various types of efficient solutions associated with an arbitrary set and its recession cone in the vector optimization problem. First, the separation theorems for convex sets, the concepts of improvement sets, and the recession cone of an arbitrary set are recalled, and some of their new properties are also investigated. Then, the model of the vector optimization problem is examined, along with its Pareto efficient solutions corresponding to an arbitrary set and Benson efficient solutions corresponding to the recession cone. Finally, by employing the linear scalarization method, necessary and sufficient optimality conditions for these efficient solutions are derived.

Keywords: Vector optimization problem, efficient solution, Benson efficient solution, optimality condition, improvement set, recession cone, scalarization method

1. GIỚI THIỆU

Tối ưu hóa là một lĩnh vực quan trọng trong toán học, có ứng dụng rộng trong nhiều ngành khoa học khác nhau như vật lý, sinh học, kinh tế, y học, kỹ thuật và các lĩnh vực khoa học khác. Trong những năm qua, tối ưu hóa đã góp phần quan trọng vào sự phát triển của các ngành này, trở thành một lĩnh vực năng động và không ngừng tiến bộ. Các công trình đáng chú ý như Fan (1972), Luc (1989), Muu & Oettli (1992), Mordukhovich (2006), Khan et al. (2015),... là những minh chứng cụ thể cho sự phát triển của lý thuyết tối ưu như đã đề cập ở trên.

Về cơ bản, các bài toán tối ưu hóa được xác định thông qua việc tìm cực trị của hàm mục tiêu trên một tập hợp không rỗng. Khi hàm mục tiêu là một hàm vector, bài toán được gọi là "tối ưu vector" (Luc, 1989; Ehrgott, 2005). Các chủ đề nghiên cứu chính trong tối ưu vector bao gồm sự tồn tại nghiệm (Maeda, 2012; Gutiérrez et al., 2014; Kim et al., 2021; Anh et al., 2023), tính ổn định nghiệm (Tanino, 1988; Lucchetti & Miglierina, 2004; Eichfelder & Jahn, 2011; Peng et al., 2018; Kapoor & Lalitha, 2022; Han & Zhao, 2023; Peng et al., 2024; Anh et al., 2025), các tính chất nghiệm (Hirschberger, 2005; Maggioni & Wallace, 2012; Anh et al., 2021; Anh et al., 2022; Han, 2023), điều kiện tối ưu và thuật toán (Dempe et al., 2007; Andreani et al., 2011; Wei et al., 2018; Ustun et al., 2021; Zhou & Kuang, 2023; Wang et al., 2024; Anh et al., 2025; Zhou et al., 2025). Đặc biệt, điều kiện tối ưu là một trong những chủ đề được quan tâm nhiều nhờ tính ứng dụng rộng rãi trong toán học, kinh tế và kỹ thuật.

Tối ưu vector có rất nhiều dạng nghiệm khác nhau, tùy thuộc vào các yêu cầu cần đạt trong việc giải quyết các tình huống thực tế như nghiệm Edgeworth (Edgeworth, 1881), nghiệm Pareto (Pareto, 1906), nghiệm Geoffrion (Geoffrion, 1968), nghiệm Borwein (Borwein, 1977), nghiệm Benson (Benson, 1979), nghiệm Henig (Henig, 1982) và nhiều dạng nghiệm khác. Cấu trúc của nón thứ tự đóng vai trò quan trọng trong việc xác định các dạng nghiệm hữu hiệu đã được đề cập trước đó. Vì vậy, việc nghiên cứu các mô hình tối ưu thông qua điều chỉnh và mở rộng cấu trúc nón đã trở thành một chủ đề thu hút sự quan tâm của nhiều nhà toán học trong thời gian gần đây. Theo hướng tiếp cận này, nón thứ tự được thay thế bởi tập cải tiến và nón lùi xa của một tập bất kỳ trong các bài toán tối ưu. Zhou et al. (2019) đã sử dụng tập cải tiến, các hàm vô hướng phi tuyến để khảo sát điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu tập có ràng buộc dưới một số giả thiết

thích hợp về tính lồi tổng quát của ánh xạ đa trị. Trong Peng et al. (2023), các tác giả đã khảo sát tính tối ưu và tính đóng của tập nghiệm trong bài toán tối ưu tập dựa trên quan hệ thứ tự tập. Thứ tự tập mà các tác giả sử dụng để thiết lập kết quả phụ thuộc vào tập cải tiến, chứ không phải là thứ tự theo nón. Hơn nữa, bằng cách sử dụng các tập mức trên, sự hội tụ Painlevé-Kuratowski của nghiệm hữu hiệu yếu tương ứng với tập cải tiến của bài toán tối ưu tập có tập ràng buộc bị nhiễu bởi tham số được thiết lập dưới các điều kiện liên thông và nửa liên tục của ánh xạ mục tiêu. Về bài toán tối ưu thông qua nón lùi xa với các công trình tiêu biểu như: Peng et al. (2024) đã nghiên cứu tính ổn định của bài toán tối ưu tập thông qua tập thứ tự tổng quát. Các điều kiện đủ của sự hội tụ trên Painlevé-Kuratowski của các tập nghiệm xấp xỉ, sự hội tụ Painlevé-Kuratowski của các tập nghiệm xấp xỉ yếu của bài toán được thiết lập bằng cách sử dụng các tính chất của nón lùi xa và tập mức. Gần đây, Zhou et al. (2025) cũng đã sử dụng tập cải tiến và nón lùi xa để giới thiệu khái niệm nghiệm hữu hiệu Benson của các bài toán cân bằng đa trị và thiết lập các điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Benson của các bài toán đó bằng phương pháp vô hướng hóa tuyến tính và phi tuyến.

Dựa trên ý tưởng từ các nghiên cứu trước, bài báo này được thực hiện tập trung vào việc xem xét các điều kiện tối ưu cho các dạng nghiệm hữu hiệu Pareto và nghiệm hữu hiệu Benson cho bài toán tối ưu vector dựa trên các cấu trúc trội và nón lùi xa của một tập bất kỳ.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho X, Y là các không gian định chuẩn, X là tập con khác rỗng của X , E là tập con khác rỗng của Y . Ta ký hiệu phần trong và bao đóng của E lần lượt là $\text{int}E$ and $\text{cl}E$. Tập E được gọi là đặc (rắn) nếu $\text{int}E \neq \emptyset$. Gọi Y^* là không gian đối ngẫu của Y và C là nón lồi đóng có đỉnh trong Y với phần trong khác rỗng ($\text{int}C \neq \emptyset$). Khi đó, theo Bổ đề 3.21 trong Jahn (2011), ta được

$$\text{int}C = \{y \in Y: \psi(y) > 0, \forall \psi \in C^* \setminus \{0_{Y^*}\}\}. \quad (2.1)$$

Tập đối ngẫu và tập đối ngẫu chặt của E ký hiệu tương ứng là E^* và $E^\#$ được định nghĩa như sau:

$$E^* := \{\psi \in Y^*: \psi(y) \geq 0, \forall y \in E\},$$

và

$$E^\# := \{\psi \in Y^*: \psi(y) > 0, \forall y \in E \setminus \{0_Y\}\}.$$

Từ những định nghĩa trên, ta suy ra rằng

$$(-E)^* = -(E)^*.$$

Bổ đề 2.1. (Zhou & Kuang, 2023, Bổ đề 2.2) Nếu $E \subset \mathbb{Y}$ là một tập lồi với phần trong khác rỗng thì

$$E^* = (\text{int}E)^*.$$

Bổ đề 2.2. (Jahn, 2011, Định lý 3.16) Nếu D_1, D_2 là những tập con lồi khác rỗng trong $\mathbb{Y}$ với $\text{int}D_1 \neq \emptyset$ thì $\text{int}D_1 \cap D_2 = \emptyset$ khi và chỉ khi có một hàm tuyến tính $\psi \in \mathbb{Y}^* \setminus \{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ và số thực μ thỏa

$$\psi(d_1) \leq \mu \leq \psi(d_2), \forall d_1 \in D_1, \forall d_2 \in D_2,$$

và

$$\psi(d_1) < \mu, \forall d_1 \in \text{int}D_1.$$

Bổ đề 2.3. (Borwein, 1977, Proposition 3) Nếu S_1, S_2 là những nón lồi đóng trong $\mathbb{Y}$ sao cho $S_1 \cap (-S_2) = \{0_{\mathbb{Y}}\}$, S_2 có đỉnh và có cơ sở compact thì $S_2^\# \cap S_1^* \neq \emptyset$.

Bổ đề 2.4. (Anh et al., 2023, Bổ đề 2.9) Nếu $E \cap \text{int}C = \emptyset$ thì

$$\text{cl}E \cap \text{int}C = \emptyset.$$

Định nghĩa 2.1. (Luc, 1989, Định nghĩa 1.5) Cho B là tập con khác rỗng của $\mathbb{Y}$. Ta nói rằng

(a) B sinh ra nón C , ký hiệu $C = \text{cone}(B)$, nếu $C = \text{cone}(B) = \{tb : t \geq 0, b \in B\}$;

(b) B là một cơ sở của C nếu B không chứa phần tử $0_{\mathbb{Y}}$ và với mỗi $c \in C, c \neq 0_{\mathbb{Y}}$, có duy nhất $b \in B, t > 0$ sao cho $c = tb$.

Nếu B là một cơ sở của C thì $\text{cone}(B) = C$.

Định nghĩa 2.2. (Gutiérrez et al., 2012) Cho $\emptyset \neq E \subset \mathbb{Y}$. Khi đó, tập hợp E được gọi là

(a) Tập free disposal ứng với nón C nếu

$$E + C = E;$$

(b) Tập cải tiến ứng với nón C nếu $0_{\mathbb{Y}} \notin E$ và $E + C = E$. Họ các tập cải tiến ứng với nón C được ký hiệu là $\mathbf{I}_C$;

(c) Tập co-radiant nếu với mọi $y \in E$ và $\lambda \geq 1$ thì $\lambda y \in E$.

Định nghĩa 2.3. (Gutiérrez et al., 2012) Nón lồi xa của tập E được định nghĩa là

$$E_\infty := \{u \in \mathbb{Y} : e + \alpha u \in E, \forall e \in E, \forall \alpha > 0\}.$$

Ta khảo sát một số tính chất quan trọng của tập cải tiến và nón lồi xa được dùng trong việc chứng minh kết quả chính của bài báo.

Bổ đề 2.5. Ta có các tính chất sau đây:

$$(a) -E_\infty = (-E)_\infty;$$

(b) E là tập free disposal ứng với E_∞ . Hơn nữa, nếu $0_{\mathbb{Y}} \notin E$ thì E là tập cải tiến ứng với E_∞ ;

$$(c) \text{ Nếu } E \text{ lồi và } E_\infty \text{ đặc thì } \text{int}E = E + \text{int}E_\infty;$$

$$(d) \text{ Nếu } E \text{ là tập co-radiant thì } E \subseteq E_\infty;$$

(e) Nếu tồn tại một nón K trong $\mathbb{Y}$ sao cho $E \in \mathbf{I}_K$ thì $K \subseteq \Omega_\infty$;

(f) E_∞ là nón lồi. Hơn nữa, nếu E đóng thì E_∞ là nón đóng;

(g) Nếu tồn tại một nón đóng có đỉnh K trong $\mathbb{Y}$ sao cho $E \subseteq K$ thì E_∞ là nón có đỉnh.

$$(h) E \in \mathbf{I}_{\text{cone}(E)} \text{ nếu và chỉ nếu } E \subseteq E_\infty \setminus \{0_{\mathbb{Y}}\}.$$

Chứng minh. (a) Ta có

$$(-E)_\infty := \{u \in \mathbb{Y} : e + \alpha u \in (-E), \forall e \in -E, \forall \alpha > 0\}.$$

($\subseteq$) Lấy $u \in -E_\infty$ tùy ý, ta có $-u \in E_\infty$, điều này kéo theo

$$e + \alpha(-u) \in E, \forall e \in E, \forall \alpha > 0.$$

Do đó,

$$-e + \alpha u \in -E, \forall (-e) \in -E, \forall \alpha > 0.$$

Cho $\hat{e} := -e$, ta được

$$\hat{e} + \alpha u \in -E, \forall \hat{e} \in -E, \forall \alpha > 0,$$

nên $u \in (-E)_\infty$.

($\supseteq$) Với phần tử tùy ý $u \in (-E)_\infty$, ta có

$$e + \alpha u \in -E, \forall e \in -E, \forall \alpha > 0,$$

kéo theo

$$-e + \alpha(-u) \in E, \forall (-e) \in E, \forall \alpha > 0.$$

Lấy $\bar{e} := -e$, ta được

$$\bar{e} + \alpha(-u) \in E, \forall \bar{e} \in E, \forall \alpha > 0,$$

điều đó dẫn đến $-u \in E_\infty$, cho nên $u \in -E_\infty$.

(b) Vì $0_{\mathbb{Y}} \in E_\infty$ nên $E \subset E + E_\infty$. Lấy bất kỳ $y \in E + E_\infty$, khi đó, ta có thể tìm được $e_1 \in E$ và $e_2 \in E_\infty$ sao cho

$$y = e_1 + e_2.$$

Do $e_2 \in E_\infty$, ta được

$$w + \alpha e_2 \in E, \quad \forall w \in E, \forall \alpha > 0.$$

Chọn $w = e_1, \alpha = 1$, khi đó ta có

$$y = e_1 + e_2 \in E.$$

Do đó, $E + E_\infty = E$, nên E là tập free disposal. Điều này kết hợp với $0_{\mathbb{Y}} \notin E$ cho ta kết luận E là tập cải tiến ứng với E_∞ .

(c) Từ (b) ta có $E + E_\infty = E$. Từ đẳng thức (2.7) trong Tanaka và Kuroiwa (1993) cho ta

$$\text{int}E_\infty + E = \text{int}(E_\infty + E) = \text{int}E.$$

(d) Lấy tùy ý phần tử $y \in E$, vì E là tập co-radiant nên ta có $(1 + \lambda)y \in E$ với mọi $\lambda > 0$. Điều đó tương đương với

$$y + \lambda y \in E, \quad \forall y \in E, \forall \lambda > 0,$$

kéo theo $y \in E_\infty$.

(e) Với phần tử bất kỳ $k \in K$ thì với mọi $\lambda > 0$, ta có $\lambda k \in K$ vì K là nón. Do $E \in \mathbf{I}_K$, với mọi $b \in E$, ta có

$$b + \lambda k \in E + K = E.$$

Nên ta thu được $k \in E_\infty$, và vì vậy $K \subseteq E_\infty$.

(f) Trước tiên, với bất kỳ $d \in E_\infty$, ta có

$$e + \alpha d \in E, \quad \forall e \in E, \forall \alpha > 0.$$

Cho $\lambda \geq 0$ tùy ý, ta được

$$e + \alpha(\lambda d) = e + (\alpha\lambda)d \in E, \quad \forall e \in E, \forall \alpha > 0,$$

suy ra $\alpha d \in E_\infty$ và do đó E_∞ là nón.

Tiếp theo, cho $d_1, d_2 \in E_\infty$ tùy ý và $0 \leq t \leq 1$, ta có

$$e + \alpha d_1 \in E \text{ và } e + \alpha d_2 \in E,$$

với mọi $e \in E$ và $\alpha > 0$, từ đó dẫn đến

$$e + \alpha t d_1 \in E \text{ và } e + \alpha(1 - t)d_2 \in E,$$

với mọi $e \in E$ và $\alpha > 0$.

Do đó,

$$\begin{aligned} & e + \alpha(td_1 + (1 - t)d_2) \\ &= (e + \alpha t d_1) + \alpha(1 - t)d_2 \in E, \\ &= \hat{e} + \alpha(1 - t)d_2 \in E, \end{aligned}$$

với mọi $e \in E$ và $\alpha > 0$. Suy ra

$$td_1 + (1 - t)d_2 \in E_\infty.$$

Vì vậy, E_∞ là nón lồi.

Bây giờ, ta chứng minh rằng E_∞ đóng, giả sử $\{d_n\} \subset E_\infty$ sao cho $\{d_n\} \rightarrow d_0$. Vì $d_n \in E_\infty$ nên với mọi $e \in E$ và $\alpha > 0$, ta có $e + \alpha d_n \in E$ với mọi n . Do $e + \alpha d_n$ hội tụ về $e + \alpha d_0$ và E là tập đóng nên ta có $e + \alpha d_0 \in E$, kéo theo $d_0 \in E_\infty$. Từ đó ta được E_∞ là tập đóng.

(g) Cho $u \in E_\infty \cap (-E_\infty)$ tùy ý, theo Bổ đề 2.5 (a), ta có

$$u \in E_\infty \cap (-E)_\infty.$$

Từ đó, ta được $u \in E_\infty$ and $u \in (-E)_\infty$, suy ra

$$e_1 + \alpha u \in E, \quad \forall e_1 \in E, \forall \alpha > 0,$$

và

$$e_2 + \alpha u \in -E, \quad \forall e_2 \in -E, \forall \alpha > 0.$$

Do đó,

$$\begin{aligned} u &\in \left(\frac{1}{\alpha}E - \frac{1}{\alpha}e_1\right) \cap \left(-\frac{1}{\alpha}E - \frac{1}{\alpha}e_2\right) \\ &\subseteq \left(K - \frac{1}{\alpha}e_1\right) \cap \left(-K - \frac{1}{\alpha}e_2\right), \end{aligned}$$

với mọi $e_1 \in E, e_2 \in -E$ và $\alpha > 0$. Khi $\alpha \rightarrow \infty$, ta thu được $u \in \text{cl}K \cap (-\text{cl}K)$. Vì K là nón đóng và có đỉnh nên

$$u \in K \cap (-K) = \{0_{\mathbb{Y}}\}.$$

Từ đó ta được $u = 0_{\mathbb{Y}}$, và vì vậy E_∞ có đỉnh.

(h) Với $d \in E$ bất kỳ thì $d \neq 0_{\mathbb{Y}}$ khi E là tập cải tiến. Vì $E + \text{cone}(E) = E$ nên

$$e + \lambda d \in E,$$

với mọi $e \in E, \lambda > 0$. Do đó, $d \in E_\infty$, điều này kết hợp với $d \neq 0_{\mathbb{Y}}$ dẫn đến $d \in E_\infty \setminus \{0_{\mathbb{Y}}\}$. Vậy

$$E \subset E_\infty \setminus \{0_{\mathbb{Y}}\}.$$

Ngược lại, giả sử $E \subset E_\infty \setminus \{0_{\mathbb{Y}}\}$, ta có $E \subseteq E + \text{cone}(E)$ vì $0_{\mathbb{Y}} \in \text{cone}(E)$. Lấy $y \in E + \text{cone}(E)$ tùy ý, tồn tại $e_1 \in E, \lambda \geq 0$ và $e_2 \in E$ sao cho

$$y = e_1 + \lambda e_2.$$

+ Nếu $\lambda = 0$ thì $y = e_1 \in E$.

+ Nếu $\lambda > 0$ thì

$$e_2 \in E \subseteq E_\infty \setminus \{0_{\mathbb{Y}}\} \subset E_\infty,$$

điều này kéo theo $y = e_1 + \lambda e_2 \in E$.

Do đó, $E + \text{cone}(E) \subseteq E$. ■

Định nghĩa 2.4. Ánh xạ có giá trị vector $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ được gọi là *E-gắn dưới giống lồi* trên X nếu $\text{clcone}(f(X) + E)$ là tập lồi trong $\mathbb{Y}$.

3. ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO NGHIỆM HỮU HIỆU CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR

Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}, X, E$ được định nghĩa như trong Mục 2. Ta xét bài toán tối ưu vector như sau:

(VOP) $\min f(x)$ thỏa mãn $x \in X$,

trong đó $f: X \rightarrow \mathbb{Y}$ là ánh xạ có giá trị vector.

Do E là một tập cải tiến ứng với nón E_∞ , dựa vào Định nghĩa 4.1 trong Gutiérrez et al. (2012), ta có định nghĩa nghiệm hữu hiệu Pareto của bài toán (VOP) tương ứng với E như sau:

Định nghĩa 3.1. Phần tử $x_0 \in X$ được gọi là *nghiệm hữu hiệu Pareto* của (VOP) tương ứng với E , ký hiệu $x_0 \in \text{Eff}(\text{VOP})(f, E)$, nếu

$$(f(X) - f(x_0)) \cap (-E) = \emptyset,$$

trong đó $f(X) = \{f(x) : x \in X\}$.

Hơn nữa, lấy ý tưởng từ Định nghĩa 3.6 trong Zhao et al. (2014), ta xét định nghĩa nghiệm hữu hiệu Benson của bài toán (VOP) tương ứng với nón lồi xa E_∞ như sau:

Định nghĩa 3.2. Phần tử $x_0 \in X$ được gọi là *nghiệm hữu hiệu Benson* của (VOP) tương ứng với E_∞ , ký hiệu $x_0 \in \text{BEff}(\text{VOP})(f, E_\infty)$, nếu

$$\text{cl}(\text{cone}(f(X) - f(x_0) + E)) \cap (-E_\infty) = \{0_{\mathbb{Y}}\}.$$

Đầu tiên, ta xét các điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Pareto tương ứng với E của bài toán (VOP) qua các kết quả sau đây.

Định lý 3.1. Với $\psi \in E_\infty^* \setminus \{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ cho trước. Giả sử $x_0 \in X$ sao cho

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e), \forall x \in X, \forall e \in -E.$$

Khi đó, ta có

$$x_0 \in \text{Eff}(\text{VOP})(f, E).$$

Chứng minh. Vì

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e), \forall x \in X, \forall e \in -E,$$

và $\psi \in E_\infty^* \setminus \{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ nên

$$\psi(f(x) - f(x_0) - e) \geq 0, \forall x \in X, \forall e \in -E. \quad (3.1)$$

Giả sử $x_0 \notin \text{Eff}(\text{VOP})(f, E)$, tức là

$$(f(X) - f(x_0)) \cap (-E) \neq \emptyset.$$

Khi đó, tồn tại $\hat{x} \in X$ sao cho

$$f(\hat{x}) - f(x_0) \in -E = -E - E_\infty,$$

từ đó ta tìm được $\bar{e} \in -E$, $\hat{u} \in -E_\infty$ để

$$f(\hat{x}) - f(x_0) = \bar{e} + \hat{u}. \quad (3.2)$$

Vì $\hat{u} \in -E_\infty$ và $\psi \in E_\infty^* \setminus \{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ nên

$$\psi(\hat{u}) < 0,$$

do đó, từ (3.2) ta suy ra

$$\psi(f(\hat{x}) - f(x_0) - \bar{e}) = \psi(\hat{u}) < 0,$$

điều này mâu thuẫn với (3.1). Vì vậy,

$$x_0 \in \text{Eff}(\text{VOP})(f, E). \quad \blacksquare$$

Ta xét ví dụ sau đây minh họa cho Định lý 3.1.

Ví dụ 3.1. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$, $E = (2, 1) + \mathbb{R}_+^2$, $X = [-2, 0]$ và hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x) = (x, x^3 + 2x - 1).$$

Khi đó, $E_\infty = \mathbb{R}_+^2$. Với $x_0 = -1 \in [-2, 0]$, ta có

$$f(-1) = (-1, -4).$$

Cho $\psi = (1, 0) \in E_\infty^* \setminus \{0_{\mathbb{Y}^*}\}$, với mọi $x \in [-2, 0]$ và mọi $(e_1, e_2) \in (-2, -1) - \mathbb{R}_+^2$, ta được

$$\begin{aligned} (1, 0)(x, x^3 + 2x - 1) - (1, 0)(-1, -4) \\ = x + 1 \geq -1 > -2 \\ \geq (1, 0)(-e_1, -e_2) = -e_1. \end{aligned}$$

Tức là,

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e), \forall x \in X, \forall e \in -E.$$

Áp dụng Định lý 3.1, ta được

$$-1 \in \text{Eff}(\text{VOP})(f, E).$$

Định lý 3.2. Giả sử $\text{int}E \neq \emptyset$ và f là E -gắn dưới giống lồi trên X . Nếu $x_0 \in \text{Eff}(\text{VOP})(f, E)$ thì tồn tại $\psi \in E_\infty^* \setminus \{0_{\mathbb{Y}^*}\}$ sao cho x_0 thỏa mãn điều kiện:

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e), \forall x \in X, \forall e \in -E.$$

Chứng minh. Trước tiên, từ giả thiết

$$x_0 \in \text{Eff}(\text{VOP})(f, E),$$

ta có

$$(f(X) - f(x_0)) \cap (-E) = \emptyset.$$

Vì $\text{int}E \subseteq E$ nên ta cũng được

$$(f(X) - f(x_0)) \cap (-\text{int}E) = \emptyset.$$

Điều này kết hợp với Bổ đề 2.5 (c) cho ta kết luận

$$(f(X) - f(x_0) + E) \cap (-\text{int}E_\infty) = \emptyset. \quad (3.3)$$

Tiếp theo, ta chứng minh

$$\text{cone}(f(X) - f(x_0) + E) \cap (-\text{int}E_\infty) = \emptyset.$$

Giả sử ngược lại

$$\text{cone}(f(X) - f(x_0) + E) \cap (-\text{int}E_\infty) \neq \emptyset,$$

khi đó ta tìm được $u \in \text{cone}(f(X) - f(x_0) + E) \cap (-\text{int}E_\infty)$ sao cho

$$u = \lambda y \in -\text{int}E_\infty,$$

với $y \in f(X) - f(x_0) + E, \lambda \geq 0$. Hơn nữa, vì $0_Y \notin -\text{int}E_\infty$, ta suy ra $\lambda > 0$. Do đó,

$$y = \frac{1}{\lambda} u \in \frac{1}{\lambda} (-\text{int}E_\infty) \subseteq -\text{int}E_\infty.$$

Từ đó dẫn đến

$$y \in (f(X) - f(x_0) + E) \cap (-\text{int}E_\infty).$$

Điều này mâu thuẫn với (3.3).

Áp dụng Bổ đề 2.4 ta được

$$\text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E) \cap (-\text{int}E_\infty) = \emptyset.$$

Mặt khác, do f là E -gần dưới giống lồi trên X nên $\text{clcone}(f(X) + E)$ là tập lồi, kéo theo

$$\text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E)$$

cũng là một tập lồi. Hơn nữa, theo Bổ đề 2.5 (f), E_∞ là nón lồi kéo theo $(-\text{int}E_\infty)$ cũng là nón lồi. Áp dụng Bổ đề 2.2, tồn tại $\psi \in Y^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ thỏa mãn điều kiện:

$$\psi(y) \geq 0, \forall y \in \text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E), \quad (3.4)$$

và $\psi(u) \leq 0$ với mọi $u \in (-\text{int}E_\infty)$, điều này dẫn đến

$$\psi(u) \geq 0, \quad \forall u \in \text{int}E_\infty.$$

Điều này kết hợp với $\psi \in Y^* \setminus \{0_{Y^*}\}$ và (2.1) cho ta kết luận rằng

$$\psi \in E_\infty^* \setminus \{0_{Y^*}\}.$$

Cuối cùng, từ bất đẳng thức (3.4), ta được

$$\psi(f(x) - f(x_0) + \bar{e}) \geq 0, \forall x \in X, \forall \bar{e} \in E,$$

suy ra

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq -\psi(\bar{e}), \forall x \in X, \forall \bar{e} \in E.$$

Do đó,

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e), \forall x \in X, \forall e \in -E.$$

Định lý đã được chứng minh. ■

Ví dụ 3.2. Cho $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2, X = [-3, 1], E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > \frac{1}{4} - x\} \cap \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: y > \frac{1}{4}\}$ và hàm $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} (0, x) & \text{nếu } x \in [-3, 0], \\ (x, x) & \text{nếu } x \in]0, 1]. \end{cases}$$

Lấy $x_0 = 1 \in]0, 1]$ thì

$$f(1) = (1, 1).$$

Với mọi $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in E_\infty^* \setminus \{0_{Y^*}\}$, trong đó $\psi_1, \psi_2 \geq 0, \psi_1, \psi_2$ không đồng thời bằng 0, và mọi $(-e_1, -e_2) \in -E$ ta được

$$(\psi_1, \psi_2)(-e_1, -e_2) = -\psi_1 e_1 - \psi_2 e_2.$$

Cho $\hat{x} = 0 \in [-3, 0]$, ta được

$$f(0) = (0, 0),$$

khi đó với $(-\hat{e}_1, -\hat{e}_2) = (0, -\frac{1}{2}) \in -E$ ta có

$$\psi(f(0)) - \psi(f(1)) = -(\psi_1, \psi_2)(1, 1)$$

$$= -\psi_1 - \psi_2 < (\psi_1, \psi_2) \left(0, -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}\psi_2,$$

tức là

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e)$$

không thỏa mãn với mọi $x \in X$ và mọi $e \in -E$. Từ đó suy ra

$$1 \notin \text{Eff}(\text{VOP})(f, E).$$

Tiếp theo, các điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Benson của (VOP) tương ứng với E_∞ được thể hiện qua các định lý sau.

Định lý 3.3. Với $\psi \in E_\infty^\#$ cho trước. Giả sử $x_0 \in X$ sao cho

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e), \forall x \in X, \forall e \in -E.$$

Khi đó, ta có

$$x_0 \in \text{BEff}(\text{VOP})(f, E_\infty).$$

Chứng minh. Trước tiên, ta có

$$0_Y \in \text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E) \cap (-E_\infty).$$

Lấy phần từ bất kỳ

$$b \in \text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E) \cap (-E_\infty),$$

ta chứng minh rằng $b = 0_Y$. Do E là tập cải tiến ứng với nón E_∞ nên ta được

$$b \in \text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E + E_\infty) \cap (-E_\infty).$$

Vì $b \in \text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E + E_\infty)$ nên tồn tại $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}_+, \{x_n\} \subset X, \{e_n\} \subset E$ và $\{u_n\} \subset E_\infty$ sao cho

$$\alpha_n(f(x_n) - f(x_0) + e_n + u_n) \rightarrow b.$$

Từ giả thiết $\psi \in E_\infty^\#$, ta được

$$\alpha_n(\psi(f(x_n)) - \psi(f(x_0)) + \psi(e_n) + \psi(u_n)) \rightarrow \psi(b). \quad (3.5)$$

Tiếp theo, vì

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e), \forall x \in X, \forall e \in -E.$$

nên ta được

$$\psi(f(x_n)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(-e_n).$$

Do tính tuyến tính và liên tục của ψ , ta suy ra

$$\psi(f(x_n)) - \psi(f(x_0)) + \psi(e_n) \geq 0. \quad (3.6)$$

Hơn nữa, từ $\psi \in E_\infty^\#$ và $u_n \in E_\infty$ cho ta

$$\psi(u_n) \geq 0. \quad (3.7)$$

Kết hợp (3.5), (3.6) và (3.7), ta được

$$\psi(b) \geq 0. \quad (3.8)$$

Sau cùng, vì $\psi \in E_\infty^\#$ và $b \in -E_\infty$, ta có

$$\psi(b) \leq 0.$$

Điều này cùng với (3.8) cho ta

$$\psi(b) = 0,$$

nên ta suy ra $b = 0_\mathbb{Y}$ do $\psi \in E_\infty^\#$, do đó

$$\text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E) \cap (-E_\infty) = \{0_\mathbb{Y}\}.$$

Vậy $x_0 \in \text{BEff}(\text{VOP})(f, E_\infty)$. ■

Ta xét ví dụ sau đây minh họa cho việc vận dụng của Định lý 3.3.

Ví dụ 3.3. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$, $E = (2, 3) + \mathbb{R}_+^2$, $X = [-1, 1]$ và hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x) = (x, x^3 + 2x - 1).$$

Khi đó, $E_\infty = \mathbb{R}_+^2$. Với $x_0 = 0 \in [-1, 1]$, ta có

$$f(0) = (0, -1).$$

Lấy $\psi = (1, 1) \in E_\infty^\#$, với mọi $x \in [-1, 1]$ và mọi $(e_1, e_2) \in (-2, -3) - \mathbb{R}_+^2$, ta được

$$\begin{aligned} & (1, 1)(x, x^3 + 2x - 1) - (1, 1)(0, -1) \\ &= x^3 + 3x - 1 + 1 = x^3 + 3x \geq -4 \\ &> -5 \geq (1, 1)(-e_1, -e_2) = -e_1 - e_2, \end{aligned}$$

điều đó có nghĩa là

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e), \forall x \in X, \forall e \in -E.$$

Áp dụng Định lý 3.3, ta được

$$0 \in \text{BEff}(\text{VOP})(f, E_\infty).$$

Định lý 3.4. Cho E là tập đóng và K là nón đóng có đỉnh trong $\mathbb{Y}$ sao cho $E \subseteq K$. Giả sử E_∞ có cơ sở compact và f là E -gần dưới giống lồi trên X . Nếu $x_0 \in \text{BEff}(\text{VOP})(f, E_\infty)$ thì tồn tại $\psi \in E_\infty^\#$ sao cho x_0 thỏa mãn điều kiện:

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e), \forall x \in X, \forall e \in -E.$$

Chứng minh. Vì $x_0 \in \text{BEff}(\text{VOP})(f, E_\infty)$ nên

$$\text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E) \cap (-E_\infty) = \{0_\mathbb{Y}\}.$$

Từ giả thiết f là E -gần dưới giống lồi trên X , ta có tập

$$\text{clcone}(f(X) + E)$$

là lồi nên kéo theo tập

$$\text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E)$$

cũng lồi.

Mặt khác, do E là tập đóng và K là nón đóng có đỉnh trong $\mathbb{Y}$ sao cho $E \subseteq K$, từ Bổ đề 2.5 (f) và (g) ta được E_∞ là nón lồi, đóng, có đỉnh. Áp dụng Bổ đề 2.3 tồn tại $\hat{\psi} \in E_\infty^\#$ thỏa mãn

$$\hat{\psi} \in (\text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E))^*,$$

từ đó dẫn đến

$$\hat{\psi}(z) \geq 0, \forall z \in \text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E).$$

Vì $f(X) - f(x_0) + E$ là tập con của

$$\text{clcone}(f(X) - f(x_0) + E),$$

nên ta cũng có

$$\hat{\psi}(z) \geq 0, \forall z \in f(X) - f(x_0) + E.$$

Do đó,

$$\hat{\psi}(f(x) - f(x_0) + \bar{e}) \geq 0, \forall x \in X, \forall \bar{e} \in E,$$

suy ra

$$\hat{\psi}(f(x)) - \hat{\psi}(f(x_0)) \geq -\hat{\psi}(\bar{e}), \forall x \in X, \forall \bar{e} \in E.$$

Vì vậy,

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e),$$

với mọi $x \in X$ và mọi $e \in -E$. ■

Ví dụ 3.4. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$, $X = [-1, 2]$, $E = \left(0, \frac{1}{4}\right) + \mathbb{R}_+^2$ và hàm $f: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} (x, 0) & \text{nếu } x \in [-1, 0[, \\ (0, x) & \text{nếu } x \in [0, 2]. \end{cases}$$

Khi đó, $E_\infty = \mathbb{R}_+^2$ có sơ sở compact là

$$B = \{(b_1, b_2): b_1 + b_2 = 1; 0 \leq b_1 \leq 1\}.$$

Với $x_0 = 1 \in [-1, 2]$, ta có

$$f(1) = (0, 1).$$

Với mọi $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in E_\infty^\#$, trong đó $\psi_1, \psi_2 > 0$,

lấy $\hat{x} = 0 \in [-1, 2]$, ta cũng có

$$f(0) = (0, 0)$$

và cho $(-\hat{e}_1, -\hat{e}_2) = \left(0, -\frac{3}{4}\right) \in -E$ ta có

$$\begin{aligned} \psi(f(0)) - \psi(f(1)) &= 0 - (\psi_1, \psi_2)(0, 1) \\ &= -\psi_2 < (\psi_1, \psi_2) \left(0, -\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}\psi_2, \end{aligned}$$

điều đó có nghĩa là bất đẳng thức

$$\psi(f(x)) - \psi(f(x_0)) \geq \psi(e)$$

không thỏa với mọi $x \in X$ và mọi $e \in -E$. Do đó,

$$1 \notin \text{BEff}(\text{VOP})(f, E_\infty).$$

Nhận xét 3.1. Trong Zhou et al. (2019), các tác giả đã vận dụng một dạng mở rộng của hàm khoảng

cách định hướng để khảo sát điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Pareto và nghiệm hữu hiệu Pareto yếu của bài toán tối ưu tập có ràng buộc tương ứng với tập cải tiến. Hơn nữa, với phương pháp vô hướng hóa tuyến tính và nhân tử Lagrange, Zhou et al. (2025) cũng đã thiết lập được các điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Benson của bài toán cân bằng đa trị và áp dụng vào bài toán tối ưu tập tương ứng với nón lồi xa của một tập cải tiến trong không gian vector tôpô lồi địa phương. Bên cạnh nghiệm hữu hiệu Benson cho bài toán tối ưu tất định, gần đây Anh et al. (2025) đã xem xét điều kiện tối ưu và tính ổn định cho nghiệm hữu hiệu Benson vững của bài toán tối ưu có yếu tố không chắc chắn tương ứng với tập free disposal. Từ những quan sát trên, chúng ta có thể thấy rằng kết quả đạt được trong nghiên cứu này có thể được xem là giải quyết được phần nào cho khoảng trống nghiên cứu của các công trình đã có về điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Benson của bài toán tối ưu vector ứng với nón lồi xa của một tập bất kỳ.

4. KẾT LUẬN

Bài báo được thực hiện đã nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu của nghiệm hữu hiệu Pareto và nghiệm hữu hiệu Benson của bài toán tối ưu dựa trên các cấu trúc trội và nón lồi xa của một tập bất kỳ. Các kết quả đạt được trong nghiên cứu này là mới và khác với các công trình đã có. Hơn nữa, các kỹ thuật và cách tiếp cận được trình bày trong bài báo này, với những điều chỉnh phù hợp, có khả năng vận dụng thành công trong việc khảo sát điều kiện tối ưu cho các dạng nghiệm hữu hiệu khác nhau của các mô hình tối ưu vector.

TÀI LIỆU THAM KHẢO (REFERENCES)

- Andreani, R., Haeser, G., & Martínez, J. M. (2011). On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization. *Optimization*, 60(5), 627-641.
<https://doi.org/10.1080/02331930903578700>
- Anh, L. Q., Danh, N. H., Duoc, P. T., & Tam, T. N. (2021). Qualitative properties of solutions to set optimization problems. *Computational and Applied Mathematics*, 40(2), 1-18.
<https://doi.org/10.1007/s40314-021-01458-x>
- Anh, L. Q., Anh, N. T., Duoc, P. T., Khanh, L. T. V., & Thu, P. T. A. (2022). The connectedness of weakly and strongly efficient solution sets of nonconvex vector equilibrium problems. *Applied Set-Valued Analysis Optimization*, 4, 109-127.
<https://doi.org/10.23952/asvao.4.2022.1.08>
- Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Thuy, V. T. M. (2023). Existence and stability to vector optimization problems via improvement sets. *Journal of Applied and Numerical Optimization*, 5(2), 219-235.
<https://doi.org/10.23952/jano.5.2023.2.03>
- Anh, L. Q., Thuy, V. T. M., & Zhao, X. (2025). Qualitative properties of robust Benson efficient solutions of uncertain vector optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 205(1), 1-37.
<https://doi.org/10.1007/s10957-025-02638-z>
- Benson, H. P. (1979). An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 71(1), 232-241.
[https://doi.org/10.1016/0022-247X\(79\)90226-9](https://doi.org/10.1016/0022-247X(79)90226-9)
- Borwein, J. (1977). Proper efficient points for maximizations with respect to cones. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 15(1), 57-

63.
<https://doi.org/10.1137/0315004>
- Dempe, S., Dutta, J., & Mordukhovich, B. S. (2007). New necessary optimality conditions in optimistic bilevel programming. *Optimization*, 56(5-6), 577-604.
<https://doi.org/10.1080/02331930701617551>
- Edgeworth, F. Y. (1881). *Mathematical Psychics: An Essay on the Application of Mathematics to the Moral Sciences*. C. Kegan Paul & Co., London.
- Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization*, Vol. 491. Springer, Berlin.
<https://doi.org/10.1007/3-540-27659-9>
- Eichfelder, G., & Jahn, J. (2011). Vector Optimization Problems and Their Solution Concepts. In: Ansari, Q., & Yao, J. C. (eds) *Recent Developments in Vector Optimization* (pp. 1-27). Springer, Berlin.
https://doi.org/10.1007/978-3-642-21114-0_1
- Fan, K. (1972). A minimax inequality and applications. *Inequalities*, 3, 103-113.
- Geoffrion, A. M. (1968). Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 22(3), 618-630.
[https://doi.org/10.1016/0022-247X\(68\)90201-1](https://doi.org/10.1016/0022-247X(68)90201-1)
- Gutiérrez, C., Jiménez, B., & Novo, V. (2012). Improvement sets and vector optimization, *European Journal of Operational Research*, 223(2), 304-311.
<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2012.05.050>
- Gutiérrez, C., López, R., & Novo, V. (2014). Existence and boundedness of solutions in infinite-dimensional vector optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 162, 515-547.
<https://doi.org/10.1007/s10957-014-0541-7>
- Han, Y. (2023). Density and connectedness of optimal points with respect to improvement sets. *Optimization*, 72(4), 979-1008.
<https://doi.org/10.1080/02331934.2021.2009825>
- Han, Y., & Zhao, K. Q. (2023). Stability of optimal points with respect to improvement sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 199(3), 904-930.
<https://doi.org/10.1007/s10957-023-02308-y>
- Henig, M. I. (1982). Proper efficiency with respect to cones. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 36(3), 387-407.
<https://doi.org/10.1007/BF00934353>
- Hirschberger, M. (2005). Connectedness of efficient points in convex and convex transformable vector optimization. *Optimization*, 54(3), 283-304.
<https://doi.org/10.1080/02331930500096270>
- Jahn, J. (2011). *Vector Optimization*. Springer, Berlin.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-17005-8>
- Khan, A. A., Tammer, C., & Zălinescu, C. (2015). *Set-Valued Optimization*. Springer, Berlin.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-54265-7>
- Kim, D. S., Mordukhovich, B. S., Phạm, T. S., & Tuyen, N. V. (2021). Existence of efficient and properly efficient solutions to problems of constrained vector optimization. *Mathematical Programming*, 190(1), 259-283.
<https://doi.org/10.1007/s10107-020-01532-y>
- Kapoor, S., Lalitha, C. S. (2022). Continuity and closedness of constraint and solution set mappings in unified parametric semi-infinite vector optimization. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 506(2), 125648.
<https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2021.125648>
- Luc, D. T. (1989). *Theory of Vector Optimization*. Springer, Berlin.
<https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4>
- Lucchetti, R. E., & Miglierina, E. (2004). Stability for convex vector optimization problems. *Optimization*, 53(5-6), 517-528.
<https://doi.org/10.1080/02331930412331327166>
- Maeda, T. (2012). On optimization problems with set-valued objective maps: existence and optimality. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 153, 263-279.
<https://doi.org/10.1007/s10957-011-9952-x>
- Maggioni, F., & Wallace, S. W. (2012). Analyzing the quality of the expected value solution in stochastic programming. *Annals of Operations Research*, 200, 37-54.
<https://doi.org/10.1007/s10479-010-0807-x>
- Mordukhovich, B. S. (2006). *Variational Analysis and Generalized Differentiation II: Applications*. Springer, Berlin.
<https://doi.org/10.1007/3-540-31246-3>
- Muu, L., & Oettli, W. (1992). Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 18(12), 1159-1166.
[https://doi.org/10.1016/0362-546X\(92\)90159-C](https://doi.org/10.1016/0362-546X(92)90159-C)
- Pareto, V. (1906). L'ofelimità nei cicli non chiusi. *Giornale degli Economisti*, 33, 15-30.
- Peng, Z. Y., Peng, J. W., Long, X. J., & Yao, J. C. (2018). On the stability of solutions for semiinfinite vector optimization problems. *Journal of Global Optimization*, 70(1), 55-69.
<https://doi.org/10.1007/s10898-017-0553-6>
- Peng, Z. Y., Chen, X. J., Zhao, Y. B., & Li, X. B. (2023). Painlevé-Kuratowski convergence of minimal solutions for set-valued optimization problems via improvement sets. *Journal of*

- Global Optimization*, 87(2), 759-781.
<https://doi.org/10.1007/s10898-022-01166-8>
- Peng, Z. Y., Shao, C. Y., Zeng, Y., & Xiao, Y. B. (2024). Painlevé–Kuratowski stability of approximate solution sets for perturbed set optimization problems under general ordering sets by recession cone. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 28(3), 611-636.
<https://doi.org/10.11650/tjm/240104>
- Tanaka, T., & Kuroiwa, D. (1993). The convexity of A and B assures $\text{int}A+B = \text{int}(A+B)$. *Applied Mathematics Letters*, 6(1), 83-86.
[https://doi.org/10.1016/0893-9659\(93\)90154-F](https://doi.org/10.1016/0893-9659(93)90154-F)
- Tanino, T. (1988). Stability and sensitivity analysis in convex vector optimization. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 26(3), 521-536.
<https://doi.org/10.1137/0326031>
- Ustun, D., Carbas, S., & Toktas, A. (2021). Multi-objective optimization of engineering design problems through Pareto-Based bat algorithm. In: Dey, N., & Rajinikanth, V. (eds) *Applications of Bat Algorithm and its Variants*. Springer, Singapore.
https://doi.org/10.1007/978-981-15-5097-3_2
- Wang, Q., Jin, J., & Zhai, Y. (2024). Higher-order optimality conditions of robust Benson proper efficient solutions in uncertain vector optimization problems. *Optimization Letters*, 18(6), 1475-1490.
<https://doi.org/10.1007/s11590-023-02061-1>
- Wei, H. Z., Chen, C.R., & Li, S. J. (2018). Characterizations for optimality conditions of general robust optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 177, 835-856.
<https://doi.org/10.1007/s10957-018-1256-y>
- Zhao, K., Chen, G., & Yang, X. (2014). Approximate proper efficiency in vector optimization. *Optimization*, 64(8), 1777-1793.
<https://doi.org/10.1080/02331934.2014.979818>
- Zhou, Z., Chen, W., & Yang, X. (2019). Scalarizations and optimality of constrained set-valued optimization using improvement sets and image space analysis. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 183, 944-962.
<https://doi.org/10.1007/s10957-019-01554-3>
- Zhou, Z. A., & Kuang, M. (2023). Scalarization and optimality conditions of E -globally proper efficient solution for set-valued equilibrium problems. *Asia Pacific Journal of Operational Research*, 40(02), 2250009.
<https://doi.org/10.1142/S0217595922500099>
- Zhou, Z., Liang, K., & Ansari, Q. H. (2025). Optimality conditions for Benson proper efficiency of set-valued equilibrium problems. *Mathematical Methods of Operations Research*, 101, 111-134.
<https://doi.org/10.1007/s00186-025-00887-2>