Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.334

MARTINGALE SINH BỞI BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN MỘT CHIỀU CÓ ĐIỀU KIỆN

Lê Hoài Nhân*, Lâm Hoàng Chương và Dương Thị Bé Ba
Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): lhnhan@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 03/05/2024
Sửa bài (Revised): 02/07/2024
Duyệt đăng (Accepted): 04/08/2024

Title: *Martingales generated by one dimensional conditioned random walks*

Author(s): *Le Hoai Nhan*, Lam Hoang Chuong and Duong Thi Be Ba*

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, mô hình bước đi ngẫu nhiên một chiều và bước đi ngẫu nhiên một chiều có điều kiện đã được xem xét. Trong khi bước đi ngẫu nhiên là một quá trình martingale thì bước đi ngẫu nhiên có điều kiện lại là một submartingale chặt. Bài viết này cũng chỉ ra tất cả martingale sinh bởi bước đi ngẫu nhiên có điều kiện.

Từ khoá: *Bước đi ngẫu nhiên, bước đi ngẫu nhiên có điều kiện, martingale*

ABSTRACT

In this paper, one dimensional simple random walk and conditioned random walk models will be considered. While a random walk is a martingale, the conditional one is a strictly submartingale. Here, we also figured out the martingales generated by the conditional random walk.

Keywords: *Conditioned random walk, martingale, random walk*

1. GIỚI THIỆU

Bước đi ngẫu nhiên được nhắc đến lần đầu tiên bởi nhà toán học Pháp Pierre de Fermat vào thế kỷ XVII. Sau đó, mô hình này được nghiên cứu và phát triển bởi nhiều nhà khoa học khác như Carl Friedrich Gauss, Andrey Markov và Michael Kac. Trong trường hợp tổng quát, bước đi ngẫu nhiên được định nghĩa trong không gian d chiều ($\mathbb{Z}^d$) như sau (Spitzer, 2001; Lawler & Limic, 2010; Lawler, 2013).

Xét $\left(X_j\right)_{j\geq 1}$ là một dãy các biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối với phân phối chung là

$$\mathbb{P}\left(X_j = e\right) = \frac{1}{2d}, |e| = 1.$$

Định nghĩa 1.1. *Một bước đi ngẫu nhiên xuất phát từ $x \in \mathbb{Z}^d$ là một quá trình ngẫu nhiên $(S_n)_{n\geq 0}$, được đánh thứ tự theo số tự nhiên với $S_0 = x$ và*

$$S_n = x + X_1 + X_2 + \cdots + X_n.$$

Bước đi ngẫu nhiên trong Định nghĩa 1.1 là một quá trình martingale với toán tử chuyển xác suất

$$p_n(x,y) = \mathbb{P}_x(S_n = y),$$

với

$$p_1(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2d}, & |x-y| = 1 \\ 0, & |x-y| \neq 1 \end{cases}$$

và

$$p_{n+1}(x,y) = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} p_n(x,z)\cdot p_1(z,y).$$

Trong trường hợp một chiều, ta có

$$p_1(x,y) = \frac{1}{2}, \text{nếu } |x-y| = 1.$$

Khái niệm martingale trong lý thuyết xác suất được Paul Lévy đưa ra vào năm 1934, mặc dù ông không đặt tên cho nó. Thuật ngữ "martingale" được đưa ra sau đó bởi Ville (1939), người cũng mở rộng định nghĩa cho martingale liên tục. Phần lớn sự phát triển ban đầu của lý thuyết này được thực hiện bởi Joseph Leo Doob và những người khác. Một phần động lực của công việc đó là để chứng tỏ sự bất khả thi của các chiến lược cá cược thành công trong các trò chơi may rủi. Một số tài liệu nghiên cứu về martingale có thể kể đến như Durett (2019), Grimmett and Stirzaker (2020). Một định nghĩa thường dùng của martingale, supermartingale và submartingale được nêu trong Durett (2019) như sau:

Định nghĩa 1.2. *Một dãy các biến ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ tương thích với một bộ lọc $\mathcal{F}_n$ được gọi là một martingale nếu*

(i) $\mathbb{E}|X| < \infty$,

(ii) $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$.

Nếu dấu bằng ở điều kiện (ii) được thay bởi dấu bất đẳng thức "≥" hoặc "≤" thì quá trình $(X_n)_{n\geq 0}$ được gọi tương ứng là submartingale và supermartingale.

Khác với bước đi ngẫu nhiên đơn, một xích Markov có hàm xác suất chuyển không phụ thuộc vào vị trí của nó, bước đi ngẫu nhiên có điều kiện cũng là một xích Markov nhưng hàm xác suất chuyển phụ thuộc vào vị trí của tại thời điểm hiện tại của nó. Thật khó để định nghĩa bước đi này dưới dạng tổng của các biến ngẫu nhiên như trong định nghĩa 1.1. Ta định nghĩa bước đi ngẫu nhiên có điều kiện dưới dạng hàm xác suất chuyển (Doney, 1983; Bertoin & Doney, 1994; Popov, 2021) như sau:

Định nghĩa 1.3. *Bước đi ngẫu nhiên có điều kiện một chiều $\left(\hat{S}_n\right)_{n\geq 0}$ là một quá trình ngẫu nhiên với*

$$\hat{S}_0 = x,$$

$$\hat{p}_1(x,y) = \widehat{\mathbb{P}}_x\left(\hat{S}_1 = y\right) = \begin{cases} \dfrac{|y|}{2|x|}, & \text{nếu } |x-y| = 1, x\cdot y > 0 \\ 0, & \text{nếu ngược lại.} \end{cases}$$

Với định nghĩa này, nếu $x > 0$ thì

$$\widehat{\mathbb{P}}_x\left(\hat{S}_n = 0\right) = 0,$$

nói cách khác xuất phát từ $x > 0$, $\left\{\hat{S}_n \leq 0\right\}$ là sự kiện không thể. Do đó, $\hat{S}$ còn được gọi là bước đi ngẫu nhiên với điều kiện không quay về gốc.

Các khái niệm bước đi ngẫu nhiên đơn, bước đi ngẫu nhiên có điều kiện và martingale được nghiên cứu sâu và làm rõ hơn trong luận án của Hoai-Nhan (2023).

Để thực hiện mục tiêu đề ra của nghiên cứu, bài báo này được cấu trúc các phần tiếp theo như sau: phần 2 sẽ giới thiệu về phương pháp nghiên cứu, phần 3 là kết quả chính của nghiên cứu, các martingale sinh bởi bước đi ngẫu nhiên có điều kiện một chiều và phần kết luận, thảo luận.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Trong mục này, hai tính chất quan trọng được nhắc lại của bước đi ngẫu nhiên và bước đi ngẫu nhiên có điều kiện. Sau đó, phương trình sai phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng được giới thiệu. Đây là một công cụ để chứng minh kết quả chính của bài báo. Định lý về nghiệm của phương trình sai phân cấp hai tuyến tính hệ số hằng cũng được giới thiệu, nó được tình bày một cách chi tiết trong Thịnh và ctv., 2001.

Định lý 2.1. *Bước đi ngẫu nhiên $(S_n)_{n\geq 0}$ là một martingale.*

Chứng minh.

Với mỗi $x \in \mathbb{Z}$, xét kỳ vọng có điều kiện

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}[S_{n+1}|S_n = x] \\ &= (x+1)\cdot\mathbb{P}[S_{n+1} = x+1|S_n = x] \\ &\quad +(x-1)\cdot\mathbb{P}[S_{n+1} = x-1|S_n = x] \\ &= (x+1)\cdot\frac{1}{2} + (x-1)\cdot\frac{1}{2} \\ &= x. \end{aligned}$$

Tức là, $\mathbb{E}[S_{n+1}|S_n] = S_n$.

Do đó, S_n là một martingale. ■

Định lý 2.2. *Bước đi ngẫu nhiên $\left(\hat{S}_n\right)$ với $\hat{S}_0 = x > 0$ là một submartingale.*

Chứng minh.

Với mỗi $x \in \mathbb{Z}_+^*$, xét kỳ vọng có điều kiện

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[\hat{S}_{n+1}\middle|\hat{S}_n = x\right] \\ = &\ (x+1)\cdot\mathbb{P}\left[\hat{S}_{n+1} = x+1\middle|\hat{S}_n = x\right] + \\ &+(x-1)\cdot\mathbb{P}\left[\hat{S}_{n+1} = x-1\middle|\hat{S}_n = x\right] \\ = &\ (x+1)\cdot\frac{x+1}{2x} + (x-1)\cdot\frac{x-1}{2x} \\ = &\ x + \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Tức là, $\mathbb{E}\left[\hat{S}_{n+1}\middle|\hat{S}_n\right] = \hat{S}_n + \frac{1}{\hat{S}_n} > \hat{S}_n$.

Do đó, $\hat{S}_n$ là một submartingale. ■

Sau đây là một hệ quả của Định lý 2.1.

Hệ quả 2.2. *(i) Giả sử,* $\hat{S}_n = x + \hat{X}_1 + \cdots + \hat{X}_n$ *thì*

$$\mathbb{E}\left[\hat{X}_{n+1}\middle|\hat{S}_n\right] = \frac{1}{\hat{S}_n}.$$

(ii) $\left(\frac{1}{\hat{S}_n}\right)_{n\geq 0}$ là một martingale.

Chứng minh.

(i) Bằng cách áp dụng tính chất của kỳ vọng có điều kiện, ta được

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\hat{X}_{n+1}\middle|\hat{S}_n\right] &= \mathbb{E}\left[\hat{S}_{n+1} - \hat{S}_n\middle|\hat{S}_n\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\hat{S}_{n+1}\middle|\hat{S}_n\right] - \hat{S}_n\\ &= \hat{S}_n + \frac{1}{\hat{S}_n} - \hat{S}_n = \frac{1}{\hat{S}_n}.\end{aligned}$$

(ii) Với mỗi $x \in \mathbb{Z}_+^*$,

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\hat{S}_{n+1}}\middle|\hat{S}_n = x\right]$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{x+1}\cdot \mathbb{P}\left[\hat{S}_{n+1} = x+1\middle|\hat{S}_n = x\right]\\ &\quad + \frac{1}{x-1}\cdot \mathbb{P}\left[\hat{S}_{n+1} = x-1\middle|\hat{S}_n = x\right]\\ &= \frac{1}{x+1}\cdot\frac{x+1}{2x} + \frac{1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2x} = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Do đó, $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\hat{S}_{n+1}}\middle|\hat{S}_n\right] = \frac{1}{\hat{S}_n}$, hay $\left(\frac{1}{\hat{S}_n}\right)$ là một martingale. ■

Định nghĩa 2.3. *(Thịnh và ctv.(2001)) Giả sử a,b,c là các số thực và P_k là một đa thức bậc k. Khi đó, ta nói f là nghiệm của phương trình sai phân tuyến tính cấp hai hệ số hằng nếu*

$$af(x+1) + bf(x) + cf(x-1) = P_k(x), \forall x \in \mathbb{N}. \quad (1)$$

Phương trình bậc hai

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad (2)$$

được gọi là phương trình đặc trưng của phương trình (1).

Định lý sau đây (xem Thịnh và ctv. (2001)) cho ta cấu trúc nghiệm của phương trình thuần nhất $af(x+1) + bf(x) + cf(x-1) = 0$.

Định lý 2.4. *(i) Nếu phương trình (2) có hai nghiệm thực phân biệt λ_1 và λ_2 thì*

$$f(x) = A\cdot\lambda_1^x + B\cdot\lambda_2^x.$$

(ii) Nếu phương trình (2) có nghiệm thực kép $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ thì

$$f(x) = (A + Bx)\cdot\lambda^x.$$

(iii) Nếu phương trình (2) có hai nghiệm phức phân biệt $\lambda = r(\cos\theta \pm \sin\theta) = re^{i\theta}$ thì

$$f(x) = r^x(A\cdot\cos x\theta + B\cdot\sin x\theta),$$

trong đó A, B là các hằng số.

Chứng minh. Xem Thịnh và ctv. (2001), trang 67.

Định lý sau đây (xem Thịnh và ctv. (2001)) cho biết cấu trúc nghiệm riêng của phương trình (1).

Định lý 2.5. *(i) Nếu phương trình (2) không có nghiệm $\lambda = 1$ thì*

$$f(x) = Q_k(x)$$

là một nghiệm riêng của phương trình (1).

(ii) Nếu phương trình (2) có nghiệm đơn $\lambda = 1$ thì

$$f(x) = x\cdot Q_k(x),$$

là một nghiệm riêng của phương trình (1).

(iii) Nếu phương trình (2) có nghiệm kép $\lambda = 1$ thì

$$f(x) = x^2\cdot Q_k(x),$$

là một nghiệm riêng của phương trình (1), trong đó $Q_k(x)$ là một đa thức bậc k.

Định lý 2.6. *(xem Thịnh và ctv. (2001)) Nghiệm tổng quát của phương trình (1) có dạng:*

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

trong đó $f_1(x)$ được xác định nhờ Định lý 2.4 và $f_2(x)$ được xác định nhờ Định lý 2.5.

3. MARTINGALE SINH BỞI BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN CÓ ĐIỀU KIỆN

Trong phần này, cấu trúc của các martingale sinh bởi $\hat{S}_n$ và thời gian n sẽ được xem xét. Cụ thể hơn, các điều kiện cần và đủ được đưa ra để các quá trình có dạng $\{f(\hat{S}_n) + g(n)\}$ và $\{f(\hat{S}_n)\cdot g(n)\}$ là martingale.

Định lý 3.1. *Giả sử $(\hat{S}_n)_{n\geq 0}$ là một bước đi ngẫu nhiên có điều kiện. Khi đó, quá trình*

$$Y_n = f(\hat{S}_n) + g(n), n \geq 0$$

là một martingale nếu và chỉ nếu Y_n có dạng

$$Y_n = A\left(\left|\hat{S}_n\right|^2 - 3n\right) + \frac{B}{\hat{S}_n} + C$$

với các hằng số A, B, C nào đó.

Để chứng minh Định lý 3.1, ta cần Mệnh đề 3.2 dưới đây.

Mệnh đề 3.2. *Quá trình $Y_n = \left|\hat{S}_n\right|^2 - 3n, n \geq 0$ là một martingale.*

Chứng minh. Ta cần

$$\mathbb{E}\left[Y_{n+1}\middle|\hat{S}_n\right] = \left|\hat{S}_n\right|^2 - 3n.$$

Thật vậy, với $x \in \mathbb{Z}_+^*$ tùy ý, ta có

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\left[Y_{n+1}\middle|\hat{S}_n = x\right] \\ &= \left((x+1)^2 - 3(n+1)\right) \cdot \frac{x+1}{2x} \\ &\quad + \left((x-1)^2 - 3(n+1)\right) \cdot \frac{x-1}{2x} \\ &= |x|^2 - 3n. \end{aligned}$$

Đây chính là điều ta cần. ■

Chứng minh định lý 3.1

Điều kiện đủ. Điều kiện đủ là sự kết hợp bởi Hệ quả 2.2, Mệnh đề 3.2 và tính tuyến tính của martingale.

Điều kiện cần. Giả sử Y_n là một martingale. Khi đó, Y_n thỏa mãn phương trình martingal

$$\mathbb{E}\left[Y_{n+1}\middle|\hat{S}_n = x\right] = f(x) + g(n).$$

Vế trái của phương trình trên có dạng

$f(x+1) \cdot \frac{x+1}{2x} + f(x-1) \cdot \frac{x-1}{2x} + g(n+1).$

Phương trình trên tương đương với phương trình tách biến

$$\frac{(x+1)f(x+1) + (x-1)f(x-1) - 2xf(x)}{2x} = -[g(n+1) - g(n)].$$

Phương trình trên đúng với mọi x và n nên tồn tại một hằng số c sao cho:

$$\frac{(x+1)f(x+1) + (x-1)f(x-1) - 2xf(x)}{2x} = c$$

và

$$g(n+1) - g(n) = -c.$$

Ta xét hai trường hợp của c.

Trường hợp 1: $c = 0$.

Khi đó, $g(n) = C$ là hàm hằng và hàm f thỏa

$$(x+1)f(x+1) - 2xf(x) + (x-1)f(x-1) = 0$$

Vế trái của phương trình này là phương trình sai phân cấp hai tuyến tính hệ số hằng của hàm số $h(x) = xf(x)$. Phương trình đặc trưng của nó là $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$, có nghiệm kép $\lambda = 1$.

Theo định lý 2.4, $h(x)$ là hàm bậc nhất,

$h(x) = Ax + B$. Từ đó suy ra $f(x) = A + \frac{B}{x}$. Do đó, trường hợp này cho ta $Y_n = D + \frac{B}{\hat{S}_n}$.

Trường hợp 2: $c \neq 0$.

Khi đó, $g(c) = cn + F$.

Hàm $f(x)$ thỏa mãn

$$(x+1)f(x+1) - 2xf(x) + (x-1)f(x-1) = -2cx.$$

Phương trình này là phương trình sai phân cấp hai của hàm $h(x) = xf(x)$ với vế phải là một đa thức bậc nhất. Theo định lý 2.5(iii), $h(x) = x^2 \cdot (A\,x + B)$. Kết hợp với trường hợp 1, ta có $h(x)$ là một hàm bậc ba. Suy ra,

$$f(x) = A\,x^2 + Bx + C + \frac{D}{x}.$$

Đến đây, ta thấy $Y_n = A\left|\hat{S}_n\right|^2 + B\hat{S}_n + C + \frac{D}{\hat{S}_n} + cn + F$. Định lý 2.2 cho ta $B = 0$. Cuối cùng, phương tình martingale cho ta $c = -3A$. Do đó, $Y_n = A\left(\left|\hat{S}_n\right|^2 - 3n\right) + \frac{D}{\hat{S}_n} + F$. Định lý 3.1 được chứng minh xong. ■

Định lý 3.3. *Giả sử $(\hat{S}_n)$ là một bước đi ngẫu nhiên có điều kiện. Khi đó, quá trình*

$$Y_n = f(\hat{S}_n) \cdot g(n), \qquad g(n) > 0,$$

là một martingale nếu và chỉ nếu Y_n thuộc một trong ba dạng sau:

(1) $Y_n = (\cos\theta)^{-n} \cdot \frac{A\cos\theta\hat{S}_n + B\sin\theta\,\hat{S}_n}{\hat{S}_n}$,

với $\theta = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-c^2}}{c}$, $c < 1$,

(2) $Y_n = A + \frac{B}{\hat{S}_n}$,

(3) $Y_n = c^{-1} \cdot \frac{A\lambda_1^{\hat{S}_n} + B\lambda_2^{\hat{S}_n}}{\hat{S}_n}$,

với $\lambda_{1,2} = c \pm \sqrt{c^2 - 1}, c > 1$, *và A, B, C là các hằng số nào đó.*

Để chứng minh Định lý 3.3 ta cần Mệnh đề 3.4 bên dưới.

Mệnh đề 3.4. *Nếu $Y_n = f(\hat{S}_n) \cdot g(n)$, với $g(n) > 0$ là một martingale thì tồn tại một hằng số $c > 0$ sao cho $g(n) = Ac^{-n}$.*

Chứng minh.

Áp dụng phương trình martingale đối với quá trình Y_n ,

$$\mathbb{E}[Y_{n+1} | \hat{S}_n = x] = f(x)g(n)$$

ta được

$$\frac{(x+1)f(x+1) + (x-1)f(x-1)}{2xf(x)} = \frac{g(n)}{g(n+1)}.$$

Phương trình này là một phương trình tách biến với vế phải dương nên tồn tại một hằng số dương c sao cho $\frac{g(n)}{g(n+1)} = c$. Do đó, $g(n)$ là một cấp số nhân với số hạng tổng quát $g(n) = Ac^{-n}$. ■

Mệnh đề 3.5. *Nếu*

$$Y_n = c^{-n} f(\hat{S}_n), c > 0,$$

là một martingale thì Y_n thuộc một trong ba dạng được phát biểu trong Định lý 3.3.

Chứng minh. Tiếp tục với chứng minh của mệnh đề 3.4 ta có,

$$(x+1)f(x+1) - 2cxf(x) + (x-1)f(x-1) = 0.$$

Như vậy, hàm số $h(x) = xf(x)$ thỏa mãn phương trình sai phân cấp hai tuyến tính thuần nhất hệ số hằng

$$h(x+1) - 2ch(x) + h(x-1) = 0.$$

Phương trình này có phương trình đặc trưng

$$\lambda^2 - 2c\lambda + 1 = 0.$$

Ta xét các trường hợp của c.

(1) Nếu $c < 1$ thì phương trình đặc trưng có hai nghiệm phức

$$\lambda_1 = c + i\sqrt{1 - c^2} = e^{i\theta}$$

và $\lambda_2 = c - i\sqrt{1 - c^2} = e^{-i\theta}$,

do đó, định lý 2.4 cho ta

$$h(x) = A\, cos\theta x + B \sin\theta x.$$

(2) Nếu $c = 1$ thì phương trình đặc trưng có nghiệm kép $\lambda = 1$ và $h(x) = Ax + B$.

(3) Nếu $c > 1$ thì phương trình đặc trưng có hai nghiệm phân biệt

$$\lambda_1 = c + \sqrt{c^2 - 1}$$

và

$$\lambda_2 = c - \sqrt{c^2 - 1}\,,$$

đồng thời $h(x) = A\,\lambda_1^x + B\lambda_2^x$.

Ba trường hợp trên tương ứng với các dạng của $f(x)$ như sau

$$\frac{A\, cos\theta x + B \sin\theta x}{x}, A + \frac{B}{x} \text{ và } \frac{A\,\lambda_1^x + B\lambda_2^x}{x}.$$

Bằng cách thay x bởi $\hat{S}_n$, ta sẽ nhận được Y_n như kết luận của mệnh đề 3.5. ■

Mệnh đề 3.4 và Mệnh đề 3.5 là điều kiện cần của định lý. Bằng cách kiểm chứng trực tiếp các quá trình Y_n trong Định lý 3.3 thỏa mãn phương trình martingale, ta có được điều đủ của Định lý 3.3.

4. KẾT LUẬN VÀ THẢO LUẬN

Martingale là một quá trình quan trọng trong lý thuyết xác suất. Vì vậy, việc xác định một quá trình maringale sinh bởi các quá trình khác là cần thiết. Nghiên cứu này đã đưa ra điều kiện cần và đủ để nhận được một martingale từ bước đi ngẫu nhiên có điều kiện, đồng thời chứng minh một cách chi tiết các điều kiện này.

Các martingale này khi được kết hợp với thời điểm dừng (stopping time), bài toán biên có thể suy ra được nhiều kết quả quan trọng như phân bố xác suất thoát khỏi miền nào đó, thời gian sống (lifetime) của bước đi ngẫu nhiên có điều kiện. Ngoài ra, một số kết quả tương tự có thể được mở rộng cho bước đi ngẫu nhiên có điều kiện nhiều chiều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bertoin, J., & Doney, R. A. (1994). On conditioning a random walk to stay nonnegative. *The Annals of Probability*, *22*(4), 2152-2167. https://doi.org/10.1214/aop/1176988497

Doney, R. A. (1983). A note on conditioned random walk. *Journal of Applied Probability*, *20*(2), 409-412. https://doi.org/10.2307/3213815

Durrett, R. (2019). *Probability: theory and examples* (Vol. 49). Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781108591034

Grimmett, G., & Stirzaker, D. (2020). *Probability and random processes*. Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/oso/9780198572237.001.0001

Hoai-Nhan, Le (2023). *Properties of One and Two Dimensional Random Walks: Simple and Conditioned.* Philosophy Thesis at National Central University (Taiwan).

Lawler, G. F., & Limic, V. (2010). *Random walk: a modern introduction*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511750854

Lawler, G. F. (2013). *Intersections of random walks*. Springer Science & Business Media https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5972-9

Thịnh, L.D; Châu, Đ.Đ; Định, L.Đ. & Hạp, P.V. (2001) *Phương trình sai phân và một số ứng dụng.* Nhà xuất bản Giáo dục.

Popov, S. (2021). *Two-dimensional random walk: from path counting to random interlacements*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/9781108680134

Spitzer, F. (2001). *Principles of random walk*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4229-9

Ville, J. (1939). *Etude critique de la notion de collectif*. Paris: Gauthier-Villars. https://doi.org/10.1007/978-3-031-05988-9_5