



DOI:10.22144/ctujos.2025.030

# PHÂN TÍCH ĐỘNG LỰC HỌC CỦA HỆ THANH KHÔNG GIAN BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐỘ CỨNG ĐỘNG LỰC CÓ XÉT ĐẾN ẢNH HƯỞNG CỦA LỰC NÉN DỌC TRỰC

Lê Tuấn Tú\*, Trần Thị Phương và Nguyễn Lê Kim Ngọc  
 Trường Đại học Cần Thơ, Việt Nam

\*Tác giả liên hệ (Corresponding author): lttu@ctu.edu.vn

## Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 06/08/2024

Sửa bài (Revised): 26/08/2024

Duyệt đăng (Accepted): 17/11/2024

**Title:** Dynamic analysis of space frame system using dynamic stiffness method considering the effect of axial compressive forces

**Author(s):** Le Tuan Tu\*, Tran Thi Phuong and Nguyen Le Kim Ngoc

**Affiliation(s):** Can Tho University, Viet Nam

## TÓM TẮT

Mục tiêu của nghiên cứu là phân tích động lực học của hệ thanh không gian bằng phương pháp độ cứng động lực. Cách xây dựng các ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh thẳng chịu lực dọc trục, chịu xoắn và chịu uốn có xét đến ảnh hưởng của lực dọc nén trong thanh được trình bày trong nghiên cứu. Các ma trận trên được sử dụng để xây dựng ma trận độ cứng động lực cho phần tử thanh chịu lực tổng quát và ứng dụng nó vào việc phân tích động lực học của hệ thanh không gian. Điều này bao gồm việc tìm tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng, phân tích chuyển vị của kết cấu khi chịu tải trọng động dạng điều hòa. Các kết quả tính toán của phương pháp độ cứng động lực được so sánh với các kết quả của phương pháp phần tử hữu hạn cho thấy độ chính xác của phương pháp độ cứng động lực.

**Từ khóa:** Dao động, khung không gian, ma trận độ cứng động lực, ma trận độ cứng hình học, tần số dao động riêng

## ABSTRACT

The main purpose of the study is to analyze the dynamics of space frames using the dynamic stiffness matrix method. The research presents the construction of dynamic stiffness matrices for straight frame elements subjected to axial force, torsion, and bending, taking into account the effect of the axial compressive force on the frame. These matrices are used to develop the dynamic stiffness matrix for generalized frame elements and apply it to the dynamic analysis of space frame systems, including determining natural frequencies and mode shapes, as well as analyzing structural displacements under harmonic dynamic loading. A comparison of the results obtained using the dynamic stiffness matrix method with those obtained using the finite element method demonstrates the accuracy of the dynamic stiffness matrix method.

**Keywords:** Dynamic stiffness matrix, geometry stiffness matrix, natural frequencies, space frame, vibration

### 1. GIỚI THIỆU

Dao động riêng của công trình, với hai đặc trưng là tần số dao động riêng và dạng dao động riêng, đó là những đặc trưng động học quan trọng trong thiết kế và phân tích kết cấu công trình. Việc các tần số dao động riêng và dạng dao động của công trình được xác định chính xác giúp các kỹ sư thiết kế các công trình an toàn hơn và bền vững hơn trước các tác động động lực.

Phương pháp phần tử hữu hạn (FEM) là một công cụ rất mạnh mẽ và linh hoạt trong việc phân tích kết cấu, nó đã được phát triển nhanh chóng và ứng dụng giải quyết rất nhiều bài toán cơ học. Tuy nhiên, FEM có một nhược điểm trong bài toán phân tích động lực học của kết cấu: FEM sử dụng hàm dạng là trường chuyển vị tĩnh để xấp xỉ chuyển vị của kết cấu, bỏ qua yếu tố động lực khi mô tả ứng xử của kết cấu trong các bài toán động lực học tổng quát. Do đó để đạt độ chính xác mong muốn, FEM cần phải rời rạc kết cấu thành nhiều phần tử nhỏ.

Từ các vấn đề vừa nêu, một phương pháp có thể khắc phục được nhược điểm trên của FEM đã được phát triển, đó là phương pháp độ cứng động lực (Dynamic Stiffness Method – DSM). DSM được ra đời với mục đích chính là sử dụng hàm dạng của phần tử hữu hạn sao cho trường chuyển vị động của nó thỏa mãn phương trình cân bằng động. Điều này giúp tăng độ chính xác trong phân tích dao động của kết cấu.

Một nghiên cứu gần đây của Kumar and Jana (2023) đã áp dụng DSM để phân tích chính xác dao động của các tấm hình chữ nhật biến đổi theo hàm sigmoid đặt trên nền đàn hồi. Kết quả từ nghiên cứu này cho thấy độ chính xác của phương pháp trong việc xử lý các sự biến đổi phức tạp về vật liệu và tương tác với nền móng. Trước đó, Banerjee (2003) đã sử dụng DSM để phân tích dao động tự do của dầm sandwich, bao gồm các lớp mặt ngoài cứng và lớp lõi nhẹ. Ngoài ra, Banerjee and Williams (1992) đã nghiên cứu ứng dụng DSM để phân tích dầm Timoshenko chịu đồng thời uốn và xoắn. Các nghiên cứu trong nước gồm có Tran (2005) đã xây dựng ma trận độ cứng động lực và vector tải trọng nút của phần tử dầm chịu uốn và xoắn quát. Bên cạnh đó, Do (2008) sử dụng phương pháp DSM để phân tích tần số dao động riêng của các hệ thanh phẳng. Ngoài ra, (Le et al., 2021) cũng đã phân tích tìm tần số dao động riêng của hệ thanh không gian bằng DSM. Việc áp dụng phương pháp DSM vào phân tích động lực học của hệ thanh không gian, bao gồm xác định tần số và các dạng dao động riêng của kết cấu, cũng như phân tích chuyển vị của kết cấu khi

chịu tải trọng động dạng điều hòa, đã được trình bày trong bài nghiên cứu. Các kết quả trong nghiên cứu được xét trong hai trường hợp: có xét và không xét ảnh hưởng của lực dọc nén trong thanh đến kết quả phân tích.

Ma trận độ cứng động lực trong hệ tọa độ địa phương trong trường hợp không cần có dạng (Tran, 2005):

$$D(\omega) = K(\omega) - \omega^2 M(\omega) \tag{1}$$

Trong đó,  $K(\omega)$  và  $M(\omega)$  lần lượt là ma trận độ cứng và ma trận khối lượng của phần tử, chúng phụ thuộc vào các đặc trưng hình học, vật liệu của phần tử và tần số tải tác động  $\omega$ .

Bài toán xác định tần số dao động riêng của kết cấu trong phương pháp độ cứng động lực (DSM) là một bài toán trị riêng phi tuyến (Non-Linear Eigenproblem). Trong trường hợp không cần và có xét đến ảnh hưởng của lực dọc nén, bài toán trị riêng phi tuyến này có dạng:

$$[D(\omega) - D_G(\omega)]\{q\} = \{0\} \tag{2}$$

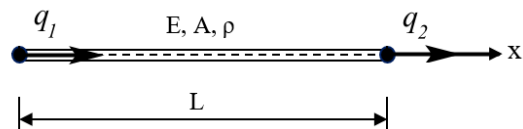
Trong đó,  $[D(\omega)]$  là ma trận độ cứng động lực,  $D_G(\omega)$  là ma trận độ cứng hình học,  $\{q\}$  là vector chuyển vị nút của kết cấu.

### 2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Đầu tiên, các ma trận độ cứng động lực, ma trận độ cứng hình học của các phần tử chịu lực dọc trục, xoắn và chịu uốn được xây dựng. Tiếp theo, các ma trận trên được ghép nối để tạo ma trận độ cứng động lực, ma trận độ cứng hình học cho phần tử thanh không gian. Cũng trong phần này, giải thuật Wittrick – Williams dùng để xác định tần số dao động riêng của kết cấu được trình bày.

#### 2.1. Thanh chịu lực dọc trục

Xét một phần tử thanh thẳng chịu lực dọc trục như Hình 1.



Hình 1. Phần tử chịu lực dọc trục

Ma độ cứng động lực của phần tử thanh chịu lực dọc trục (Le et al., 2021):

$$D^A(\omega) = \frac{EA}{L} \frac{\psi}{\sin\psi} \begin{bmatrix} \cos\psi & -1 \\ -1 & \cos\psi \end{bmatrix} \tag{3}$$

với:  $\psi$  là tham số động lực của thanh chịu lực dọc trục,

$$\psi = \omega L \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (4)$$

Ma trận độ cứng hình học của phần tử thanh chịu kéo nén:

Theo phương pháp phần tử hữu hạn, các thành phần của ma trận độ cứng hình học của phần tử thanh chịu lực dọc trục được xác định như sau:

$$D_{Gij} = \int_0^L N(x) N_i'(x) N_j'(x) dx \quad (5)$$

Trong đó:  $N(x)$  là lực dọc của phần tử,

$N_i, N_j$  là các hàm dạng thứ  $i$  và  $j$ .

Theo (Le et al., 2021), vector hàm dạng của thanh chịu lực dọc trục:

$$N = \left[ \cos\psi\xi - \cot g\psi \cdot \sin\psi\xi, \frac{\sin\psi\xi}{\sin\psi} \right]$$

Trong đó:  $\xi$  là tham số chiều dài không thứ nguyên của thanh,  $\xi = x/L$ .

Nếu phần tử có lực dọc là hằng số  $N(x) = N$ , ta tích phân (5) thu được ma trận độ cứng hình học của phần tử:

$$D_G^A(\omega) = \frac{N}{2L} \frac{\psi}{\sin^2\psi} \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_2 & A_1 \end{bmatrix} \quad (6)$$

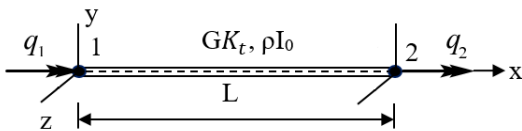
Với  $A_1 = \cos\psi\sin\psi + \psi$ ;  $A_2 = -\psi\cos\psi - \sin\psi$

Khi tần số  $\omega \rightarrow 0$  thì ta nhận được ma trận độ cứng hình học của phương pháp phần tử hữu hạn:

$$K_G = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

### 2.2. Thanh chịu xoắn

Xét một phần tử thanh chịu xoắn như Hình 2.



Hình 2. Phần tử chịu xoắn

Theo (Le et al., 2020), ma độ cứng động lực của phần tử thanh chịu xoắn:

$$D^T(\omega) = \frac{GK_t}{L} \frac{\chi}{\sin\chi} \begin{bmatrix} \cos\chi & -1 \\ -1 & \cos\chi \end{bmatrix} \quad (8)$$

Với  $\chi$  là tham số động lực của thanh chịu xoắn được xác định theo:

$$\chi = \omega L \sqrt{\frac{\rho I_0}{GK_t}} \quad (9)$$

Trong đó:

- $\phi$  là góc xoắn của tiết diện,
- $\rho I_0$  là quán tính xoắn trên một đơn vị chiều dài, với  $\rho$  là khối lượng riêng của vật liệu,  $I_0$  là momen quán tính độc cực của tiết diện,
- $GK_t$  là độ cứng chống xoắn của tiết diện, với  $G$  là modul đàn hồi trượt và  $K_t$  là hằng số xoắn của mặt cắt.

Theo phương pháp phần tử hữu hạn, các thành phần của ma trận độ cứng hình học của phần tử thanh chịu xoắn được xác định như sau:

$$D_{Gij} = \frac{I_0}{A} \int_0^L N(x) N_i'(x) N_j'(x) dx \quad (10)$$

Trong đó:

$N(x)$  là lực dọc nén của phần tử

$N_i, N_j$  là các hàm dạng thứ  $i$  và  $j$ .

Theo (Le et al., 2020), vector hàm dạng của thanh chịu xoắn:

$$N = \left[ \cos\chi\xi - \cot g\chi \cdot \sin\chi\xi, \frac{\sin\chi\xi}{\sin\chi} \right]$$

Trong đó:  $\xi$  là tham số chiều dài không thứ nguyên của thanh,  $\xi = x/L$ .

Nếu phần tử có lực dọc là hằng số  $N(x) = N$ , ta tích phân (10) thu được ma trận độ cứng hình học của phần tử thanh chịu xoắn:

$$D_G^T(\omega) = \frac{NI_0}{2AL} \frac{\chi}{\sin^2\chi} \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

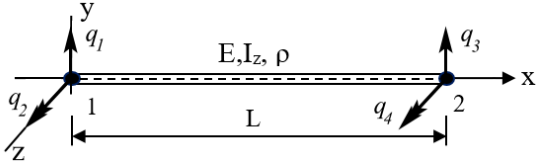
Với  $B_1 = \cos\chi\sin\chi + \chi$ ;  $B_2 = -\chi\cos\chi - \sin\chi$

Khi tần số  $\omega \rightarrow 0$  thì ta nhận được ma trận độ cứng hình học của phương pháp phần tử hữu hạn:

$$K_g = \frac{NI_0}{AL} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (12)$$

### 2.3. Thanh chịu uốn trong mặt phẳng xy

Xét một phần tử thanh thẳng chịu uốn trong mặt phẳng xy như Hình 3



**Hình 3. Phần tử chịu uốn trong mặt phẳng xy**

Ma trận độ cứng động lực của thanh chịu uốn trong mặt phẳng xy:

$$D^{xy}(\omega) = \frac{EI_z}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & -F_4L & F_5 & F_3L \\ -F_4L & F_2L^2 & -F_3L & F_1L^2 \\ F_5 & -F_3L & F_6 & F_4L \\ F_3L & F_1L^2 & F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Trong đó các hàm  $F_i$  ( $i=1\div 6$ ) là các hàm tần số:

$$\begin{aligned} F_1 &= \lambda[\sinh\lambda - \sin\lambda]/\delta \\ F_2 &= \lambda[\sin\lambda\cosh\lambda - \cos\lambda\sinh\lambda]/\delta \\ F_3 &= \lambda^2[\cosh\lambda - \cos\lambda]/\delta \\ F_4 &= -\lambda^2[\sinh\lambda\sin\lambda]/\delta \end{aligned} \quad (14)$$

$$[N] = \frac{1}{2\lambda^3} \begin{bmatrix} \cos\lambda\xi \\ \sin\lambda\xi \\ \cosh\lambda\xi \\ \sinh\lambda\xi \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \lambda^3 - F_4\lambda & F_2L\lambda & -F_3\lambda & F_1L\lambda \\ -F_6 & L\lambda^2 + F_4L & -F_5 & -F_3L \\ \lambda^3 + F_4\lambda & -F_2L\lambda & F_3\lambda & -F_1L\lambda \\ F_6 & L\lambda^2 - F_4L & F_5 & F_3L \end{bmatrix} \quad (17)$$

Nếu phần tử có lực dọc là hằng số  $N(x) = N$ , dùng các hàm dạng (17) và sử dụng Matlab để tích phân trên ta thu được ma trận độ cứng hình học của phần tử chịu uốn trong mặt phẳng xy như sau:

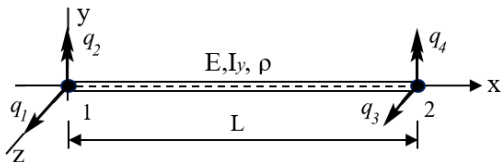
$$D_G^{xy}(\omega) = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ C_2 & C_5 & C_6 & C_7 \\ C_3 & C_6 & C_8 & C_9 \\ C_4 & C_7 & C_9 & C_{10} \end{bmatrix} \quad (18)$$

Với các hệ số  $C_i$  ( $i=1\div 10$ ) được xác định từ tích phân (16). Khi tần số  $\omega \rightarrow 0$  thì ta nhận được ma trận độ cứng hình học của thanh chịu uốn trong phương pháp phần tử hữu hạn:

$$K_G = \frac{N}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 3L & -36 & 3L \\ 3L & 4L^2 & -3L & -L^2 \\ -36 & -3L & 36 & -3L \\ 3L & -L^2 & -3L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

#### 2.4. Thanh chịu uốn trong mặt phẳng xz

Xét phần tử thanh thẳng chịu uốn như Hình 4.



**Hình 4. Phần tử chịu uốn trong mặt phẳng xz**

$$\begin{aligned} F_5 &= -\lambda^3[\sinh\lambda + \sin\lambda]/\delta \\ F_6 &= \lambda^3[\sin\lambda\cosh\lambda + \cos\lambda\sinh\lambda]/\delta \\ \delta &= 1 - \cosh\lambda\cos\lambda \end{aligned}$$

Với  $\lambda$  là tham số động lực của thanh chịu uốn, được xác định bởi:

$$\lambda = L \left( \frac{\rho A \omega^2}{EI_z} \right)^{1/4} \quad (15)$$

Các phần tử của ma trận độ cứng hình học được xác định như sau:

$$D_{Gij} = \int_0^L N(x) N_i'(x) N_j'(x) dx \quad (16)$$

Trong đó:

$N(x)$  là lực dọc nén của phần tử,

$N_i, N_j$  là các hàm dạng thứ  $i$  và  $j$ .

Với  $[N]$  là ma trận các hàm dạng:

Các ma trận độ cứng trong mặt phẳng xz cũng được xác định tương tự như trong mặt phẳng xy.

Ma độ cứng động lực của phần tử thanh chịu uốn trong mặt phẳng xz (Le et al., 2021):

$$D^{xz}(\omega) = \frac{EI_y}{L^3} \begin{bmatrix} F_6 & F_4L & F_5 & -F_3L \\ F_4L & F_2L^2 & F_3L & F_1L^2 \\ F_5 & F_3L & F_6 & -F_4L \\ -F_3L & F_1L^2 & -F_4L & F_2L^2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Với  $F_i$  ( $i=1\div 6$ ) là các hàm tần số tính theo (14), phụ thuộc vào  $\lambda = L \left( \frac{\rho A \omega^2}{EI_y} \right)^{1/4}$ .

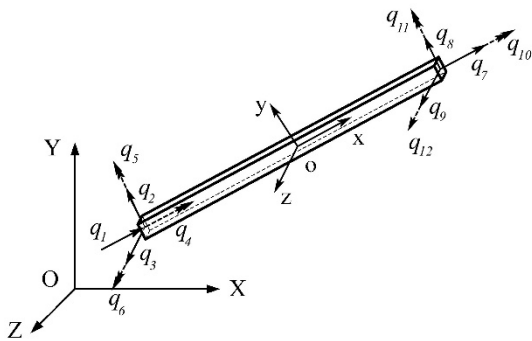
Ma trận độ cứng hình học của phần tử chịu uốn trong mặt phẳng xz được xác định như sau:

$$D_G^{xz}(\omega) = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_3 & D_4 \\ D_2 & D_5 & D_6 & D_7 \\ D_3 & D_6 & D_8 & D_9 \\ D_4 & D_7 & D_9 & D_{10} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Với hệ số  $D_i$  ( $i=1\div 10$ ) được xác định từ tích phân (16), với các hàm dạng phụ thuộc vào tham số động lực  $\lambda = L \left( \frac{\rho A \omega^2}{EI_y} \right)^{1/4}$ .

**2.5. Thanh chịu lực tổng quát**

Giả thiết các biến dạng dọc trục, biến dạng xoắn và biến dạng uốn trong hai mặt phẳng quán tính chính của thanh là độc lập nhau, ma trận độ cứng động lực của phần tử thanh không gian được xây dựng bằng cách ghép nối các ma trận độ cứng động lực thành phần. Ghép nối các ma trận (3), (8), (13) và (20) ta được ma trận độ cứng động lực của thanh không gian ở hệ tọa độ địa phương (ma trận 12x12). Tương tự, khi các ma trận độ cứng hình học (6), (11), (18) và (21) được ghép nối với nhau, kết quả thu được ma trận độ cứng hình học của thanh không gian ở hệ tọa độ địa phương (ma trận 12x12).



**Hình 5. Phần tử thanh không gian trong hệ tọa độ địa phương**

**2.6. Phân tích động lực khung không gian**

**2.6.1. Phân tích tần số dao động riêng**

Bài toán phân tích dao động riêng bằng phương pháp ma trận độ cứng động lực là bài toán trị riêng phi tuyến. Phương trình xác định tần số dao động riêng trong trường hợp không cản được biểu diễn dưới dạng:

$$[D(\omega) - D_G(\omega)]\{q\} = 0 \quad (22)$$

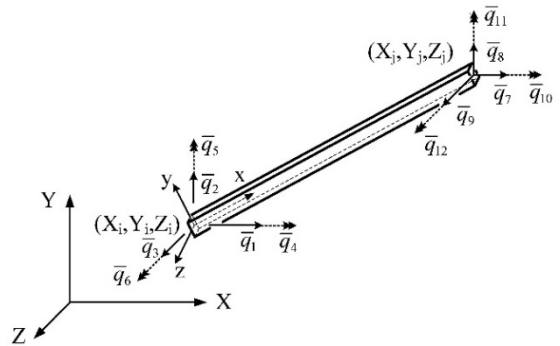
Để giải quyết bài toán này, giải thuật *Wittrick - Williams* đã được áp dụng (Lee et al., 2002) để xác định các tần số dao động riêng của kết cấu.

**Giải thuật Wittrick – Williams:**

Để xác định  $\omega_r$  - tần số dao động riêng thứ r của kết cấu từ phương trình (22) bằng thuật toán *Wittrick - Williams* ta thực hiện các bước theo trình tự sau:

- Bước 1: Rời rạc hoá kết cấu. Sự rời rạc hoá kết cấu thành những phần tử riêng biệt chỉ thực hiện khi kết cấu có sự thay đổi về tiết diện, vật liệu hoặc tại vị trí có liên kết.
- Bước 2: Chọn thử một giá trị  $\omega = \omega_t$ , sau đó tính toán các thành phần trong ma trận độ cứng động lực và ma trận độ cứng hình học của từng phần tử.

- Bước 3: Chuyển các ma trận độ cứng động lực của phần tử từ hệ trục tọa độ địa phương sang hệ tọa độ tổng thể.



**Hình 6. Phần tử thanh không gian trong hệ tọa độ tổng thể**

- Bước 4: Kết nối ma trận độ cứng động lực tổng thể và áp đặt điều kiện biên.
- Bước 5: Xác định số các tần số dao động riêng  $J$  bị vượt quá bởi  $\omega_t$  (nhỏ hơn giá trị  $\omega_t$ ),  $J(\omega_t)$  được tính như sau:

$$J(\omega_t) = J_0(\omega_t) + s\{K(\omega_t)\} \quad (23)$$

Trong đó:

- $J_0(\omega_t) = \sum J_m(\omega_t)$ , với  $J_m(\omega_t)$  là số các tần số dao động riêng của phần tử thứ m có các đầu thanh bị ngầm bị vượt quá bởi  $\omega_t$ .
- $s\{K(\omega_t)\}$  là số các phần tử có giá trị âm nằm trên đường chéo chính của ma trận tam giác trên  $K^A(\omega_t)$ , ma trận này thu được từ  $K(\omega_t)$  bằng cách dùng phép khử *Gauss*.

• Bước 6: So sánh giá trị  $J$  với  $r$ , nếu  $J(\omega_t) < r$  thì  $\omega_t$  là cận dưới của  $\omega_r \rightarrow$  gán  $\omega_t = \omega_r$ . Tiếp tục nhân đôi giá trị thử  $\omega_t$  và quay trở lại bước 2, việc lặp này được thực hiện cho đến khi  $J(\omega_t) \geq r$ . Khi đó  $\omega_t$  là cận trên của  $\omega_r \rightarrow$  gán  $\omega_u = \omega_t$ . Nếu  $J(\omega_t) \geq r$  thì  $\omega_t$  là cận trên của  $\omega_r \rightarrow$  gán  $\omega_u = \omega_t$  và  $\omega_l = 0$ .

• Bước 7: Mỗi khi cận dưới  $\omega_l$  và cận trên  $\omega_u$  được thiết lập thì ta tiếp tục xác định lại giá trị  $\omega_t$  chính là trung bình cộng của  $\omega_l$  và  $\omega_u$ .

• Bước 8: Kiểm tra độ hội tụ của  $\omega_t$ . Nếu thỏa mãn điều kiện hội tụ thì  $\omega_t$  chính là giá trị tần số dao động riêng thứ r cần tìm  $\omega_r$ . Ngược lại, nếu điều kiện hội tụ không thỏa thì trở lại bước 5.

$$\frac{\omega_t - \omega_l}{\omega_t} \leq eps = 10^{-6}$$

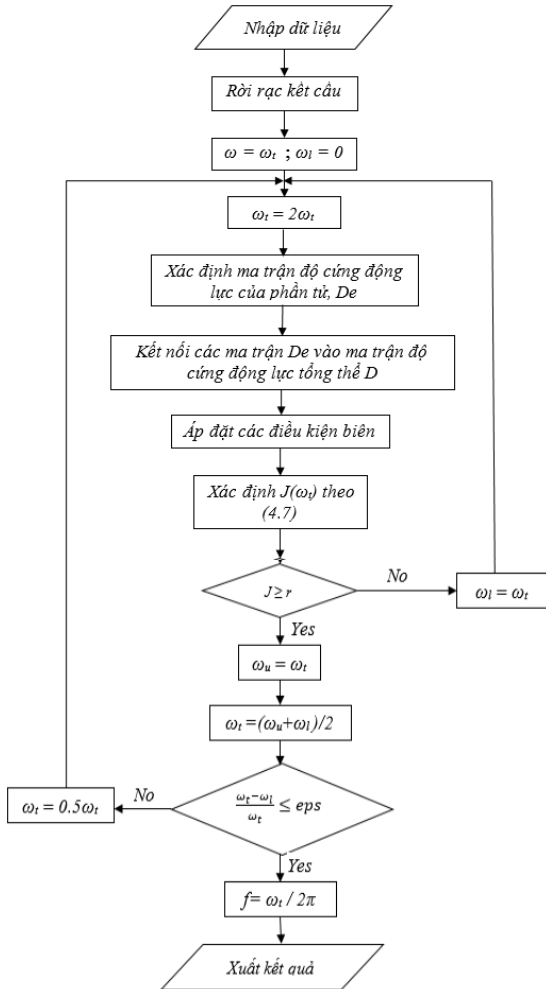
Xác định  $J_m = J_a + J_b + J_c + J_d$

- Thanh chịu kéo – nén:

$$J_a \text{ là số nguyên lớn nhất } \leq \frac{\psi}{\pi} = \frac{\omega L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho}{E}}$$

- Thanh chịu xoắn:

$$J_b \text{ là số nguyên lớn nhất } \leq \frac{\chi}{\pi} = \frac{\omega L}{\pi} \sqrt{\frac{\rho I_0}{GK_t}}$$



**Hình 7. Sơ đồ thuật toán phân tích tần số dao động riêng**

- Thanh chịu uốn trong mặt phẳng xy:

$$J_c = i - \frac{1}{2} [1 - (-1)^i \text{sgn}(1 - \cosh \lambda \cos \lambda)]$$

Với  $i$  là số nguyên lớn nhất nhỏ hơn  $\lambda/\pi$ .

- Thanh chịu uốn trong mặt phẳng xz:

$$J_d = i - \frac{1}{2} [1 - (-1)^i \text{sgn}(1 - \cosh \lambda \cos \lambda)]$$

### 2.6.2. Xác định các dạng dao động riêng

Dạng dao động riêng thứ  $r$  được xác định từ phương trình:

$$[D(\omega_r) - D_G(\omega_r)]\{q\}_r = 0 \quad (24)$$

Trong đó:  $\omega_r$  là tần số dao động riêng thứ  $r$ ,  $\{q\}_r$  là các chuyển vị nút ứng với giá trị  $\omega_r$  của kết cấu.

Tại các giá trị tần số cộng hưởng thì định thức của ma trận độ cứng động lực bằng 0 và vế phải của phương trình (23) cũng bằng 0. Ta có thể thay giá trị của  $\omega_r$  và  $F$  bằng  $\bar{\omega}$  và  $\bar{F}$  như sau:

$$\begin{cases} \bar{\omega}_r = \omega_r (1 + 1.0 \times 10^{-i}) \\ \bar{F} = F + 1.0 \times 10^{-i} \end{cases} \quad (25)$$

Với  $i$  là số thực dương đủ lớn để 2 vế được xem là bằng nhau. Khi đó (24) trở thành:

$$[D(\bar{\omega}_r) - D_G(\bar{\omega}_r)]\{q\}_r = \{\bar{F}\} \quad (26)$$

Vector riêng được tính như sau:

$$\{q\}_r = [D(\bar{\omega}_r) - D_G(\bar{\omega}_r)]^{-1} \{\bar{F}\} \quad (27)$$

### 2.6.3. Hệ chịu tải trọng điều hòa

Phương trình cân bằng:

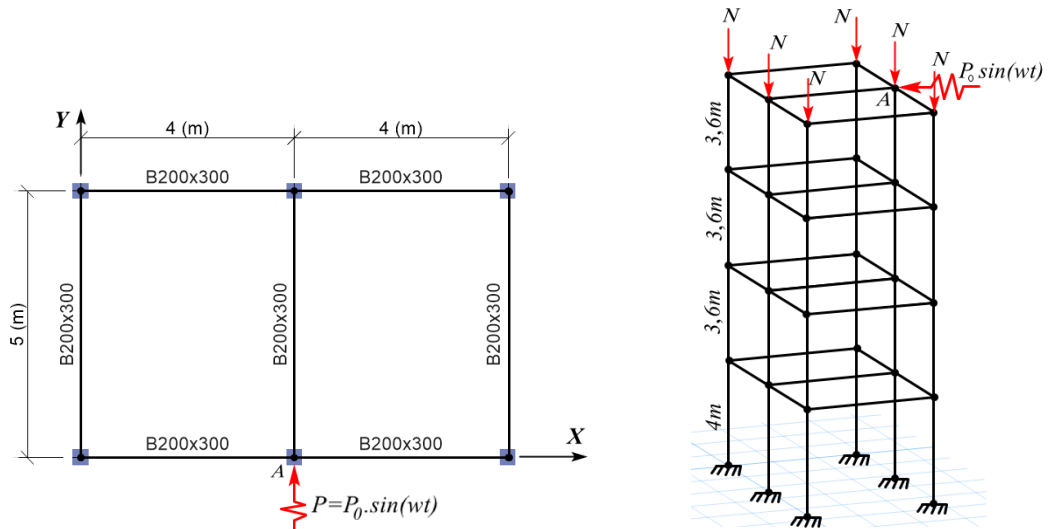
$$[D(\omega) - D_G(\omega)]\{q(t)\} = \{F(t)\} \quad (28)$$

Với  $q(t)$  là vector chuyển vị nút theo thời gian,  $F(t)$  là vector tải trọng điều hòa đã quy về nút và  $\omega$  là tần số của tải trọng điều hòa.

## 2.7. Ví dụ minh họa

### Số liệu đầu vào

Cho hệ kết cấu là khung không gian 4 tầng, phương X có 2 nhịp, phương Y có 1 nhịp như hình 8. Dầm có tiết diện chữ nhật 200x300 mm, cột có tiết diện vuông 200x200 mm. Khung chịu tải trọng động nằm ngang dạng điều hòa  $P=P_0 \cdot \sin(\omega t)$  tại điểm A. Giả sử tất cả các cột đều chịu lực nén N. Vật liệu có các thông số:  $E = 22000 \text{ kN/cm}^2$ ;  $\nu = 0,3$ ;  $\rho = 7,85 \times 10^{-8} \text{ kN.s}^2/\text{cm}^4$ , tải trọng  $P_0 = 100 \text{ kN}$ ,  $\omega = 10 \text{ rad/s}$ .



Hình 8. Mặt bằng và Mô hình 3D khung không gian 4 tầng

### 3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

#### 3.1. Phân tích tần số dao động và các dạng dao động riêng

Để so sánh sự hiệu quả của DSM so với FEM, kết quả phân tích theo DSM xác định sáu tần số dao động riêng đầu tiên của kết cấu được so sánh với kết quả phân tích của FEM truyền thống và phần mềm SAP2000.

Phân tích khung được thực hiện bằng phương pháp DSM và FEM truyền thống với ba trường hợp chia thanh thành 1, 2 và 3 phần tử, cùng với phần mềm SAP2000 áp dụng cho bốn trường hợp chia thanh thành 1, 2, 4 và 8 phần tử. Kết quả phân tích được trình bày trong bảng sau.

Bảng 1. Các giá trị tần số dao động riêng  $f$  (Hz) tính bằng các phương pháp

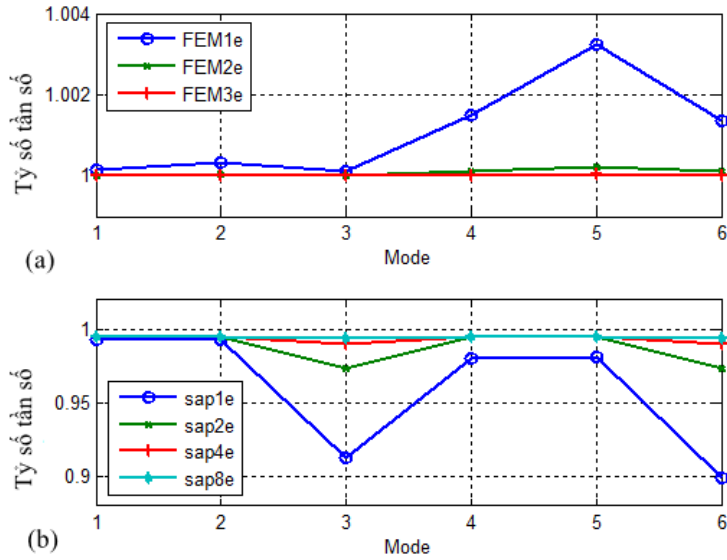
Phương pháp	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
DSM	1,9561	2,0716	2,3612	6,0031	6,2936	7,1943
FEM 1_e	1,9564	2,0723	2,3615	6,0122	6,3139	7,2040
FEM 2_e	1,9561	2,0717	2,3612	6,0037	6,2949	7,1952
FEM 3_e	1,9561	2,0716	2,3612	6,0032	6,2939	7,1945
SAP2000 1_e	1,9434	2,0572	2,1552	5,8864	6,1741	6,4667
SAP2000 2_e	1,9469	2,0609	2,2985	5,9732	6,2623	7,0061
SAP2000 4_e	1,9471	2,0610	2,3375	5,9756	6,2627	7,1242
SAP2000 8_e	1,9471	2,0610	2,3476	5,9758	6,2621	7,1534

\*  $n_e$ : thanh được chia thành  $n$  phần tử có kích thước bằng nhau

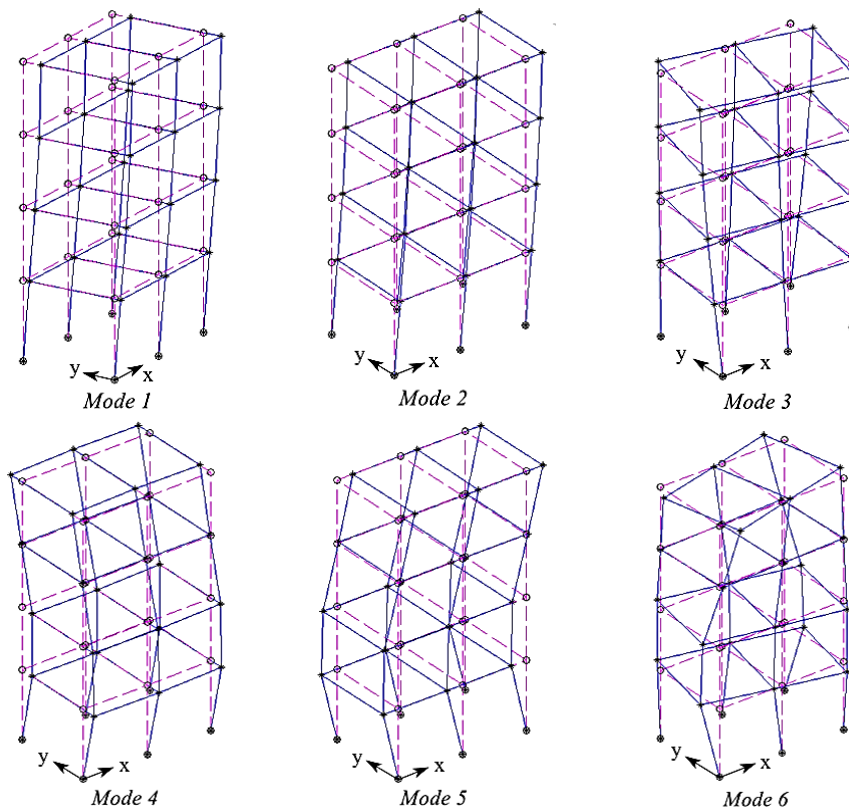
Khi phân tích khung bằng phần mềm SAP2000, nếu xem mỗi thanh là một phần tử thì chương trình cho kết quả sai lệch nhiều so với kết quả chính xác. Khi thanh được chia thành 3 phần tử trở lên, kết quả tiến dần đến kết quả của DSM. Còn khi phân tích khung bằng FEM truyền thống, nếu xem thanh là một phần tử duy nhất thì kết quả sai lệch khá nhiều so với kết quả của DSM và khi thanh được chia

thành 2 phần tử trở lên, kết quả tiến dần đến kết quả của DSM.

Như vậy, phương pháp FEM khi phần tử càng được chia nhỏ thì kết quả càng tiến về kết quả của DSM, điều này khẳng định kết quả của DSM là kết quả chính xác.



Hình 9. Tỷ số giữa các tần số dao động riêng tính bằng FEM (a) và SAP2000 (b) so với DSM



Hình 10. Hình dạng 6 dạng dao động đầu tiên của khung

**3.2. Phân tích tần số dao động riêng có kể đến ảnh hưởng của lực dọc nén trong cột**

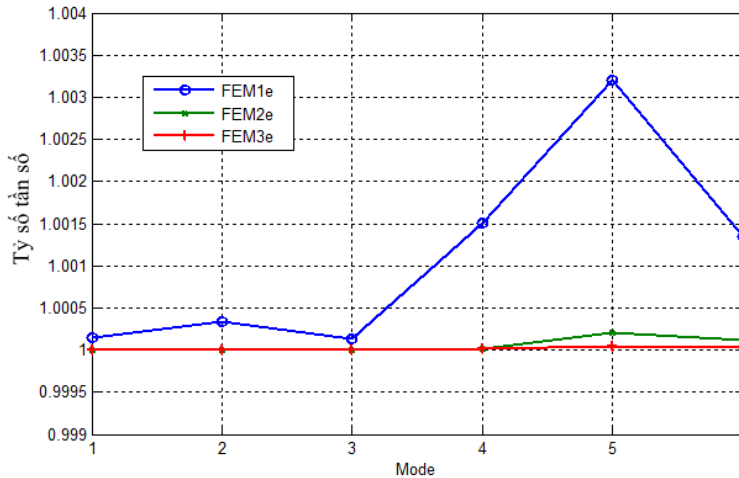
Khi kê đến lực dọc nén  $N=100$  kN trong tất cả các phần tử cột, tần số dao động riêng của kết cấu

được xác định theo các phương pháp khác nhau được trình bày trong bảng sau.



**Bảng 2. Các giá trị tần số dao động riêng f (Hz) khi lực dọc nén N=100 kN**

Phương pháp	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
DSM	1,9493	2,0651	2,3540	5,9842	6,2753	7,1739
FEM 1_e	1,9496	2,0658	2,3543	5,9932	6,2954	7,1836
FEM 2_e	1,9493	2,0651	2,3540	5,9843	6,2766	7,1748
FEM 3_e	1,9493	2,0651	2,3540	5,9843	6,2756	7,1741



**Hình 11. Tỷ số giữa các tần số dao động riêng tính bằng FEM so với DSM**

Từ Bảng 2, kết quả cho thấy khi phân tích tần số dao động riêng có xét đến ảnh hưởng của lực dọc thì DSM vẫn cho kết quả chính xác hơn FEM. Khi thanh được chia nhỏ thành nhiều phần tử thì FEM cho kết quả dần hội tụ về kết quả của DSM.

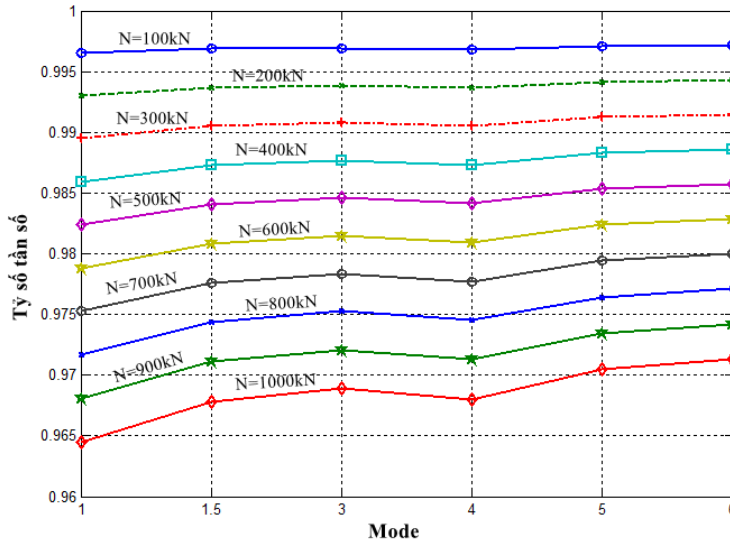
Dựa vào kết quả phân tích của DSM trong Bảng 3 cho thấy, sự ảnh hưởng của lực dọc trong các thanh đến kết quả phân tích tần số dao động riêng. Lực dọc làm cho kết cấu “mềm” hơn nên các tần số dao động riêng cũng thấp hơn, gây bất lợi cho kết cấu.

Từ Hình 12 đã cho thấy, khi lực dọc nén trong các cột tăng lên thì giá trị của các tần số dao động riêng cũng giảm xuống. Khi lực nén đầu cột tăng lên N=1000kN thì giá trị  $f_1$  giảm 3,6%. Tùy theo hình dạng kết cấu mà ảnh hưởng của lực dọc đến các tần số riêng là khác nhau. Lực dọc ảnh hưởng nhiều đến các tần số riêng đầu và các tần số bậc cao sẽ ít bị ảnh hưởng hơn.

**Bảng 3. Các giá trị tần số dao động riêng f (Hz) khi lực dọc nén N thay đổi**

Lực dọc N (kN)	Mode 1	Mode 2	Mode 3	Mode 4	Mode 5	Mode 6
0	1,9561	2,0716	2,3612	6,0031	6,2936	7,1943
100	1,9493	2,0651	2,3540	5,9842	6,2753	7,1739
200	1,9424	2,0585	2,3467	5,9652	6,2569	7,1535
300	1,9355	2,0519	2,3394	5,9462	6,2384	7,1330
400	1,9286	2,0452	2,3321	5,9271	6,2199	7,1124
500	1,9217	2,0386	2,3248	5,9079	6,2013	7,0918
600	1,9147	2,0319	2,3175	5,8887	6,1827	7,0711
700	1,9077	2,0252	2,3101	5,8694	6,1640	7,0504
800	1,9007	2,0185	2,3028	5,8501	6,1453	7,0296
900	1,8936	2,0118	2,2953	5,8307	6,1265	7,0087
1000	1,8866	2,0050	2,2879	5,8112	6,1076	6,9878

\* n\_e: thanh được chia thành n phần tử có kích thước bằng nhau



Hình 12. Tỷ số giữa các tần số dao động riêng khi lực nén thay đổi so với trường hợp khi N=0

3.3. Phân tích động lực hệ khung chịu tải trọng điều hòa  $P=P_0 \cdot \sin \omega t$

3.3.1. So sánh kết quả phân tích của DSM và FEM

Chọn bước thời gian  $\Delta t = 0,015$  s, giả thiết tại thời điểm  $t=0$  chuyển vị và vận tốc của hệ bằng 0.

Dưới tác dụng của tải trọng điều hoà, FEM được dùng để xác định chuyển vị ngang và chuyển vị xoay

tại điểm lực tác dụng. Trong các trường hợp chia thành thành 1, 2 và 3 phần tử thì kết quả thu được từ FEM sẽ hội tụ về kết quả của DSM.

Như vậy, khi xác định chuyển vị của kết cấu dưới tải trọng động điều hoà, DSM cũng cho kết quả phân tích chính xác mà không cần phải chia nhỏ phần tử như FEM.

Bảng 4. Kết quả chuyển vị ngang theo phương y của nút A (cm) theo từng bước thời gian

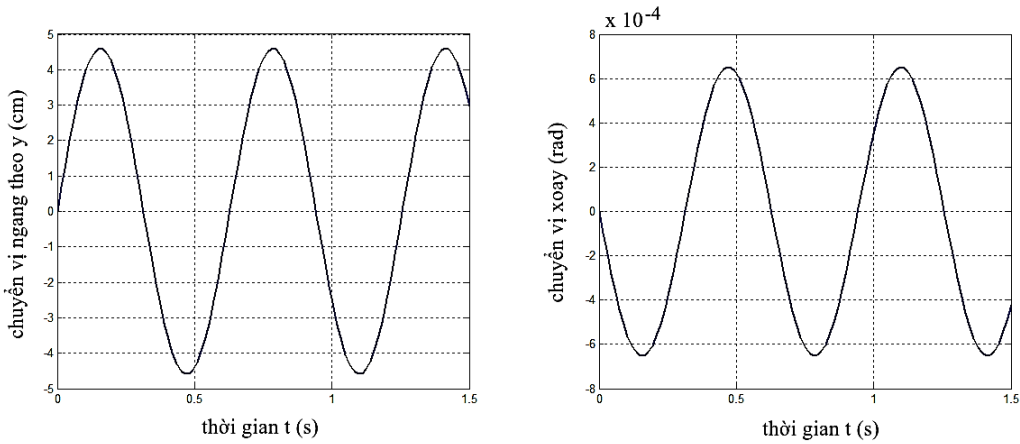
Phương pháp	1Δt	2Δt	3Δt	4Δt	5Δt	6Δt	...
DSM	0,6869	1,3585	1,9995	2,5956	3,1334	3,6009	...
FEM 1_e	0,6867	1,3579	1,9987	2,5946	3,1322	3,5995	...
FEM 2_e	0,6869	1,3584	1,9994	2,5955	3,1333	3,6008	...
FEM 3_e	0,6869	1,3585	1,9995	2,5956	3,1334	3,6008	...

Bảng 5. Kết quả chuyển vị xoay quanh phương x của nút A ( $10^{-6}$  rad) (cm) theo từng bước thời gian

Phương pháp	1Δt	2Δt	3Δt	4Δt	5Δt	6Δt	...
DSM	-97,4032	-192,6189	-283,5088	-368,0317	-444,2894	-510,5693	...
FEM1_e	-97,3792	-192,5714	-283,4389	-367,9410	-444,1799	-510,4435	...
FEM2_e	-97,4016	-192,6158	-283,5042	-368,0257	-444,2822	-510,5610	...
FEM3_e	-97,4028	-192,6182	-283,5078	-368,0304	-444,2879	-510,5676	...

Bảng 6. Giá trị biên độ chuyển vị tại điểm A

Phương pháp	Chuyển vị ngang $y_A$ (cm)	sai số (%)	Chuyển vị xoay $\phi_A$ ( $10^{-6}$ rad)	sai số (%)
DSM	4,5937	-	651,1192	-
FEM 1_e	4,5919	0,0392	650,9588	0,0246
FEM 2_e	4,5936	0,0022	651,1087	0,0016
FEM 3_e	4,5937	0	651,1170	0,0003



**Hình 13. Đồ thị chuyển vị của nút A theo thời gian**

**3.3.2. Xét đến ảnh hưởng của lực dọc nén**

Khi kể đến lực dọc nén trong tất cả các phần tử cột, giá trị chuyển vị của điểm A theo từng bước thời gian được trình bày trong bảng sau.

Theo Bảng 7, 8 và 9, ảnh hưởng của lực dọc nén đến chuyển vị của kết cấu là rất đáng kể. Khi lực nén trong cột tăng, chuyển vị thẳng gia tăng với tốc độ lớn hơn so với chuyển vị xoay.

**Bảng 7. Kết quả chuyển vị ngang tại nút A (cm) theo từng bước thời gian**

N (kN)	1Δt	2Δt	3Δt	4Δt	5Δt	6Δt	...
0	0,6869	1,3585	1,9995	2,5956	3,1334	3,6009	...
100	0,7006	1,3855	2,0393	2,6473	3,1958	3,6726	...
200	0,7149	1,4137	2,0808	2,7012	3,2609	3,7474	...
300	0,7298	1,4432	2,1242	2,7575	3,3288	3,8254	...

**Bảng 8. Kết quả chuyển vị xoay quanh phương x của nút A (10<sup>-6</sup> rad) theo từng bước thời gian**

N(kN)	1Δt	2Δt	3Δt	4Δt	5Δt	6Δt	...
0	-97,4032	-192,6189	-283,5087	-368,0317	-444,2894	-510,5693	...
100	-98,7838	-195,3490	-287,5272	-373,2481	-450,5867	-517,8061	...
200	-100,2190	-198,1873	-291,7047	-378,6711	-457,1333	-525,3293	...
300	-101,7124	-201,1405	-291,7047	-378,6711	-457,1333	-525,3293	...

**Bảng 9. Giá trị biên độ chuyển vị tại điểm A**

N (kN)	Chuyển vị ngang y <sub>A</sub> (cm)	Chênh lệch (%)	Chuyển vị xoay φ <sub>A</sub> (10 <sup>-6</sup> rad)	Chênh lệch (%)
0	4,5937	-	651,1192	-
100	4,6852	1,992	660,3481	1,417
200	4,7806	4,069	669,9423	2,891
300	4,8802	6,237	679,9254	4,424

**4. KẾT LUẬN**

Trong bài nghiên cứu, khi phân tích động lực học của kết cấu hệ thanh, phương pháp ma trận độ cứng động lực mang lại kết quả phân tích chính xác mà không cần chia nhỏ phần tử như trong phương pháp phần tử hữu hạn. Khi xem xét thêm ảnh hưởng của lực nén dọc trong các cột, các tần số riêng cơ bản

của kết cấu sẽ bị giảm và chuyển vị của kết cấu tăng lên. Điều này khiến kết cấu hoạt động kém hiệu quả hơn dưới tác dụng của tải trọng. Trong thực tế, các công trình như cầu, tòa nhà cao tầng hay các kết cấu cột chịu lực cần được kiểm tra kỹ lưỡng về ảnh hưởng của lực nén.

Từ kết quả nghiên cứu, DSM đã được chứng minh là một công cụ mạnh mẽ và hiệu quả trong phân tích động lực học kết cấu. Nó giúp các kỹ sư và nhà nghiên cứu nâng cao chất lượng thiết kế, đảm bảo an toàn và tối ưu hóa cho kết cấu công trình.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO (REFERENCES)

- Banerjee, J. R., & Williams, F. W. (1992). Coupled bending – torsional dynamic stiffness matrix for Timoshenko beam elements. *Computers & Structures*, 42(3), 301-310.  
[https://doi.org/10.1016/0045-7949\(92\)90026-V](https://doi.org/10.1016/0045-7949(92)90026-V)
- Banerjee, J. R. (2003). Free vibration of sandwich beams using the dynamic stiffness method. *Computers & Structures*, 81(18-19), 1915-1922.  
[https://doi.org/10.1016/S0045-7949\(03\)00211-6](https://doi.org/10.1016/S0045-7949(03)00211-6)
- Do, P. H. (2008). *Analysis of natural frequencies of planar frame structures using the dynamic stiffness method* (Master's thesis). Ho Chi Minh City University of Technology (in Vietnamese).
- Kumar, R., & Jana, P. (2023). Dynamic stiffness method for exact modal analysis of sigmoid functionally graded rectangular plate resting on elastic foundation. *Archive of Applied Mechanics*, 93(12), 4467-4496.
- Lee, U., Kim, J., Shin, J., & Leung, A. Y. T. (2002). Development of a Wittrick – Williams algorithm for the spectral element model of elastic – piezoelectric two - layer active beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, 44(2), 305–318.  
[https://doi.org/10.1016/S0020-7403\(01\)00097-2](https://doi.org/10.1016/S0020-7403(01)00097-2)
- Le, T. T., Do, Q. K., & Tran, P. T. (2021). Analysis of natural vibration frequencies of space frame structures using the dynamic stiffness method. *Can Tho University Journal of Science*, 57(4), 5–15 (in Vietnamese).  
<https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.108>
- Tran, L. V. (2005). Construction of the dynamic stiffness matrix and the nodal load vector of a general bending beam element. *Journal of Science and Technology in Civil Engineering*, 2, 13–17 (in Vietnamese).

### LỜI CẢM ƠN

Nhóm tác giả chân thành cảm ơn Trường đại học Cần Thơ đã hỗ trợ tài chính cho nghiên cứu này.