Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2025.036

NGHIÊN CỨU ĐIỂM KÌ DỊ VÀ SỰ RẼ NHÁNH HOPF CỦA MÔ HÌNH HINDMARSH-ROSE 3D

Phan Văn Long Em*, Đặng Trần Quốc Kỳ và Cao Hoàng Kiệt
Trường Đại học An Giang, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): pvlem@agu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 11/08/2024
Sửa bài (Revised): 07/09/2024
Duyệt đăng (Accepted): 26/11/2024

Title: *Study of fixed points and Hopf bifurcation of Hindmarsh-Rose 3D model*

Author(s): *Phan Van Long Em*, Dang Tran Quoc Ky and Cao Hoang Kiet*

Affiliation(s): *An Giang University, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Viet Nam*

TÓM TẮT

Bài báo được thực hiện nhằm nghiên cứu điểm kì dị và sự rẽ nhánh Hopf của một lớp mô hình Hindmarsh-Rose 3D. Đầu tiên, tất cả các điều kiện cần cho các tham số của hệ thống sao cho chỉ có một điểm kì dị ổn định, đại diện cho trạng thái dừng của mô hình này được nghiên cứu. Sau đó, dựa vào định lí Hopf, sự tồn tại của điểm rẽ nhánh Hopf được chứng minyh mà ở đó tính ổn định của hệ thống bị thay đổi và nghiệm tuần hoàn xuất hiện. Chính xác hơn, đó là sự rẽ nhánh địa phương mà tại đó điểm kì dị của hệ động lực mất đi tính ổn định, khi cặp giá trị riêng phức liên hợp đi qua trục ảo của mặt phẳng phức. Hơn nữa, với những giả thiết hợp lí cho hệ động lực, đường tròn giới hạn biên độ nhỏ tách ra từ điểm kì dị.

Từ khóa: *Điểm kì dị, đường tròn giới hạn, mô hình Hindmarsh-Rose 3D, sự rẽ nhánh Hopf*

ABSTRACT

The paper studies a class of Hindmarsh-Rose 3D model. First, necessary conditions for the parameters of the system are established in order to have a table fixed point which presents the resting state for this model. After that, using the Hopf's theorem we prove the existence of a Hopf bifurcation, a critical point where a system's stability switches and a periodic solution arises. More precisely, it is a local bifurcation in which a fixed point of a dynamical system loses stability as a pair of complex conjugate eigenvalues cross the complex plane imaginary axis. Moreover, with suitable assumptions for the dynamical system, a small-amplitude limit cycle branches from the fixed point.

Keywords: *Fixed point, Hindmarsh-Rose 3D model, Hopf bifurcation, limit cycle*

1. GIỚI THIỆU

Trong toán học, sự tồn tại nghiệm tương đương với tồn tại điểm cố định đối với một số hàm đặc biệt. Kết quả liên quan điểm cố định cung cấp điều kiện cho sự tồn tại nghiệm của bài toán. Do đó, sự tồn tại điểm cố định là một trong những vấn đề quan trọng trong toán học và một số lĩnh vực khoa học. Lý thuyết về điểm cố định là sự kết hợp đẹp của giải tích thuần túy và ứng dụng, tôpô, hình học. Có nhiều trường hợp không thể tìm được nghiệm chính xác, do đó phát triển những thuật toán để xấp xỉ được nghiệm mong muốn là điều cần thiết. Việc này liên quan mật thiết đến lý thuyết điều khiển tối ưu, các lĩnh vực khoa học khác nhau và trong kĩ thuật. Hơn năm mươi năm qua, lý thuyết điểm cố định đã được

trở thành công cụ quan trọng trong nghiên cứu những hiện tượng phi tuyến, tính toán vi phân, phương trình đạo hàm riêng, điều khiển tối ưu, trong nhiều lĩnh vực khác như sinh học, hóa học, kinh tế, kĩ thuật, lý thuyết trò chơi và vật lí.

Lý thuyết về sự rẽ nhánh là một lĩnh vực toán học nghiên cứu về sự thay đổi tính chất hoặc cấu trúc tôpô của một họ các đường cong tích phân, một họ các trường vectơ, hay nghiệm của một hệ các phương trình vi phân. Thuật ngữ *rẽ nhánh* (bifurcation) được giới thiệu bởi Henri-Poincaré vào năm 1885. Sự rẽ nhánh có thể xảy ra trên cả hệ phương trình liên tục và rời rạc, khi có một sự thay đổi nhỏ ở một tham số được chọn gọi là tham số rẽ nhánh của hệ làm cho tính chất hay cấu trúc của hệ thay đổi đột ngột.

Lý thuyết rẽ nhánh đã được áp dụng để kết nối các hệ lượng tử với động lực học của các chất trong các hệ thống nguyên tử (Peter et al., 1994; Courtney et al., 1995; Gao et al., 1997), hệ thống phân tử (Founargiotakis et al., 1997), và điốt đường hầm cộng hưởng (Monteiro et al., 2001). Lý thuyết rẽ nhánh cũng đã được áp dụng cho nghiên cứu động lực học laser (Wieczorek et al., 2005). Một số ví dụ lý thuyết khó tiếp cận bằng thực nghiệm như đỉnh đá (Stamatiou et al., 2007) và giếng lượng tử kết hợp (Galan et al., 1999). Lý do chi phối mối liên hệ giữa các hệ lượng tử và phân nhánh trong các phương trình chuyển động cổ điển là tại các điểm rẽ nhánh, dấu vết của các quỹ đạo trở nên lớn, khi Martin Gutzwiller chỉ ra trong tác phẩm kinh điển (Kleppner et al., 2001) về hỗn loạn lượng tử (Gutzwiller et al., 1990). Nhiều loại rẽ nhánh đã được nghiên cứu liên quan đến các liên kết giữa động lực học cổ điển và lượng tử bao gồm rẽ nhánh nút yên ngựa, rẽ nhánh Hopf, rẽ nhánh rốn, rẽ đôi nhân đôi, rẽ nhánh nối tiếp…

Chính vì có nhiều ứng dụng và sự quan trọng của điểm kì dị cùng với sự rẽ nhánh nên nghiên cứu liên quan đến chúng là một chủ đề khá hấp dẫn và cần thiết trong quá trình tìm hiểu một phương trình hay một hệ phương trình vi phân. Trong bài báo này, tác giả giới thiệu sự tồn tại nghiệm và sự rẽ nhánh Hopf đối với hệ phương trình Hindmarsh-Rose. Đây là tiền đề để nghiên cứu sâu hơn về hệ phương trình nổi tiếng được đưa ra vào năm 1980, gọi là *mô hình Hindmarsh-Rose* (Hindmarsh & Rose, 1984), một mô hình được đơn giản hóa từ mô hình nổi tiếng của Hodgkin-Huxley được đưa ra vào năm 1952 (Hodgkin et al., 1952; Nagumo et al., 1962; Izhikevich, 2007; Ermentrout et al., 2009; Keener et al., 2009; Murray, 2010). Mô hình này được tạo thành bởi ba biến x, y và z. Biến đầu tiên là biến nhanh hay biến hoạt náo đại diện cho điện thế màng tế bào. Hai biến còn lại là biến chậm đại diện cho một số đại lượng vật lý phụ thuộc thời gian ví dụ như độ dẫn điện của dòng ion đi ngang qua màng tế bào. Mô hình Hindmarsh-Rose 3D (HR) được cho bởi hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dot{x} = y + ax^2 - x^3 - z + I, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y} = 1 - dx^2 - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = \dot{z} = r\left(s(x - x_1) - z\right), \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $x = x(t)$ tương ứng với điện thế màng tế bào, $y = y(t)$ và $z = z(t)$ tương ứng với độ dẫn điện của dòng ions chậm đi ngang qua màng tế bào, I là dòng điện được đưa vào mô hình từ bên ngoài, a, d, r, s, x_1 là các tham số được chọn từ thực nghiệm.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ VÀ PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Trong phần này, Định lí Hopf (Dang et al., 2000) và Định lí Poincaré-Andronov-Hopf (Dang et al., 2000) được nhắc lại để chứng minh sự tồn tại của sự rẽ nhánh Hopf của hệ phương trình (1) ở mục kế tiếp. Sự rẽ nhánh Hopf có nghĩa là sự chuyển đổi từ điểm kì dị đến đường tròn giới hạn hoặc ngược lại dưới ảnh hưởng của một tham số được chọn, gọi là tham số rẽ nhánh (Dang et al., 2000).

Định lí 2.1 (Định lí Hopf). Cho hệ phương trình vi phân:

$$\begin{cases} \dot{u} = f(u, v, r), \\ \dot{v} = g(u, v, r). \end{cases} \quad (2)$$

Gọi (u^*, v^*) là một điểm kì dị của hệ (2). Nếu ma trận Jacobi của hệ trên tại điểm (u^*, v^*) có hai giá trị riêng phức liên hiệp, $\lambda_{1,2}(r) = \alpha(r) \pm iw(r)$ và tại giá trị $r = r_c$ sao cho:

$$\alpha(r_c) = 0, w(r_c) \neq 0 \text{ và } \frac{\partial \alpha(r)}{\partial r}(r_c) \neq 0,$$

thì tồn tại sự rẽ nhánh Hopf khi tham số a *đi qua giá trị* r_c *và điểm* (u^*, v^*, r_c) *được gọi là điểm rẽ nhánh Hopf. Hơn nữa, gọi* c_1 *là giá trị cho bởi công thức:*

$$c_1 = \frac{1}{16w(r_c)}\left(-\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial^2 F}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 F}{\partial v^2}\frac{\partial^2 G}{\partial v^2}\right) + \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^3} + \frac{\partial^3 F}{\partial u \partial v^2}\frac{\partial^3 G}{\partial u^2 \partial v} + \frac{\partial^3 G}{\partial v^3}\right), \quad (3)$$

trong đó F *và* G *được xác định bởi phương pháp Hassard, Kazarinoff và Wan* (Dang et al., 2000).

Từ Định lí 2.1, nếu gọi $S_e = (x_e, y_e, z_e)$ là điểm kì dị của hệ phương trình (1) thì bằng cách đổi biến số như sau:

$$x_1 = x - x_e, y_1 = y - y_e, z_1 = z - z_e,$$

ta được hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (2ax_e - 3x_e^2)x_1 + y_1 - z_1 + \tilde{F}_1(x_1, y_1, z_1), \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -2dx_e x_1 - y_1 + \tilde{F}_2(x_1, y_1, z_1), \\ \dfrac{dz_1}{dt} = rsx_1 - rz_1 + \tilde{F}_3(x_1, y_1, z_1), \end{cases} \quad (4)$$

trong đó

$$\begin{cases} \tilde{F}_1(x_1, y_1, z_1) = -x_1^3 + (a - 3x_e)x_1^2, \\ \tilde{F}_2(x_1, y_1, z_1) = -dx_1^2, \\ \tilde{F}_3(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{cases}$$

Định lí 2.2 (Định lí Poincaré-Andronov-Hopf). *Nếu ma trận Jacobi* $M(r)$ *của hệ phương trình (1) có hai giá trị riêng phức liên hiệp* $\lambda_{1,2} = a(r) \pm iw(r)$ *và một giá trị riêng thực* λ_3, *sao cho với một giá trị* r_c *nào đó của tham số* r, *hai tính chất sau đây được thỏa mãn:*

$$\alpha(r_c) = 0; \left.\frac{\partial \alpha(r)}{\partial r}\right|_{r=r_c} \neq 0, \quad (5)$$

$$\lambda_3(r_c) < 0, \quad (6)$$

thì (S_e, r_c) *là một điểm rẽ nhánh Hopf, trong đó* S_e *là một điểm kì dị.*

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

3.1. Cách tìm điểm kì dị và xác định tính ổn định của nó đối với mô hình Hindmarsh-Rose 3D

Trong phần này, cách tìm điểm kì dị và xác định tính chất ổn định của nó được trình bày đối với mô hình Hindmarsh-Rose 3D. Nghiên cứu về điểm kì dị và đặc biệt tính ổn định của chúng là một trong những việc quan trọng trong quá trình tìm hiểu về phương trình hay hệ phương trình vi phân. Trong toán học, điểm kì dị là một phần tử trong miền xác định sao cho ảnh của nó cũng là chính nó. Trong bài nghiên cứu này, điểm kì dị của hệ phương trình (1) được xác định bởi việc giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 0 = y + ax^2 - x^3 - z + I, \\ y = 1 - dx^2, \\ z = s(x - x_1), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x^3 + (d - a)x^2 + sx - sx_1 - I - 1 = 0.$$

Để giải phương trình trên cần sử dụng công thức Cardan sau một vài phép đổi biến số như sau:

$$\begin{cases} x = \xi + \dfrac{a-d}{3}, \\ p = s - \dfrac{(a-d)^2}{3}, \\ q = -\dfrac{2(a-d)^3}{27} + \dfrac{s(a-d)}{3} - sx_1 - I - 1. \end{cases} \quad (7)$$

Khi đó,

$$\xi^3 + p\xi - q = 0. \quad (8)$$

Đặt

$$\Delta_1 = 4p^3 + 27q^2. \quad (9)$$

Nếu $\Delta_1 > 0$ thì phương trình (8) có một nghiệm duy nhất và do đó hệ (1) có duy nhất một điểm kì dị. Nếu $\Delta_1 = 0$ thì (1) có 2 điểm kì dị, và nếu $\Delta_1 < 0$ thì (1) có 3 điểm kì dị.

Cụ thể hơn, nếu $4p^3 + 27q^2 > 0$ thì phương trình (8) có một nghiệm duy nhất. Do đó, nếu chúng ta giải phương trình (8) trong trường hợp này, cùng với các kí hiệu trong (7), thì hệ phương trình (1) có duy nhất một điểm kì dị $S_e = (x_e, y_e, z_e)$, trong đó

$$x_e = \left(-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{a-d}{3},$$

$$y_e = 1 - d\left(-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\left(-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} - \frac{a-d}{3}\right)^2,$$

$$z_e = b\left(\left(-\frac{q}{2} + \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(-\frac{q}{2} - \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} + \frac{a-d}{3} - c\right).$$

Như vậy, nghiệm kì kị của mô hình HR đã được tìm. Cách xác định tính ổn định của điểm kì dị này đối với mô hình HR cũng đã được trình bày. Để làm được điều này, cách xác định các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận Jacobi tại điểm kì dị đối với mô hình đã được giới thiệu ở phần nghiên cứu (1) như sau:

Giả sử $S_i = (x_i, y_i, z_i)$ là các điểm kì dị của hệ phương trình HR 3D (1).

Để kiểm tra tính chất của các điểm kì dị này thì ma trận Jacobi của hệ phương trình (1) tại các điểm kì dị này cần được xây dựng như sau:

$$J_{S_i} = \begin{pmatrix} 2ax_i - 3x_i^2 & 1 & -1 \\ -2dx_i & -1 & 0 \\ rs & 0 & -r \end{pmatrix}.$$

Các giá trị riêng của ma trận Jacobi trên là nghiệm của phương trình đặc trưng sau:

$$\lambda^3 + U_i\lambda^2 + V_i\lambda + W_i = 0,$$

trong đó

$$\begin{cases} U_i = 3x_i^2 - 2ax_i + 1 + r, \\ V_i = 3x_i^2(1+r) + 2x_i(d - a - ar) + r(1+s), \\ W_i = r(3x_i^2 + 2x_i(d-a) + s). \end{cases} \quad (10)$$

Để tìm nghiệm của phương trình trên, ta sử dụng công thức Cardan. Biến số $\lambda = v - \frac{U_i}{3}$ được đổi để đưa phương trình đặc trưng trên về dạng sau:

$$v^3 + \rho_i v + \gamma_i = 0,$$

trong đó

$$\begin{cases} \rho_i = V_i - \dfrac{U_i^2}{3}, \\ \gamma_i = \dfrac{2U_i^3}{27} - \dfrac{V_iU_i}{3} + W_i. \end{cases} \quad (11)$$

Dấu của biệt thức $\Delta_2 = 4\rho_i^3 + 27\gamma_i^2$ cho biết số giá trị riêng thực của ma trận Jacobi. Giả sử $\lambda_{i,j}(i, j = 1,2,3)$ là các giá trị riêng của ma trận Jacobi tại các điểm kì dị $S_i = (x_i, y_i, z_i)$.

Để xác định các vectơ riêng $u_{i,j}(i, j = 1,2,3)$ tương ứng với các giá trị riêng $\lambda_{i,j}(i, j = 1,2,3)$,

cần xác định tọa độ $u_{i,j} = \left(u_{i,j}^1, u_{i,j}^2, u_{i,j}^3\right)^T$ với điều kiện thỏa mãn là:

$$J_{f,i}u_{i,j} = \lambda_{i,j}u_{i,j} \Leftrightarrow \left(J_{f,i} - \lambda_{i,j}I_3\right)u_{i,j} = 0,$$

trong đó ma trận $J_{f,i} - \lambda_{i,j}I_3$ được xác định như sau:

$$J_{f,i} - \lambda_{i,j}I_3 = \begin{pmatrix} 2ax_i - 3x_i^2 - \lambda_{i,j} & 1 & -1 \\ -2dx_i & -1-\lambda_{i,j} & 0 \\ rs & 0 & -r-\lambda_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Gọi các giá trị riêng của ma trận jacoban $J_{f,i}$ là $\lambda_{i,1}, \lambda_{i,2}, \lambda_{i,3}$. Với mỗi bộ ba giá trị riêng này, ta gọi các vectơ riêng tương ứng là $u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3}$. Đặt:

$$\begin{cases} r_{i,j} = 2ax_i - 3x_i^2 - \lambda_{i,j}, \\ s_{i,j} = -2dx_i, \\ t_{i,j} = -1 - \lambda_{i,j}, \\ v_{i,j} = rb, \\ w_{i,j} = -r - \lambda_{i,j}. \end{cases}$$

Từ đó, ta suy ra được hệ phương trình sau đây:

$$\begin{cases} r_{i,j}u_{i,1} + u_{i,2} - u_{i,3} = 0, \\ s_{i,j}u_{i,1} + t_{i,j}u_{i,2} = 0, \\ v_{i,j}u_{i,1} + w_{i,j}u_{i,3} = 0, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r_{i,j}t_{i,j}w_{i,j}u_{i,1} - w_{i,j}s_{i,j}u_{i,1} + t_{i,j}v_{i,j}u_{i,1} = 0, \\ t_{i,j}u_{i,2} = -s_{i,j}u_{i,1}, \\ w_{i,j}u_{i,3} = -v_{i,j}u_{i,1}. \end{cases}$$

Khi đó,

$$\begin{cases} \left(r_{i,j}t_{i,j}w_{i,j} - w_{i,j}s_{i,j} + t_{i,j}v_{i,j}\right)u_{i,1} = 0, \\ u_{i,2} = -\dfrac{s_{i,j}}{t_{i,j}}u_{i,1}, \\ u_{i,3} = -\dfrac{v_{i,j}}{w_{i,j}}u_{i,1}. \end{cases}$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned} r_{i,j}t_{i,j}w_{i,j} - w_{i,j}s_{i,j} + t_{i,j}v_{i,j} = \\ (2ax_e - 3x_e^2 - \lambda_i)(-1-\lambda_i)(-r-\lambda_i) \\ -(-2dx_e)(-r-\lambda_i) + rb(-1-\lambda_i). \end{aligned}$$

Đây chính là đa thức đặc trưng. Do đó, với mọi $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} u_{i,j}^1 = t, \\ u_{i,j}^2 = -\dfrac{s_{i,j}}{t_{i,j}}t, \\ u_{i,j}^3 = -\dfrac{v_{i,j}}{w_{i,j}}t. \end{cases}$$

Như vậy, cách xác định các giá trị riêng và vectơ riêng của ma trận Jacobi tại điểm kì dị đối với mô hình HR đã được trình bày trong nội dung nghiên cứu. Tiếp theo, để xác định tính ổn định của điểm kì dị này, các giá trị của các tham số trong mô hình HR được cố định như sau (Ermentrout et al., 2009):

$$a = 3, d = 5, r = 0.001,$$
$$s = 4, x_1 = -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Khi đó, hệ phương trình (1) trở thành:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + 3x^2 - x^3 - z + I, \\ \dfrac{dy}{dt} = 1 - 5x^2 - y, \\ \dfrac{dz}{dt} = 0.001\left(4(x + \dfrac{1}{2}(1+\sqrt{5})) - z\right). \end{cases} \quad (12)$$

Các điểm kì dị của hệ phương trình (12) được tìm bằng phương pháp như đã trình bày và bằng cách sử dụng những kí hiệu như trên ta thu được:

$$4p^3 + 27q^2 \approx 76.443755 > 0.$$

Điều này suy ra sự tồn tại và duy nhất của điểm kì dị của hệ phương trình (12), gọi là $M_e = (x_e, y_e, z_e)$, trong đó

$$\begin{cases} x_e = -0.722126, \\ y_e = -1.607329, \\ z_e = 3.583632. \end{cases}$$

Ma trận Jacobi tại điểm M_e được xác định như sau:

$$J_{M_e} = \begin{pmatrix} 6x_e - 3x_e^2 & 1 & -1 \\ -10x_e & -1 & 0 \\ 0.004 & 0 & -0.001 \end{pmatrix}.$$

Các giá trị riêng của ma trận Jacobi này là nghiệm của phương trình đặc trưng sau:

$$\lambda^3 + 6.898153\lambda^2 - 1.313209\lambda + 0.002676 = 0.$$

Ta gọi các giá trị riêng là:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 0.183381, \\ \lambda_2 = -7.083594, \\ \lambda_3 = 0.00206. \end{cases}$$

Do đó, điểm kì dị của hệ phương trình (12) là nút có miền đa tạp 2 chiều không ổn định và miền đa tạp 1 chiều ổn định.

3.2. Sự rẽ nhánh Hopf

Định lí 2.2 cho phép chúng ta phát biểu được Định lí sau đây, giúp chỉ ra sự tồn tại điểm rẽ nhánh của mô hình HR (1).

Định lí 3.1. *Cùng với các kí hiệu như trong (17), (19), (20), nếu hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

$$4\rho^3 + 27\sigma^2 > 0, \tag{13}$$

$$\frac{2}{3}(a-d) < x_e < 0, \tag{14}$$

thì hệ phương trình (1) sẽ có sự rẽ nhánh Hopf tại điểm kì dị của nó khi tham số r đi qua điểm r_c, trong đó:

$$r_c = \frac{-\left(\left(1-m_{11}\right)^2 - m_{11}s\right) + \Delta^{\frac{1}{2}}}{2\left(1-m_{11}+s\right)}, \tag{16}$$

với

$$m_{11} = 2ax_e - 3x_e^2; m_{21} = -2dx_e;$$

$$\Delta = \left[\left(1-m_{11}\right)^2 - m_{11}s\right]^2 + 4(1-m_{11}+s)(m_{11}+m_{21})(1-m_{11}).$$

Chứng minh.

Ma trận Jacobi $M(r)$ của hệ phương trình (1) được xác định như sau:

$$M(r) = (m_{i,j})_{1\le i,j\le 3} = \begin{pmatrix} 2ax_e - 3x_e^2 & 1 & -1 \\ -2dx_e & -1 & 0 \\ rs & 0 & -r \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Đa thức đặc trưng tương ứng được cho bởi phương trình sau:

$$f(\lambda(r)) = \lambda^3(r) + P(r)\lambda^2(r) + Q(r)\lambda(r) + R(r), \tag{16}$$

trong đó

$$\begin{cases} P(r) = 1 - m_{11} + r, \\ Q(r) = (1-m_{11}+s)r - m_{11} - m_{21}, \\ R(r) = r(s - m_{11} - m_{21}). \end{cases} \tag{17}$$

Đặt

$$\begin{cases} \lambda(r) = v(r) - \dfrac{P(r)}{3}, \\ \rho(r) = Q(r) - \dfrac{P^2(r)}{3}, \\ \sigma(r) = \dfrac{2P^3(r)}{27} - \dfrac{P(r)Q(r)}{3} + R(r). \end{cases} \tag{18}$$

Khi đó, phương trình (16) trở thành $v^3(r) + \rho(r)v(r) + \sigma(r) = 0$, cho ta các giá trị riêng của ma trận jacoban $M(r)$.

Dấu của biểu thức $4\rho^3(r) + 27\sigma^2(r)$ cho biết số giá trị riêng thực và phức của ma trận Jacobi. Nếu $4\rho^3(r) + 27\sigma^2(r) > 0$ hay nói khác hơn là điều kiện (13) được xác định thì ma trận Jacobi $M(r)$ có hai giá trị riêng phức $\lambda_{1,2}(r) = \alpha(r) \pm iw(r)$ và một giá trị riêng thực $\lambda_3(r)$.

Bây giờ ta chứng minh sự tồn tại của một giá trị r_c của tham số r sao cho điều kiện (11) được thỏa mãn.

Từ (15), (16), (17) mối quan hệ giữa các nghiệm và các hệ số của đa thức đặc trưng được cho bởi các công thức sau:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(r)+\lambda_2(r)+\lambda_3(r)=-P(r)\\
&\Rightarrow 2\alpha(r)+\lambda_3(r)=-P(r),\\
&\lambda_1(r)\lambda_2(r)+\lambda_1(r)\lambda_3(r)+\lambda_2(r)\lambda_3(r)=Q(r)\\
&\Rightarrow \alpha^2(r)+w^2(r)+2\alpha(r)\lambda_3=Q(r),\\
&\lambda_1(r)\lambda_2(r)\lambda_3(r)=-R(r)\\
&\Rightarrow \left(\alpha^2(r)+w^2(r)\right)\lambda_3(r)=-R(r).
\end{aligned}$$

Khi $r=r_c$ đẳng thức $\alpha(r_c)=0$ cho ta các công thức sau:

$$\begin{cases}\lambda_3(r_c)=-P(r_c),\\ w^2(r_c)=Q(r_c),\\ w^2(r_c)\lambda_3(r_c)=-R(r_c).\end{cases} \tag{19}$$

Do đó,

$$P(r_c)Q(r_c)=R(r_c) \tag{20}$$

Phương trình (20) có thể được viết như sau:

$$\begin{aligned}(1-m_{11}+r)\left((1-m_{11}+s)r-m_{11}-m_{21}\right)&=\\ =r(s-m_{11}-m_{21})&\end{aligned}$$

Hay có thể viết như sau:

$$\begin{aligned}(1-m_{11}+s)r_c^2+\left[(1-m_{11})^2-m_{11}s\right]r_c&\\ -(m_{11}+m_{21})(1-m_{11})=0.&\end{aligned}$$

Từ phương trình trên, biệt thức được tính như sau:

$$\begin{aligned}\Delta=&\left[(1-m_{11})^2-m_{11}s\right]^2\\ &+4(1-m_{11}+s)(m_{11}+m_{21})(1-m_{11}).\end{aligned}$$

Đa thức đặc trưng có 2 nghiệm thực $r_{1,2}$ nếu $\Delta>0$, tức là:

$$\begin{aligned}&\left[(1-m_{11})^2-m_{11}s\right]^2\\ &\quad+4(1-m_{11}+s)(m_{11}+m_{21})(1-m_{11})>0.\end{aligned}$$

Nếu

$$\left[(1-m_{11})^2-m_{11}s\right]^2>0$$

và $4(1-m_{11}+s)(m_{11}+m_{21})(1-m_{11})>0$ thì $\Delta>0$. Điều kiện thứ nhất thì luôn được thỏa mãn, điều kiện thứ hai được thỏa mãn nếu tất cả các nhân tử là dương.

Ta biết rằng

$$m_{11}=2ax_e-3x_e^2=x_e(2a-3x_e).$$

Nếu $x_e<0$ thì $-3x_e>0$ và do đó $2a-3x_e>0$ vì $a>0$, do đó trong trường hợp này ta có $m_{11}<0$. Nếu $m_{11}<0$ thì $1-m_{11}>0$ và $1-m_{11}+s>0$ vì $s>0$. Do đó, với điều kiện $x_e<0$ thì có 2 nhân tử dương. Bây giờ, chỉ còn tìm điều kiện để $m_{11}+m_{21}>0$. Ta thấy rằng:

$$\begin{aligned}m_{11}+m_{21}&=2ax_e-3x_e^2-2dx_e\\ &=x_e(2a-3x_e-2d).\end{aligned}$$

Nếu $x_e<0$ thì điều kiện cần là $2a-3x_e-2d<0$ tức là $2(a-d)<3x_e$.

Do đó, nếu

$$\frac{2(a-d)}{3}<x_e<0$$

thì $m_{11}+m_{21}>0$.

Khi đó,

$$4(1-m_{11}+s)(m_{11}+m_{21})(1-m_{11})>0.$$

Như vậy, nếu điều kiện (15) được thỏa mãn thì phương trình (21) có 2 nghiệm là:

$$r_{1,2}=\frac{-\left((1-m_{11})^2-m_{11}s\right)\pm\Delta^{\frac{1}{2}}}{2(1-m_{11}+s)}.$$

Ngoài ra, với những điều kiện trên, ta có $m_{11} < 0$ do đó $2(1 - m_{11} + s) > 0$. Như vậy, dấu của $r_{1,2}$ cũng chính là dấu của $-\left((1-m_{11})^2 - m_{11}s\right) \pm \Delta^{\frac{1}{2}}$.

Ta thấy, $(1-m_{11})^2 > 0$ và $m_{11}s < 0$ do đó $-\left((1-m_{11})^2 - m_{11}s\right) < 0$.

Hơn nữa,

$$\Delta = \left((1-m_{11})^2 - m_{11}s\right)^2 + 4(1-m_{11}+s)(m_{11}+m_{21})(1-m_{11})$$

và

$4(1-m_{11}+s)(m_{11}+m_{21})(1-m_{11}) > 0$, do đó $\sqrt{\Delta} > (1-m_{11})^2 - m_{11}s$.

Do vậy, $-\left((1-m_{11})^2 - m_{11}s\right) + \sqrt{\Delta} > 0$ và $-\left((1-m_{11})^2 - m_{11}s\right) - \sqrt{\Delta} < 0$.

Từ đó, ta có $r_c > 0$ và $r_2 < 0$.

Hơn nữa, nếu $x_e < 0$ thì $m_{11} < 0$ và do đó $P(r_c) > 0$. Điều này dẫn đến $\lambda_3(r) < 0$ và điều kện (12) được xác định.

Nhắc lại, đa thức đặc trưng của ma trận jacoban được cho bởi công thức sau:

$$f(\lambda(r)) = \lambda(r)^3 + P(r)\lambda(r)^2 + Q(r)\lambda(r) + R(r).$$

Lấy đạo hàm theo r thu được:

$$\frac{\partial f(r)}{\partial r} = 3\lambda(r)^2 \frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} + \frac{\partial P(r)}{\partial r}\lambda(r)^2 + 2P(r)\lambda(r)\frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} + \frac{\partial Q(r)}{\partial r}\lambda(r) + Q(r)\frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} + \frac{\partial R(r)}{\partial r}.$$

Ngoài ra, $\lambda(r) = \alpha(r) + iw(r)$, do đó $\frac{\partial \lambda(r)}{\partial r} = \frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} + i\frac{\partial w(r)}{\partial r}$.

Từ đó, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(r)}{\partial r} &= 3(\alpha(r)+iw(r))^2\left(\frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} + i\frac{\partial w(r)}{\partial r}\right) \\ &+ \frac{\partial P(r)}{\partial r}(\alpha(r)+iw(r))^2 + 2P(r)(\alpha(r) \\ &+ iw(r))\left(\frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} + i\frac{\partial w(r)}{\partial r}\right) \\ &+ \frac{\partial Q(r)}{\partial r}(\alpha(r)+iw(r)) \\ &+ Q(r)\left(\frac{\partial \alpha(r)}{\partial r} + i\frac{\partial w(r)}{\partial r}\right) + \frac{\partial R(r)}{\partial r}.\end{aligned}$$

Ngoài ra, r_c thỏa $\alpha(r_c) = 0$. Do đó,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(r_c)}{\partial r} &= -3w(r_c)^2\left(\frac{\partial \alpha(r_c)}{\partial r} + i\frac{\partial w(r_c)}{\partial r}\right) \\ &- \frac{\partial P(r_c)}{\partial r}w(r_c)^2 \\ &+ 2P(r_c)iw(r_c)\left(\frac{\partial \alpha(r_c)}{\partial r} + i\frac{\partial w(r_c)}{\partial r}\right) \\ &+ \frac{\partial Q(r_c)}{\partial r}iw(r_c) \\ &+ Q(r_c)\left(\frac{\partial \alpha(r_c)}{\partial r} + i\frac{\partial w(r_c)}{\partial r}\right) + \frac{\partial R(r_c)}{\partial r}.\end{aligned}$$

Ta biết rằng $w(r_c)^2 = Q(r_c)$, khi đó phương trình $\frac{\partial f(r_c)}{\partial r} = 0$ cho kết quả sau:

$$\begin{cases} 2Q(r_c)\dfrac{\partial \alpha(r_c)}{\partial r} = \dfrac{\partial R(r_c)}{\partial r} - \dfrac{\partial P(r_c)}{\partial r}Q(r_c) \\ \qquad\qquad - 2P(r_c)w(r_c)\dfrac{\partial w(r_c)}{\partial r} \\ 2w(r_c)\dfrac{\partial w(r_c)}{\partial r} = 2\dfrac{\partial \alpha(r_c)}{\partial r}P(r_c) + \dfrac{\partial Q(r_c)}{\partial r} \end{cases}$$

Suy ra

$$\frac{\partial \alpha(r_c)}{\partial r} = \frac{\dfrac{\partial R(r_c)}{\partial r} - \dfrac{\partial P(r_c)}{\partial r}Q(r_c) - P(r_c)\dfrac{\partial Q(r_c)}{\partial r}}{2\left(Q(r_c) + P(r_c)^2\right)}.$$

Khi đó, dấu của $\dfrac{\partial \alpha(r_c)}{\partial r}$ chính là dấu của phần tử số

$$\frac{\partial R(r_c)}{\partial r} - \frac{\partial P(r_c)}{\partial r} Q(r_c) - P(r_c)\frac{\partial Q(r_c)}{\partial r}.$$

Ta có:

$$\begin{cases} P(r) = 1 - m_{11} + r, \\ Q(r) = (1 - m_{11} + s)r - m_{11} - m_{21}, \\ R(r) = r(s - m_{11} - m_{21}). \end{cases}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(r_c)}{\partial r} - \frac{\partial P(r_c)}{\partial r} Q(r_c) - P(r_c)\frac{\partial Q(r_c)}{\partial r} = \\ = s - m_{11} - m_{21} \\ - \left((1 - m_{11} + s)r - m_{11} - m_{21}\right) \\ - (1 - m_{11} + r)(1 - m_{11} + s) \\ = -(1 - m_{11})^2 - 2r(1 + s) \\ + m_{11}(s + 2r) < 0, \end{aligned}$$

vì $s > 0, r > 0$ và $m_{11} < 0$ bởi các điều kiện đã được giới thiệu ở trên.

Từ đó, nếu $4r^3 + 27s^2 > 0$ và $\frac{2}{3}(a - d) < x_e < 0$ thì (S_e, r_c) là một điểm rẽ nhánh của hệ phương trình (8).

Nhận xét 3.4. Kết quả của Định lí 3.3 đã chỉ ra được rằng hệ phương trình (1) có sự rẽ nhánh Hopf tại điểm kì dị của nó. Đây là một kết quả mới được thực hiện trên mô hình HR và còn là sự cải tiến, nâng cao so với kết quả có được trước đó trên mô hình Hindmarsh-Rose 2D (Phan, 2020). Ở bài báo (Phan, 2020), ta giả nghiên cứu điểm kì dị và sự rẽ nhánh Hopf trên mô hình Hindmarsh-Rose 2D, kết quả đạt được khá dễ so với nghiên cứu này. Hơn nữa, mô hình HR có những tính chất mà mô hình Hindmarsh-Rose 2D không có được, chẳng hạn như tính chất bùng nổ (bursting). Tính chất này có thể tìm thấy được ở những động vật có bệnh về tim mạch (Keener et al., 2009; Murray, 2010). Do đó, việc nghiên cứu điểm kì dị và sự rẽ nhánh Hopf giúp hiểu rõ hơn về đặc tính của mô hình HR . Đây là tiền đề để đi đến những nghiên cứu sâu hơn, chẳng hạn nghiên cứu về tính ổn định và sự cộng hưởng của một mạng lưới được tạo thành từ những mô hình HR .

4. KẾT LUẬN

Điều kiện cần cho các tham số của mô hình Hindmarsh-Rose được đưa ra sao cho tồn tại một điểm kì dị ổn định, đại diện cho trạng thái nghỉ của hệ phương trình. Tham số r được chọn làm tham số rẽ nhánh, khi tham số này đạt đến một giá trị cần thiết thì điểm kì dị mất đi tính ổn định của nó và trở thành đường tròn giới hạn, nghĩa là sự rẽ nhánh Hopf đã xảy ra. Hướng nghiên cứu tiếp theo sẽ tập trung vào tính chất Chaos của mô hình Hindmarsh-Rose bởi sự tác động của một vài tham số gây nhiễu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO (REFERENCES)

Courtney, M., Jiao, H., Spellmeyer, N., Kleppner, D., Gao, J., & Delos, J. B. (1995). Closed Orbit Bifurcations in Continuum Stark Spectra. *Phys. Rev. Lett.* ,*74*(9), 1538–1541. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.1538

Dang, V. H., & Delcarte, C. (2000). *Bifurcations and Chaos, an introduction to dynamics contemporary with programs in Pascal, Fortan et Mathematica*. Eds Elipses, Université – Mécanique (in french).

Ermentrout, G. B., & Terman, D. H. (2009). *Mathematical Foundations of Neurosciences*. Springer.

Founargiotakis, M., Farantos, S. C., Skokos, Ch., & Contopoulos, G. (1997). Bifurcation diagrams of periodic orbits for unbound molecular systems: FH2. *Chemical Physics Letters*, *277*(5–6), 456–464. https://doi.org/10.1016/S0009-2614(97)00931-7

Gao, J., & Delos, J. B. (1997). Quantum manifestations of bifurcations of closed orbits in the photoabsorption spectra of atoms in electric fields. *Phys. Rev. A.*, *56*(1), 356–364. https://doi.org/10.1103/PhysRevA.56.356

Galan, J., & Freire, E. (1999). Chaos in a Mean Field Model of Coupled Quantum Wells; Bifurcations of Periodic Orbits in a Symmetric Hamiltonian System. *Reports on Mathematical Physics*, *44*(1–2), 87–94. https://doi.org/10.1016/S0034-4877(99)80148-7

Gutzwiller, M. C. (1990). *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*. New York: Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-97173-5.

Hindmarsh, J. L., & Rose, R. M. (1984). A model of neuronal bursting using three coupledfirst order differential equations. *Proc. R. Sc. Lond. B221*, 87-102.

Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol*, 117, 500-544. https://doi.org/10.1113/jphysiol.1952.sp004764

Izhikevich, E. M. (2007). *Dynamical Systems in Neuroscience.* The MIT Press.

Keener, J. P., & Sneyd, J. (2009). *Mathematical Physiology*. Springer.

Kleppner, D., & Delos, J. B. (2001). Beyond quantum mechanics: Insights from the work of Martin Gutzwiller. *Foundations of Physics, 31*(4), 593–612. https://doi.org/10.1023/A:1017512925106

Murray, J. D. (2010). *Mathematical Biology*. Springer.

Monteiro, T. S., & Saraga, D. S. (2001). Quantum Wells in Tilted Fields: Semiclassical Amplitudes and Phase Coherence Times. *Foundations of Physics, 31*(2), 355–370. https://doi.org/10.1023/A:1017546721313

Nagumo, J., Arimoto, S., & Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, 50, 2061-2070. https://doi.org/10.1109/JRPROC.1962.288235

Peters, A. D., Jaffé, C., & Delos, J. B. (1994). Quantum Manifestations of Bifurcations of Classical Orbits: An Exactly Solvable Model. *Phys. Rev. Lett*, *73*(21), 2825–2828. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.73.2825

Phan V. L. E. (2020). A study of fixed points and Hopf biurcation of Hindmarsh-Rose model. *Thu Dau Mot University Journal of Science*, *2*(1), 98-109. https://doi.org/10.37550/tdmu.EJS/2020.01.002

Stamatiou, G., & Ghikas, D. P. K. (2007). Quantum entanglement dependence on bifurcations and scars in non-autonomous systems. The case of quantum kicked top. *Physics Letters A*, *368* (3–4), 206–214. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2007.04.003

Wieczorek, S., Krauskopf, B., Simpson, T. B., & Lenstra, D. (2005). The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers. *Physics Reports*, *416*(1–2), 1–128. https://doi.org/10.1016/j.physrep.2005.06.003