



DOI:10.22144/ctujos.2025.140

ĐỊNH LÝ GIỚI HẠN TRUNG TÂM CHO BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN VỚI XÁC SUẤT CHUYỂN KHÔNG HỘI TỤ

Lâm Hoàng Chương* và Lê Hoài Nhân

Khoa Khoa học Tự nhiên, Đại học Cần Thơ, Việt Nam

*Tác giả liên hệ (Corresponding author): lhchuong@ctu.edu.vn

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 25/02/2025

Sửa bài (Revised): 27/03/2025

Duyệt đăng (Accepted): 31/07/2025

Title: Central limit theorem for random walks with non-convergent transition probabilities

Author: Lam Hoang Chuong* and Le Hoai Nhan

Affiliation(s): College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam

TÓM TẮT

Nghiên cứu này được thực hiện nhằm chỉ ra sự tồn tại định lý giới hạn trung tâm liên quan đến các bước đi ngẫu nhiên kề nhau trong không gian một chiều. Các kết quả dựa trên giả thiết rằng trong khi các xác suất chuyển tiếp có xu hướng phân kỳ, các dãy con của chúng lại hội tụ. Trong bài báo, phương pháp moment được sử dụng như một công cụ phân tích chính để chứng minh sự tiệm cận chuẩn của quá trình đang xét.

Từ khóa: Bước đi ngẫu nhiên kề nhau, định lý giới hạn trung tâm, phương pháp moment, toán tử Markov

ABSTRACT

This study aims to establish the existence of a central limit theorem for the nearest-neighbor random walks in a one-dimensional space. The results are based on the assumption that while the transition probabilities tend to diverge, their subsequences exhibit convergence. The paper employs the moment method as the primary analytical tool to demonstrate the normal approximation of the considered process.

Keywords: Central limit theorem, Markov operator, the moment method, the nearest-neighbor random walks

1. GIỚI THIỆU

Bước đi ngẫu nhiên một chiều là một quá trình ngẫu nhiên cơ bản có nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau như trong lý thuyết trò chơi, kinh doanh, sinh học, y học, vật lý,... Do đó, chủ đề này đã được nhiều nhà toán học nghiên cứu một cách sâu rộng, và những độc giả quan tâm có thể tham khảo các công trình được trích dẫn trong Alili (1999), Lawler and Limic (2010), Lam (2014) và Ross (2010) để tìm hiểu thêm. Trong những nghiên cứu này, nhiều thuộc tính của bước đi ngẫu nhiên đã được phát hiện, góp phần làm sáng tỏ hơn về hành vi tiệm cận của chúng trong không gian một chiều. Bài báo này được thực hiện nhằm mục đích nghiên cứu sự hội tụ theo phân phối chuẩn của các bước đi

ngẫu nhiên kề nhau trong không gian trạng thái $\mathbb{Z}$ thông qua việc áp dụng một phương pháp đơn giản liên quan đến các moment của chúng.

Việc xét một bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n \geq 0}$ bắt đầu từ trạng thái ban đầu $X_0 = 0$. Với mọi $n \geq 0$, xác suất chuyển đổi trạng thái được cho bởi

$$P(X_{n+1} = k + 1 | X_n = k) = \alpha_k,$$

$$P(X_{n+1} = k - 1 | X_n = k) = \alpha_{k-1},$$

$$P(X_{n+1} = k | X_n = k) = 1 - \alpha_k - \alpha_{k-1}.$$

Trong công thức trên, giá trị k là một số nguyên và $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ đại diện cho một dãy các số dương. Trong các trường hợp mà xác suất chuyển đổi không đổi, các nguyên tắc đã được thiết lập như định lý giới hạn trung tâm áp dụng cho bước đi ngẫu nhiên

cân bằng, trong khi định luật số lớn điều chỉnh cho bước đi ngẫu nhiên lệch. Những độc giả quan tâm có thể tìm thêm chi tiết trong Ross (2010). Trong bài báo Duong and Lam (2025) các tác giả đã chỉ ra rằng nếu dãy $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ hội tụ về một hằng số α sao cho $0 < \alpha \leq 1/2$, tức là

$$\lim_{k \rightarrow \pm\infty} \alpha_k = \alpha \quad (1)$$

thì tồn tại định lý giới hạn trung tâm liên quan đến bước đi ngẫu nhiên đã xét. Ở bài báo này, việc nghiên cứu dãy xác suất chuyển $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ không thỏa điều kiện (1) đã được tiến hành, tức là không hội tụ và đưa ra điều kiện để vẫn đảm bảo bước đi ngẫu nhiên vẫn hội tụ về phân phối chuẩn. Đây là một sự mở rộng cho kết quả trong Duong and Lam (2025) theo điều kiện (9) bên dưới. Chúng ta sẽ sử dụng toán tử Markov như là công cụ chính cho toàn bộ nghiên cứu này.

Ta nhắc lại toán tử Markov $\mathcal{P}$ liên quan với bước đi ngẫu nhiên X_n được đặc trưng bởi công thức

$$\mathcal{P}f(k) = \mathbb{E}[f(X_{n+1})|X_n = k],$$

trong đó f là một hàm đo được trên $\mathbb{Z}$. Do đó, với mọi $k \in \mathbb{Z}$, ta có:

$$\mathcal{P}f(k) = \alpha_k[f(k+1) - f(k)] - \alpha_{k-1}[f(k) - f(k-1)]. \quad (2)$$

Chúng ta sẽ đi sâu phân tích các tính chất của toán tử $\mathcal{P}$ và mối liên hệ của nó với các moment của bước đi ngẫu nhiên ở trong mục tiếp theo.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Nghiên cứu được bắt đầu bằng cách xem xét các tính chất cơ bản liên quan đến giới hạn của các dãy số. Một trong những định lý quan trọng nhất trong việc giải quyết giới hạn của các dãy số trung bình tổng quát là định lý Stolz-Cesàro, được phát biểu như sau:

Định lý 1. (Cesàro, 1888; Stolz, 1885) Cho $(a_n)_{n \geq 1}$ và $(b_n)_{n \geq 1}$ là hai dãy số thực. Giả sử rằng dãy $(b_n)_{n \geq 1}$ là một dãy số đơn điệu nghiêm ngặt và phân kỳ, và giới hạn sau tồn tại:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L.$$

Khi đó, ta có:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L.$$

Định lý này đưa ra phát biểu liên quan đến trường hợp $*/\infty$. Chứng minh của định lý này được

trình bày trong các tài liệu của Cesàro (1888) và Stolz (1885).

Bổ đề sau đây được xem như là hệ quả của Định lý 1. Nó rất hữu ích trong việc nghiên cứu giới hạn của các dãy số có dạng trung bình Cesàro. Ta có bổ đề sau:

Bổ đề 1. Cho $(u_n)_{n \geq 1}$ là một dãy số dương sao cho $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u$. Khi đó với mỗi số nguyên $\ell = 0, 1, 2, \dots$, giới hạn sau đây tồn tại:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\ell+1}} \sum_{i=1}^n i^{\ell} u_i = \frac{u}{\ell+1}. \quad (3)$$

Chứng minh. Xét các dãy số $a_n = \sum_{i=1}^n i^{\ell} u_i$ và $b_n = n^{\ell+1}$ với $n \geq 1$. Chúng ta sẽ thiết lập giới hạn bằng cách sử dụng các dãy số này. Cụ thể, chúng ta phân tích tỉ số của các sai phân liên tiếp của chúng:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{\ell} u_n}{(n+1)^{\ell+1} - n^{\ell+1}} = \frac{u}{\ell+1}.$$

Đẳng thức này xuất phát từ khai triển nhị thức Newton:

$$(n+1)^{\ell+1} - n^{\ell+1} = \frac{1}{\ell+1} n^{\ell} + \sum_{k=2}^{\ell+1} C_{\ell+1}^k n^{\ell+1-k}.$$

Cuối cùng, kết quả mong muốn được đạt được bằng cách áp dụng Định lý 1 cho hai dãy số a_n và b_n , trong đó lưu ý rằng b_n là dãy tăng nghiêm ngặt và phân kỳ.

Tiếp theo, chúng ta xem xét toán tử Markov $\mathcal{P}$, như được định nghĩa theo (2). Toán tử này đóng vai trò là công cụ chính để phân tích các bước đi ngẫu nhiên trong mô hình của chúng ta. Mệnh đề sau đây phác thảo những tính chất chính liên quan đến toán tử $\mathcal{P}$.

Mệnh đề 1. Cho ℓ là một số nguyên dương. Giả sử rằng các hàm h_{ℓ} , được định nghĩa trên tập $\mathbb{Z}$, thỏa mãn phương trình sau đây

$$(\mathcal{P} - I)h_{\ell}(m) = h_{\ell-1}(m), \quad (4)$$

trong đó giá trị $h_0(m) = 1$ với mọi $m \in \mathbb{Z}$, I là toán tử đồng nhất và điều kiện biên được cho bởi $h_{\ell}(0) = 0$. Khi đó, giới hạn sau đây được thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\ell}} \mathbb{E}[h_{\ell}(X_n)] = \frac{1}{\ell!} \quad (5)$$

cho mỗi $\ell = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh. Chúng ta đầu tiên bắt đầu với trường hợp $\ell = 1$.

Vì tập hợp giá trị của X_n là tập số nguyên $\mathbb{Z}$, chúng ta có thể thay m bằng X_n sao cho

$$(\mathcal{P} - I)h_1(X_n) = 1 \quad (6)$$

với mọi $n \geq 0$. Lấy kỳ vọng của cả hai vế của biểu thức trước đó, ta có

$$\mathbb{E}[h_1(X_{n+1})] + \mathbb{E}[h_1(X_n)] = 1$$

bằng cách áp dụng tính chất của kỳ vọng có điều kiện cho toán tử $\mathcal{P}$. Do giả định $\mathbb{E}[h_1(X_0)] = \mathbb{E}[h_1(0)] = 0$, chúng ta có thể suy ra rằng với mọi $n \geq 0$

$$\mathbb{E}[h_1(X_n)] = n \quad (7)$$

bằng cách sử dụng đệ quy theo n . Do đó, ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \mathbb{E}[h_1(X_n)] = 1,$$

hay (5) đúng với $\ell = 1$.

Giả sử rằng (5) đúng cho $\ell \geq 1$. Chúng ta sẽ chứng minh rằng nó cũng đúng cho $\ell + 1$. Vì $h_{\ell+1}$ thỏa mãn

$$(\mathcal{P} - I)h_{\ell+1}(m) = h_\ell(m), \quad (8)$$

chúng ta cũng có

$$\mathbb{E}[h_{\ell+1}(X_{n+1})] - \mathbb{E}[h_{\ell+1}(X_n)] = \mathbb{E}[h_\ell(X_n)]$$

với mọi $n \geq 0$. Từ đó, chúng ta có

$$\mathbb{E}[h_{\ell+1}(X_n)] = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[h_\ell(X_i)],$$

bằng cách sử dụng đệ quy theo n . Mặt khác, chúng ta có

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\ell+1}} \mathbb{E}[h_{\ell+1}(X_n)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{\ell+1}} \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{E}[h_\ell(X_i)],$$

dẫn đến giới hạn là $1/(\ell + 1)!$ bằng cách áp dụng Định lý 1 và Bổ đề 1. Điều này hoàn tất chứng minh cho Mệnh đề 1.

Cuối cùng, phương pháp các moment được xem xét như một công cụ hữu ích để thiết lập các định lý giới hạn trong lý thuyết xác suất. Cách tiếp cận này bao gồm việc chứng minh sự hội tụ yếu của các phân phối xác suất bằng cách xác lập rằng các moment của chúng hội tụ. Định lý dưới đây khái quát nguyên tắc này:

Định lý 2. (Billingsley, 1995) *Giả sử phân phối của biến ngẫu nhiên Z được xác định hoàn toàn bởi các moment của nó. Hơn nữa, giả sử rằng $(Z_n)_{n \geq 1}$*

là một dãy các biến ngẫu nhiên sở hữu các moment của mọi bậc. Nếu thỏa mãn điều kiện sau:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^\ell) = \mathbb{E}(Z^\ell) \text{ với mọi } \ell = 1, 2, 3, \dots$$

thì dãy $(Z_n)_{n \geq 1}$ sẽ hội tụ đến Z về phân phối khi n tiến ra vô hạn.

Bổ đề tiếp theo được rút ra từ Định lý 2 và cung cấp thêm cái nhìn về các điều kiện dưới đây hội tụ xảy ra.

Bổ đề 2. Giả sử $(Z_n)_{n \geq 1}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên. Nếu các giới hạn sau đây được thỏa mãn cho mỗi $\ell = 1, 2, 3, \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^{2\ell}) = (2\ell - 1)!! \sigma^{2\ell}$$

và đối với moment bậc lẻ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(Z_n^{2\ell-1}) = 0$$

thì dãy $(Z_n)_{n \geq 1}$ hội tụ về phân phối chuẩn $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ khi n tiến tới vô hạn. Ở đây, $k!!$ được ký hiệu là giai thừa kép, được xác định bởi tích của tất cả các số từ k đến 1 có cùng một tính chất lẻ/chẵn với k .

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trong phần này ta xét dãy các xác suất chuyển $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ như sau

$$\alpha_{2k} = \alpha \text{ và } \lim_{k \rightarrow \pm \infty} \alpha_{2k-1} = \alpha/2, \quad (9)$$

với $k \in \mathbb{Z}$ và $\alpha \neq 0$. Khi đó dãy $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ không hội tụ khi k tiến ra vô cùng.

Định lý giới hạn trung tâm cho các bước đi ngẫu nhiên đã xét được thiết lập như sau:

Định lý 3. *Nếu dãy xác suất chuyển $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ thỏa mãn điều kiện (9) thì sự hội tụ sau đây tồn tại về phân phối:*

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 4\alpha/3)$$

khi n tiến tới vô hạn.

Theo Bổ đề 2, để thiết lập Định lý 3 chúng ta chỉ cần chứng minh sự hội tụ của các moment sau đây: đối với moment bậc chẵn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2\ell} \right] = (2\ell - 1)!! (4\alpha/3)^\ell \quad (10)$$

và đối với moment bậc lẻ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2\ell-1} \right] = 0 \quad (11)$$

cho mỗi $\ell = 1, 2, 3, \dots$

Chứng minh (10). Để bắt đầu, chúng tôi tập trung vào việc chứng minh giới hạn của phương sai cho $\ell = 1$, tức là

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^2 \right] = 4\alpha/3. \quad (12)$$

Xét một hàm f_1 được định nghĩa trên $\mathbb{Z}$, hàm này thỏa mãn phương trình sai phân sau

$$(\mathcal{P} - I)f_1(m) = 1 \quad (13)$$

với các điều kiện biên $f_1(1) = f_1(0) = 0$. Đây là một dạng phương trình hàm trên tập số nguyên và có thể được viết lại dưới dạng phương trình hồi quy theo m . Từ phương trình (13) ta dễ dàng suy ra được đẳng thức

$$\mathcal{P}f_1(X_n) - f_1(X_n) = 1$$

với mọi $n \geq 0$ vì giá trị của X_n thuộc tập số nguyên. Bằng cách tính kỳ vọng của cả hai vế của biểu thức này, chúng ta có biểu thức sau

$$\mathbb{E}[f_1(X_{n+1})|X_n] - \mathbb{E}f_1(X_n) = 1$$

với mọi $n \geq 0$. Từ đây, ta suy ra rằng

$$\mathbb{E}f_1(X_n) = n + \mathbb{E}f_1(X_0),$$

bằng cách áp dụng tính chất của kỳ vọng có điều kiện và phương pháp đệ quy trên n . Kết quả là, chúng ta thu được đẳng thức

$$\mathbb{E}f_1(X_n) = n \quad (14)$$

với mọi $n \geq 0$ vì theo giả thiết ban đầu $X_0 = 0$ và điều kiện biên $f_1(0) = 0$. Hơn nữa, một nghiệm cụ thể cho phương trình sai phân (13) có thể được xác định bằng cách biến đổi tương đương với phương trình hồi quy:

$$\begin{aligned} \alpha_m[f_1(m+1) - f_1(m)] \\ - \alpha_{m-1}[f_1(m) - f_1(m-1)] \\ = 1 \end{aligned}$$

dựa theo định nghĩa của toán tử $\mathcal{P}$ như trong biểu thức (2) ở phần giới thiệu.

Từ đó, nghiệm của phương trình (13) là hàm f_1 xác định trên tập số nguyên dựa trên tính chẵn lẻ của tập xác định:

Đối với tập số chẵn thì $f_1(2m)$ được cho bởi công thức sau

$$f_1(2m) = \begin{cases} \frac{m(m-1)}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \frac{2i-1}{\alpha_{2i-1}}, & m \geq 1 \\ 0, & m = 0 \\ \frac{m(m-1)}{\alpha} - \sum_{i=-1}^m \frac{2i-1}{\alpha_{2i-1}}, & m \leq -1. \end{cases}$$

Đối với tập số lẻ thì $f_1(2m-1)$ được cho bởi công thức sau

$$f_1(2m-1) = \begin{cases} \frac{m(m-1)}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \frac{2i-1}{\alpha_{2i-1}}, & m \geq 2 \\ 0, & m = 1 \\ \frac{1}{\alpha_{-1}}, & m = 0 \\ \frac{m(m-1)}{\alpha} - \sum_{i=-1}^m \frac{2i-1}{\alpha_{2i-1}}, & m \leq -1 \end{cases}$$

bằng cách áp dụng phương pháp đệ quy trên m . Do đó, chúng ta có thể suy ra giới hạn sau liên quan đến nghiệm $f_1(m)$ của phương trình (13) đó là

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_1(m)}{m^2} = \frac{3}{4\alpha} \quad (15)$$

theo Bổ đề 2 và theo giả thiết (9) cho dãy xác suất chuyển $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$. Từ đó theo định nghĩa về giới hạn thì với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một hằng số dương $M > 0$ sao cho với mọi $|m| > M$, ta có

$$\left| \frac{m^2}{f_1(m)} - \frac{4\alpha}{3} \right| < \varepsilon. \quad (16)$$

Khi đó, công thức biểu diễn liên quan đến moment bậc hai của bước đi ngẫu nhiên được cho như sau:

$$\left| \mathbb{E} \left[\frac{X_n^2}{n} - \frac{4\alpha}{3} \right] \right| = \left| \mathbb{E} \left[\frac{X_n^2}{n} - \frac{4\alpha}{3} \times \frac{f_1(X_n)}{n} \right] \right| \quad (17)$$

bằng cách áp dụng đẳng thức (14). Bằng lập luận tương tự như trong Duong and Lam (2025), việc đánh giá vế phải của (17) được thực hiện dựa trên tập giá trị của X_n trong hai trường hợp là tập bị chặn bởi M và tập không bị chặn kết hợp với tính chất giới hạn của nghiệm của phương trình sai phân (13) và kỳ vọng liên quan đến bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n \geq 0}$. Nếu $|X_n| \leq M$, thì $|f_1(X_n)|$ bị chặn bởi một hằng số phụ thuộc vào M , và do đó vế phải của biểu thức (17) sẽ hội tụ về 0 khi n tiến đến vô cùng. Ngược lại, nếu $|X_n| > M$, thì vế phải của biểu thức (17) bị chặn bởi cận trên như sau

$$\mathbb{E} \left[\frac{f_1(X_n)}{n} \left| \frac{X_n^2}{f_1(X_n)} - \frac{4\alpha}{3} \right| \right] < \varepsilon \mathbb{E} \left[\frac{f_1(X_n)}{n} \right] = \varepsilon.$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ bất đẳng thức (16) và hàm $f_1(m)$ là một hàm không âm. Khi ta cho ε bé tùy ý thì vế phải của (17) dần hội tụ về 0. Khi đó, ta có được kết luận của (12) về sự hội tụ của moment bậc hai của bước đi ngẫu nhiên về phương sai của phân phối chuẩn như đã đề cập.

Đối với trường hợp $\ell > 1$, các hàm g_ℓ được định nghĩa trên $\mathbb{Z}$ mà thỏa mãn phương trình sai phân cũng được xem xét:

$$(\mathcal{P} - I)f_\ell(m) = f_{\ell-1}(m) \quad (18)$$

với điều kiện biên $f_\ell(-1) = f_\ell(0) = f_\ell(1) = 0$. Tương tự như trường hợp $\ell = 1$, ta có mối liên hệ như sau

$$\mathbb{E}[f_\ell(X_{n+1})|X_n] - \mathbb{E}f_\ell(X_n) = \mathbb{E}f_{\ell-1}(X_n)$$

với mọi $n \geq 0$. Do đó, chúng ta thu được

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}f_\ell(X_n)}{n^\ell} = \frac{1}{\ell!} \quad (19)$$

theo Mệnh đề 1.

Phương trình (18) có thể được biểu diễn lại theo dạng hồi quy như sau:

$$\begin{aligned} \alpha_m[f_\ell(m+1) - f_\ell(m)] \\ - \alpha_{m-1}[f_\ell(m) - f_\ell(m-1)] \\ = f_{\ell-1}(m) \end{aligned}$$

Bằng cách áp dụng đệ quy trên m , nghiệm của phương trình (18) là hàm f_ℓ xác định trên tập số nguyên dựa trên tính chẵn lẻ của tập xác định:

Đối với tập số chẵn thì $f_\ell(2m)$ được cho bởi công thức

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{2i} f_{\ell-1}(k) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha_{2i-1}} \sum_{k=0}^{2i-1} f_{\ell-1}(k)$$

nếu $m \geq 1$,

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=-1}^m \sum_{k=-1}^{2i+1} f_{\ell-1}(k) + \sum_{i=-1}^{m+1} \frac{1}{\alpha_{2i-1}} \sum_{k=-1}^{2i} f_{\ell-1}(k)$$

nếu $m \leq -1$, $f_\ell(2m) = 0$ nếu $m = 0$,

Đối với tập số lẻ thì $f_\ell(2m-1)$ được cho bởi công thức

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{2i} f_{\ell-1}(k) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha_{2i-1}} \sum_{k=0}^{2i-1} f_{\ell-1}(k)$$

nếu $m \geq 2$,

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=-1}^m \sum_{k=-1}^{2i+1} f_{\ell-1}(k) + \sum_{i=-1}^{m+1} \frac{1}{\alpha_{2i-1}} \sum_{k=-1}^{2i} f_{\ell-1}(k)$$

nếu $m \leq -1$ và $f_\ell(2m-1) = 0$ nếu $m = 0, 1$.

Từ đó ta có thể suy ra giới hạn liên quan đến nghiệm của phương trình (18) là hàm $f_\ell(m)$ như sau

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{f_\ell(m)}{m^{2\ell}} = \frac{1}{(2\ell)!(2\alpha)^\ell} = \frac{2^\ell}{(2\ell)!(4\alpha/3)^\ell} \quad (20)$$

theo Bổ đề 1 và áp dụng phương pháp đệ quy theo ℓ . Từ đó theo định nghĩa giới hạn thì với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một hằng số dương $N > 0$ sao cho với mọi $|m| > N$, ta có

$$\left| \frac{m^{2\ell}}{f_\ell(m)} - \frac{(2\ell)!(4\alpha/3)^\ell}{2^\ell} \right| < \varepsilon. \quad (21)$$

Khi đó, ta có

$$\left| \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2\ell} - (2\ell-1)!(4\alpha/3)^\ell \right] \right|$$

tương đương với biểu thức

$$\left| \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2\ell} - (2\ell-1)!(4\alpha)^\ell \frac{f_\ell(X_n)}{\ell! n^\ell} \right] \right| \quad (22)$$

bằng cách áp dụng đẳng thức (14). Lập luận tương tự được sử dụng như trường hợp $\ell = 1$ ta sẽ có kết luận của (10). Cụ thể ta cũng xét tập giá trị của X_n trong hai trường hợp bị chặn bởi N và không bị chặn. Nếu $|X_n| \leq N$, thì $|f_\ell(X_n)|$ bị chặn bởi một hằng số phụ thuộc vào N và do đó vế phải của biểu thức (22) sẽ hội tụ về 0 khi n tiến đến vô cùng. Ngược lại, nếu $|X_n| > N$, thì vế phải của biểu thức (22) bị chặn bởi

$$\mathbb{E} \left[\frac{f_\ell(X_n)}{n^\ell} \left| \frac{X_n^{2\ell}}{f_\ell(X_n)} - \frac{(2\ell)!(4\alpha)^\ell}{2^\ell} \right| \right] < \varepsilon \mathbb{E} \left[\frac{f_\ell(X_n)}{n^\ell} \right] < \varepsilon.$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ bất đẳng thức (21) và lưu ý rằng $f_\ell(m)$ là một hàm không âm. Do đó, khi ε bé tùy ý thì giá trị của biểu thức (22) cũng dần tiến về 0 như mong muốn. Như vậy chứng minh của (10) hoàn tất và chúng ta đã có sự hội tụ của các moment bậc chẵn của bước đi ngẫu nhiên đang xét.

Chứng minh (11). Đối với trường hợp giới hạn của các moment bậc lẻ của bước đi ngẫu nhiên trong mô hình, lập luận tương tự cũng được sử dụng. Tuy nhiên, các phương trình sai phân liên quan đến toán

từ Markov $\mathcal{P}$ được điều chỉnh để đạt được kết quả mong muốn như trong (11). Đầu tiên, chúng ta sẽ phân tích cho moment bậc 1 tương ứng với trường hợp $\ell = 1$, tức là,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^1 \right] = 0.$$

Ta cũng xét một hàm g_1 , được định nghĩa trên $\mathbb{Z}$, thỏa mãn phương trình sai phân

$$(\mathcal{P} - I)g_1(m) = 0 \quad (23)$$

với các điều kiện biên $g_1(1) = g_1(0) = 0$. Lưu ý ở đây ta về phải của phương trình (23) được cho bằng 0. Tương tự như trên ta cũng có đẳng thức sau bằng cách thay thế giá trị m bởi X_n

$$\mathcal{P}g_1(X_n) - g_1(X_n) = 0$$

với mọi $n \geq 0$. Bằng cách tính kỳ vọng của cả hai bên của biểu thức này, chúng ta có

$$\mathbb{E}[g_1(X_{n+1})|X_n] - \mathbb{E}g_1(X_n) = 0$$

với mọi $n \geq 0$. Từ đây, ta suy ra rằng

$$\mathbb{E}g_1(X_n) = \mathbb{E}g_1(X_0).$$

từ việc áp dụng đệ quy trên n . Kết quả là, chúng ta thu được

$$\mathbb{E}g_1(X_n) = 0. \quad (24)$$

với mọi $n \geq 0$ vì theo giả thiết của điều kiện biên $g_1(X_0) = g_1(0) = 0$. Hơn nữa, một nghiệm cụ thể cho phương trình Poisson này cũng có thể được xác định.

Phương trình (23) tương đương với

$$\begin{aligned} \alpha_m[g_1(m+1) - g_1(m)] \\ - \alpha_{m-1}[g_1(m) - g_1(m-1)] \\ = 0 \end{aligned}$$

Nghiệm của phương trình (23) được xác định như sau: Đối với tập số chẵn thì $g_1(2m)$ được cho bởi công thức

$$g_1(2m) = \begin{cases} \frac{m-1}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_{2i-1}}, & m \geq 1 \\ 0, & m = 0 \\ \frac{m}{\alpha} - \sum_{i=-1}^m \frac{1}{\alpha_{2i-1}}, & m \leq -1 \end{cases}$$

Đối với tập số lẻ thì $g_1(2m-1)$ được cho bởi công thức

$$g_1(2m-1) = \begin{cases} \frac{m-1}{\alpha} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{\alpha_{2i-1}}, & m \geq 2 \\ 0, & m = 1 \\ \frac{1}{\alpha_{-1}}, & m = 0 \\ \frac{m}{\alpha} - \sum_{i=-1}^m \frac{1}{\alpha_{2i-1}}, & m \leq -1 \end{cases}$$

bằng cách áp dụng đệ quy trên m . Do đó, chúng ta có thể suy ra giới hạn sau:

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{g_1(m)}{m} = \frac{3}{2\alpha}$$

theo Bổ đề 1. Từ đó, với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một hằng số dương $M > 0$ sao cho với mọi $|m| > M$, ta có

$$\left| \frac{g_1(m)}{m} \times \frac{2\alpha}{3} - 1 \right| < \varepsilon. \quad (25)$$

Khi đó, ta có

$$\left| \mathbb{E} \left[\frac{X_n}{\sqrt{n}} - 0 \right] \right| = \left| \mathbb{E} \left[\frac{X_n}{\sqrt{n}} - \frac{2\alpha}{3} \times \frac{g_1(X_n)}{\sqrt{n}} \right] \right| \quad (26)$$

bằng cách áp dụng đẳng thức (24). Nếu $|X_n| \leq M$, thì $|g_1(X_n)|$ bị chặn bởi một hằng số phụ thuộc vào M , và do đó về phải của biểu thức (26) sẽ hội tụ về 0 khi n tiến đến vô cùng. Ngược lại, nếu $|X_n| > M$, thì về phải của biểu thức (26) bị chặn bởi

$$\mathbb{E} \left[\frac{X_n}{\sqrt{n}} \left| 1 - \frac{2\alpha}{3} \times \frac{g_1(X_n)}{X_n} \right| \right] < \varepsilon \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^2 \right]}.$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ Bất đẳng thức (25). Ở đây ta lưu ý rằng hàm $g_1(m)$ có giá trị dương khi $m > 0$ và có giá trị âm khi $m < 0$ nên không thể tiếp cận giống như cho trường hợp moment bậc chẵn. Ngoài ra, giá trị của $\mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^2 \right]$ bị chặn vì nó là một dãy hội tụ như trong (12), do đó khi cho ε tiến về 0 thì về phải của biểu thức (26) sẽ hội tụ về 0. Như vậy, chứng minh của trường hợp $\ell = 1$ đã được hoàn thành.

Đối với trường hợp $\ell > 1$, chúng ta xem xét các hàm g_ℓ , được định nghĩa trên $\mathbb{Z}$, mà thỏa mãn phương trình sai phân

$$(\mathcal{P} - I)g_\ell(m) = g_{\ell-1}(m) \quad (27)$$

với điều kiện biên $g_\ell(-1) = g_\ell(0) = g_\ell(1) = 0$. Rõ ràng rằng

$$\mathbb{E}[g_\ell(X_{n+1})|X_n] - \mathbb{E}g_\ell(X_n) = \mathbb{E}g_{\ell-1}(X_n)$$

với mọi $n \geq 0$. Do đó, chúng ta thu được

$$\mathbb{E}g_\ell(X_n) = 0 \quad (28)$$

bằng cách đệ quy theo n và áp dụng giả thiết của điều kiện biên $\mathbb{E}g_\ell(X_0) = \mathbb{E}g_\ell(0) = 0$.

Tiếp theo, phương trình (27) được giải để tìm một nghiệm cụ thể cho phương trình sai phân này. Phương trình (27) có thể được biểu diễn một cách chi tiết như sau:

$$\begin{aligned} \alpha_m[g_\ell(m+1) - g_\ell(m)] \\ - \alpha_{m-1}[g_\ell(m) - g_\ell(m-1)] \\ = g_{\ell-1}(m). \end{aligned}$$

Bằng cách áp dụng đệ quy trên m , nghiệm của phương trình (27) là $g_\ell(m)$ được xác định trên tập số chẵn và số lẻ như sau:

Đối với tập số chẵn thì $g_\ell(2m)$ được tính bằng biểu thức

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{2i} g_{\ell-1}(k) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha_{2i-1}} \sum_{k=0}^{2i-1} g_{\ell-1}(k)$$

nếu $m \geq 1$,

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=-1}^m \sum_{k=-1}^{2i+1} g_{\ell-1}(k) + \sum_{i=-1}^{m+1} \frac{1}{\alpha_{2i-1}} \sum_{k=-1}^{2i} g_{\ell-1}(k)$$

nếu $m \leq -1$, $g_\ell(2m) = 0$ nếu $m = 0$;

Đối với tập số lẻ thì $g_\ell(2m-1)$ được tính bằng biểu thức

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{2i} g_{\ell-1}(k) + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\alpha_{2i-1}} \sum_{k=0}^{2i-1} g_{\ell-1}(k)$$

nếu $m \geq 2$,

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{i=-1}^m \sum_{k=-1}^{2i+1} g_{\ell-1}(k) + \sum_{i=-1}^{m+1} \frac{1}{\alpha_{2i-1}} \sum_{k=-1}^{2i} g_{\ell-1}(k)$$

nếu $m \leq -1$ và $g_\ell(2m-1) = 0$ nếu $m = 0, 1$.

Từ đó ta có thể suy ra giới hạn sau

$$\lim_{m \rightarrow \pm\infty} \frac{g_\ell(m)}{m^{2\ell-1}} = \frac{1}{(2\ell-1)!(2\alpha/3)^\ell} \quad (29)$$

theo Bổ đề 1 và áp dụng phương pháp đệ quy theo ℓ . Từ đó theo định nghĩa giới hạn thì với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại một hằng số dương $N > 0$ sao cho với mọi $|m| > N$, ta có

$$\left| \frac{g_\ell(m)}{m^{2\ell-1}} (2\ell-1)!(2\alpha/3)^\ell - 1 \right| < \varepsilon. \quad (30)$$

Khi đó, ta có

$$\left| \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2\ell-1} - 0 \right] \right|$$

tương đương với

$$\left| \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2\ell-1} - (2\ell-1)!(2\alpha/3)^\ell \frac{g_\ell(X_n)}{\sqrt{n}^{2\ell-1}} \right] \right| \quad (31)$$

bằng cách áp dụng đẳng thức (28). Nếu $|X_n| \leq N$, thì $|g_\ell(X_n)|$ bị chặn bởi một hằng số phụ thuộc vào N , và do đó giá trị của biểu thức (31) sẽ hội tụ về 0 khi n tiến đến vô cùng. Ngược lại, nếu $|X_n| > N$, thì về phải của biểu thức (31) bị chặn bởi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2\ell-1} \left| 1 - (2\ell-1)!(2\alpha/3)^\ell \frac{g_\ell(X_n)}{X_n^{2\ell-1}} \right| \right] \\ < \varepsilon \sqrt{\mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2(2\ell-1)} \right]}. \end{aligned}$$

Bất đẳng thức này được suy ra từ Bất đẳng thức (30) và giá trị của $\mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2(2\ell-1)} \right]$ là bị chặn nên khi cho ε tiến về 0 thì giá trị của biểu thức (31) sẽ hội tụ về 0. Do đó, kết quả chứng minh của (11) hoàn tất và chúng ta cũng đã chứng minh xong Định lý 3 về sự tồn tại của định lý giới hạn trung tâm cho bước đi ngẫu nhiên đã xét.

Trong phần cuối của mục này chúng ta phân tích thêm một chút về giới hạn của dãy các xác suất chuyển, ta có chú ý sau

Chú ý 1. Trong trường hợp $\alpha = 0$, giới hạn liên quan đến hàm $f_\ell(m)$ như sau

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f_\ell(m)}{m^{2\ell}} = +\infty$$

cho mỗi $\ell = 1, 2, \dots$. Tương ứng, chúng ta cũng tìm thấy rằng

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\left(\frac{X_n}{\sqrt{n}} \right)^{2\ell} \right] = 0$$

cho mỗi $\ell = 1, 2, \dots$. Do đó, chúng ta có thể suy ra rằng

$$\frac{X_n}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$$

về xác suất khi n tiến tới vô hạn. Như vậy sẽ không tồn tại định lý giới hạn trung tâm cho bước đi ngẫu nhiên khi dãy các xác suất chuyển hội tụ về 0.

4. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, việc thiết lập định lý giới hạn trung tâm cho các bước đi ngẫu nhiên với các xác suất chuyển không hội tụ đã được thực hiện thành công thông qua việc sử dụng phương pháp moment. Một khía cạnh then chốt của phương pháp

này liên quan đến việc giải phương trình sai phân nhằm xác định một nghiệm thích hợp cho việc tính giới hạn của các moment trong bước đi ngẫu nhiên kề nhau. Phương pháp này có thể được áp dụng cho một số mô hình quá trình ngẫu nhiên khác để xác định các dạng hội tụ của chúng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO (REFERENCES)

- Alili, S. (1999). Asymptotic behaviour for random walks in random environments. *Journal of Applied Probability*, 36, 334–349.
<https://doi.org/10.1239/jap/1032374457>
- Billingsley, P. (1995). *Probability and Measure* (3rd edition). John Wiley, New York.
- Cesàro, E. (1888). Sur la convergence des série. *Nouvelles annales de mathématiques*, Series 3, Tome 7, 49–59.
- Duong, T. B. B., & Lam, H. C. (2025). On the convergence of random walks in one dimensional space. *Acta Mathematica Hungarica*, 175(1), 174–184.
<https://doi.org/10.1007/s10474-024-01497-w>
- Lam, H. C. (2014). A quenched central limit theorem for reversible random walks in a random environment on $\mathbb{Z}$. *Journal of Applied Probability*, 51(4), 1051–1064.
<https://doi.org/10.1239/jap/1421763327>
- Lawler, G. F., & Limic, V. (2010). *Random Walk: A Modern Introduction*. Cambridge University Press, New York.
<https://doi.org/10.1017/CBO9780511750854>
- Stolz, O. (1885). *Vorlesungen über allgemeine Arithmetik: nach den Neueren Ansichten*. Teubners, Leipzig, 173–175.
- Ross, S. (2010). *Introduction to Probability Models* (10th edition). Academic Press, Boston.
<https://doi.org/10.1016/B978-0-12-375686-2.00007-8>