Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.367

CÁC CÔNG THỨC TÍNH TOÁN CỦA ĐẠO HÀM STUDNIARSKI-LIKE CHO ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Nguyễn Thanh Sang[1*], Nguyễn Yến Phi[2] và Huỳnh Văn Triệu[2]
[1]*Khoa Sư phạm và Xã hội Nhân văn, Trường Đại học Kiên Giang*
[2]*Sinh viên Khoa Sư phạm và Xã hội Nhân văn, Trường Đại học Kiên Giang*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): ntsang@vnkgu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 13/06/2024
Sửa bài (Revised): 04/06/2024
Duyệt đăng (Accepted): 08/08/2024

Title: *Calculus rules of the Studniarski-like for set-valued maps*

Author(s): *Nguyen Thanh Sang*, Nguyen Yen Phi and Huynh Van Trieu*

Affiliation(s): *Kien Giang University*

TÓM TẮT

Mục tiêu của bài báo này là nghiên cứu một số công thức tính toán của đạo hàm Studniarski-like cho ánh xạ đa trị. Bài báo áp dụng các định nghĩa của ánh xạ đa trị như định nghĩa của tính tồi, tính nửa liên tục dưới và tính pseudo-Lipschitz calm địa phương để suy ra các công thức tính toán của đạo hàm Studniarski-like như công thức tổng, công thức tích và công thức thương. Các kết quả trong bài báo là mới và được mở rộng từ các kết quả nghiên cứu trước đây. Các công thức tính toán trong bài báo này có thể được áp dụng để nghiên cứu độ nhạy nghiệm hoặc điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu đa trị.

Từ khoá: *Đạo hàm Studniarski-like, công thức tổng, công thức tích, công thức thương*

ABSTRACT

The article aims to study basic calculus rules for Studniarski-like's derivatives for set-valued maps. The article applies definitions of set-valued maps such as convexity, lower semicontinuity, and local pseudo-Lipschitz calmness to imply calculus rules for Studniarski-like's derivatives such as sum, product, and quotient. The results in the paper are new and are expanded from previous research results. The calculation formulas in this article can be applied to study solution sensitivity or optimal conditions of set-valued optimization problems.

Keywords: *Studniarski-like's derivatives, sum rule, product rule, quotient rule*

1. GIỚI THIỆU

Đạo hàm là một công cụ quan trọng để nghiên cứu các bài toán tối ưu nói chung. Khái niệm đạo hàm của hàm đơn trị theo nghĩa cổ điển đã được biết đến từ rất lâu trong các công trình của Fermat về việc nghiên cứu điều kiện cần cho cực trị của một hàm số bậc hai. Sau đó, nhiều nhà toán học đã mở rộng khái niệm đạo hàm cổ điển theo nhiều hướng khác nhau. Để nghiên cứu các bài toán quan trọng trong tối ưu đa trị, các nhà toán học đã giới thiệu nhiều dạng đạo hàm suy rộng cho ánh xạ đa trị như đạo hàm Bouligand (hay đạo hàm contingent), đạo hàm tiệm cận, đạo hàm Studniarski,… Thông thường, đạo hàm của ánh xạ đa trị là một công cụ hiệu quả để nghiên cứu các bài toán tối ưu đa trị thông qua cách tiếp cận bằng không gian nền và việc mở rộng đạo hàm đa trị trên không gian nền (từ cấp 1 lên cấp cao hơn) sẽ dễ dàng hơn trên không gian đối ngẫu (xét đối đạo hàm). Việc nghiên cứu các công thức tính toán của các dạng đạo hàm ánh xạ đa trị có ý nghĩa hết sức quan trọng trong việc nghiên cứu bài toán tối ưu đơn trị hoặc đa trị vì chúng là công cụ chính để nghiên cứu các bài toán thường gặp như nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu, phân tích độ nhạy nghiệm,…

Đạo hàm Studniarski được giới thiệu bởi Studniarski (1986) và thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của nhiều nhà toán học cho đến hiện nay. Đạo hàm Studniarski là một công cụ hữu ích để nghiên cứu một bài toán quan trọng trong lý thuyết tối ưu đơn trị là nghiên cứu các dạng điều kiện cần và đủ tối ưu. Để nghiên cứu các bài toán quan trọng khác của bài toán tối ưu đơn trị hoặc đa trị, các nhà toán học đã mở rộng phiên bản ban đầu của đạo hàm Studniarski cho ánh xạ đa trị. Họ đã giới thiệu nhiều công thức tính toán và áp dụng chúng để nghiên cứu các bài toán quan trọng như nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu, phân tích độ nhạy nghiệm,...

Trong thời gian gần đây, các công trình tiêu biểu của các nhà toán học có sử dụng đạo hàm Studniarski của ánh xạ đa trị như Sun and Li (2011, 2012). Wang (2013) đã nghiên cứu đạo hàm Studniarski của ánh xạ nhiễu trong bài toán tối ưu có tham số. Bên cạnh đó, Anh and Khanh (2014), Anh (2014), Diem et al. (2014) đã nghiên cứu các công thức tính toán của đạo hàm Studniarski, sau đó áp dụng để nghiên cứu điều kiện tối ưu cho các dạng nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu đa trị và phân tích độ nhạy nghiệm của các bài toán tối ưu liên quan. Tiếp theo, Anh (2017) đã nghiên cứu các công thức tính toán của đạo hàm Studniarski của ánh xạ đa trị và áp dụng nghiên cứu độ nhạy nghiệm của bài toán tối ưu đa trị. Gần đây, Tung (2020) đã nghiên cứu tính khả vi proto của ánh xạ nhiễu thông qua đạo hàm Studniarski.

Mặt khác, Durea and Florea (2018) đã giới thiệu một dạng khác của đạo hàm Studniarski đa trị mà họ gọi là đạo hàm Studniarski-like. Sau đó, các tác giả đã đưa ra một số công thức tính toán cho đạo hàm Studniarski-like và ứng dụng để nghiên cứu điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu đa trị. Đạo hàm Studniarski-like của ánh xạ đa trị có nhiều tính chất mới và khác biệt so với đạo hàm Studniarski của ánh xạ đa trị nên việc nghiên cứu các công thức tính toán cho Studniarski-like có ý nghĩa quan trọng để nghiên cứu các bài toán thường gặp trong lý thuyết tối ưu.

Bài báo này áp dụng kết quả về tính lồi, tính nửa liên tục dưới, tính pseudo-Lipschitz calm địa phương của ánh xạ đa trị để đưa ra các công thức tính toán cho đạo hàm Studniarski-like như công thức tổng, công thức tích và công thức thương. Các kết quả trong bài báo này là mới và khác với các kết quả trong bài báo của Anh and Khanh (2014). Việc nghiên cứu các công thức tính toán cho hàm đạo hàm Studniarski-like của ánh xạ đa trị là cần thiết vì chúng là công cụ hữu ích để nghiên cứu các dạng điều kiện tối ưu và phân tích độ nhạy nghiệm cho bài toán tối ưu đơn trị hoặc đa trị.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

2.1. Giải tích đa trị

Trong bài báo này, nếu không có giả thiết gì thêm thì ta giả sử X, Y, Z là các không gian định chuẩn thực và $C \subset Y$ là một nón lồi đóng. Với một tập con A của không gian định chuẩn, ta kí hiệu $\mathrm{cl}A$ để chỉ bao đóng của A. B_Y là để chỉ hình cầu đóng đơn vị trong Y. $N(x_0)$ là để chỉ họ của những lân cận của x_0 trong X và $N(y_0)$ là để chỉ họ của những lân cận của y_0 trong Y. Giả sử $\mathbb{N}$ là tập của những số tự nhiên, $\mathbb{R}$ là tập của những số thực và $\mathbb{R}^n_+$ là nón orthant dương của $\mathbb{R}^n$. Với ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ ánh xạ profile F_+ là được định nghĩa bởi

$$F_+(x) = F(x) + C, \ \forall x \in X.$$

Miền hữu hiệu, đồ thị và trên đồ thị của ánh xạ đa trị được định nghĩa như sau

$$\mathrm{dom}F = \{x \in X : F(x) \neq \varnothing\},$$

$$\mathrm{gr}F = \{(x,y) \in X \times Y : y \in F(x)\}, \ \mathrm{epi}F = \mathrm{gr}F_+.$$

Bao đóng của F, kí hiệu bởi $\mathrm{cl}F$, được định nghĩa như sau $\mathrm{gr}(\mathrm{cl}F) = \mathrm{cl}(\mathrm{gr}F)$. Nếu

$$(\mathrm{cl}F)(x) = F(x), \ \forall x \in X,$$

ta nói rằng F là đóng tại x.

Định nghĩa 2.1. (Anh & Khanh, 2014) Xét ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ và $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$. Khi đó

(i) F là ánh xạ lồi trên một tập tập lồi $S \subset X$ nếu với tất cả $\lambda \in [0,1]$ và $x_1, x_2 \in S$,

$$(1-\lambda)F(x_1) + \lambda F(x_2) \subset F((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2).$$

(ii) F là nửa liên tục dưới tại (x_0, y_0), nếu với mỗi $V \in N(y_0)$ thì tồn tại một lân cận $U \in N(x_0)$ sao cho với mỗi $x \in U$, $V \cap F(x) \neq \varnothing$.

(iii) F là pseudo-Lipschitz calm địa phương tại (x_0, y_0) nếu

$$\exists \lambda > 0,\ \exists U \in N(x_0),\ \exists V \in N(y_0),\ \forall x \in U,$$

$$F(x) \cap V \subset \{x_0\} + \lambda \| x - x_0 \| B_Y.$$

Nếu $V = Y$ thì pseudo-Lipschitz calm địa phương được gọi là Lipschitz calm địa phương.

2.2. Đạo hàm Studniarski-like của ánh xạ đa trị

Định nghĩa 2.2. (Durea & Florea, 2018) Xét ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ và $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$. Giả sử $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Khi đó

(i) Đạo hàm Studniarski-like cấp m của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi, $\forall u \in X$,

$$D^m F(x_0, y_0)(u) = \{v \in Y : \exists t_n \to 0^+,$$
$$\exists (u_n, v_n) \to (u, v),\ \forall n,\ y_0 + t_n v_n \in F(x_0 + t_n^m u_n)\}.$$

(ii) Đạo hàm Studniarski-like cấp m dạng adjacent của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi, $\forall u \in X$,

$$D_b^m F(x_0, y_0)(u) = \{v \in Y : \forall t_n \to 0^+,$$
$$\exists (u_n, v_n) \to (u, v),\ \forall n,\ y_0 + t_n v_n \in F(x_0 + t_n^m u_n)\}.$$

(iii) Đạo hàm Studniarski-like cấp m dạng lower của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi, $\forall u \in X$,

$$D_l^m F(x_0, y_0)(u) = \{v \in Y : \forall t_n \to 0^+,\ \forall u_n \to u,$$
$$\exists v_n \to v,\ \forall n,\ y_0 + t_n v_n \in F(x_0 + t_n^m u_n)\}.$$

Chú ý 2.1. Đạo hàm Studniarski-like cấp m của F tại (x_0, y_0) là khác với đạo hàm Studniarski cấp m giới thiệu trong bài báo của Anh and Khanh (2014).

Định nghĩa 2.3. Xét ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ và $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Đạo hàm Studniarski cấp m của F tại (x_0, y_0) được định nghĩa bởi, $\forall u \in X$,

$$d^m F(x_0, y_0)(u) = \{v \in Y : \exists t_n \to 0^+,$$
$$\exists (u_n, v_n) \to (u, v), \forall n, y_0 + t_n^m t_n v_n \in F(x_0 + t_n u_n)\}.$$

Ví dụ sau đây sẽ chứng tỏ rằng đạo hàm Studniarski cấp m là khác với đạo hàm Studniarski-like cấp m.

Ví dụ 2.1. Xét ánh xạ đa trị $F: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi $F(x) = \{y \in \mathbb{R} : y = x^3\},\ \forall x \in \mathbb{R}.$. Ta có

$$d^3 F(0,0)(x) = \{y \in \mathbb{R} : y = x^3\},\ \forall x \in \mathbb{R}$$

và $D^3 F(0,0)(x) = \{0\},\ \forall x \in \mathbb{R}.$

Chú ý 2.2. (Durea & Florea, 2018) Xét ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ và $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$. Giả sử $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Ta có

$$D^m F(x_0, y_0)(u) \supset D_b^m F(x_0, y_0)(u)$$
$$\supset D_l^m F(x_0, y_0)(u),\ \forall u \in X.$$

Định nghĩa 2.3. (Durea & Florea, 2018) Xét ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ và $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$. Giả sử $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Khi đó

(i) F được gọi là khả vi proto Studniarski-like cấp m tại (x_0, y_0) nếu

$$D_b^m F(x_0, y_0)(u) = D^m F(x_0, y_0)(u),\ \forall u \in X.$$

(ii) F được gọi là khả vi semi Studniarski-like cấp m tại (x_0, y_0) nếu

$$D_l^m F(x_0, y_0)(u) = D^m F(x_0, y_0)(u),\ \forall u \in X.$$

Mệnh đề 2.1. Xét ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ và $(x_0, y_0) \in \mathrm{gr}F$. Giả sử $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, không gian Y là hữu hạn chiều và x_0 thuộc phần trong của $\mathrm{dom}F$. Nếu các điều kiện sau xảy ra

(i) F là nửa liên tục dưới tại (x_0, y_0);

(ii) F là pseudo-Lipschitz calm địa phương tại (x_0, y_0).

Khi đó, $D^m F(x_0, y_0)(x) \neq \varnothing,\ \forall x \in X.$

Chứng minh. Với $x = 0$ thì hiển nhiên ta có $0 \in D^m F(x_0, y_0)(0)$. Bởi giả thiết (ii), tồn tại

$\lambda > 0,\ U_1 \in N(x_0)$ và $V \in N(y_0)$ thỏa mãn, với tất cả $x' \in U_1$,

$$F(x') \cap V \subset \{y_0\} + \lambda \| x' - x_0 \| B_Y.$$

Bởi giả thiết (i), có tồn tại $U_2 \in N(x_0)$ thỏa mãn $\forall \hat{x} \in U_2,\ V \cap F(\hat{x}) \neq \varnothing$. Bởi đặt $\hat{U} = U_1 \cap U_2$, ta được $\hat{U} \in N(x_0)$. Lấy bất kỳ $x \in X,\ x \neq 0,\ t_n \to 0^+$. Bởi vì $x_0 + t_n^m x \to x_0$, ta được $x_0 + t_n^m x \in \hat{U}$, với n đủ lớn. Do đó, tồn tại $y_n \in F(x_0 + t_n^m x) \cap V$ thoả mãn $\dfrac{\| y - y_0 \|}{t_n} \leq \lambda \| x \|$. Do đó, ta suy ra $\dfrac{y_n - y_0}{t_n}$ là một dãy bị chặn nên tồn tại một dãy con hội tụ. Theo định nghĩa thì giới hạn của dãy con này là một phần tử thuộc vào $D^m F\left(x_0, y_0\right)(x),\ \forall x \in X$. □

Ví dụ sau chứng tỏ rằng tính nửa liên tục dưới của ánh xạ đa trị F tại $\left(x_0, y_0\right)$ trong Mệnh đề 2.1 là không bỏ được.

Ví dụ 2.2. Xét các ánh xạ đa trị $F: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} \varnothing, & \text{khi } x \neq 0, \\ \{0\}, & \text{khi } x = 0. \end{cases}$$

Ta có ánh xạ F là Lipschitz calm địa phương trong lân cận của 0. Tuy nhiên, ta có $D^2 F\left(0,0\right)\left(x\right) = \varnothing$, với mọi $x \neq 0$. Điều này xảy ra vì F không nửa liên tục dưới tại 0.

Mệnh đề 2.2. Xét ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ và $\left(x_0, y_0\right) \in \operatorname{gr}F$. Giả sử $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, F là ánh xạ đa trị lồi và F có đạo hàm Studniarski-like cấp m dạng adjacent tại $\left(x_0, y_0\right)$. Khi đó $D^m F\left(x_0, y_0\right)$ là tập lồi.

Chứng minh. Giả sử $x^1, x^2 \in X$ và $y_i \in D^m F(x_0, y_0)(x^i),\ i = 1, 2$. Từ đây suy ra, với bất kỳ $t_n \to 0^+$, có tồn tại $(x_n^i, y_n^i) \to (x^i, y^i)$ thỏa mãn, với tất cả n, $y_n^i \in \dfrac{F(x_0 + t_n^m x_n^i) - y_0}{t_n}$. Vì F là lồi, với tất cả $\lambda \in [0,1]$,

$$\lambda.\left(\frac{F(x_0 + t_n^m x_n^1) - y_0}{t_n}\right)$$
$$+(1-\lambda).\left(\frac{F(x_0 + t_n^m x_n^2) - y_0}{t_n}\right)$$
$$\subset \frac{F\left(\lambda.(x_0 + t_n^m x_n^1) - (1-\lambda).(x_0 + t_n^m x_n^2)\right) - y_0}{t_n}.$$

Do đó, ta có

$$\lambda.y_n^1 + (1-\lambda).y_n^2 \in \frac{F\left(x_0 + t_n^m(\lambda x_n^1 + (1-\lambda).x_n^2)\right) - y_0}{t_n}.$$

Từ đây, ta suy ra

$$\lambda.y^1 + (1-\lambda).y^2 \in D^m F\left(x_0, y_0\right)\left(\lambda.x^1 + (1-\lambda).x^2\right). \ \square$$

Mệnh đề 2.3. Xét ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ và $\left(x_0, y_0\right) \in \operatorname{gr}F,\ m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Khi đó với bất kỳ $u \in X$, ta có

$$D^m F\left(x_0, y_0\right)(x) + C \subset D^m F_+\left(x_0, y_0\right)(x). \quad (2.1)$$

Hơn nữa, nếu không gian Y là hữu hạn chiều và F là Lipschitz calm địa phương tại $\left(x_0, y_0\right)$ thì (2.1) trở thành đẳng thức.

Chứng minh. Giả sử $w \in D^m F\left(x_0, y_0\right)(x) + C$, có tồn tại $v \in D^m F\left(x_0, y_0\right)(x)$ và $c \in C$ thỏa mãn $w = v + c$. Từ $v \in D^m F\left(x_0, y_0\right)(x)$, suy ra có tồn tại $t_n \to 0^+,\ x_n \to x$ và $v_n \to v$ thỏa mãn, với tất cả n,

$$y_0 + t_n(v_n + c) \in F(x_0 + t_n^m x_n) + t_n c$$
$$\subset F(x_0 + t_n^m x_n) + C.$$

Do đó ta có $v + c \in D^m F_+\left(x_0, y_0\right)(x)$.

Đặt $v \in D^m F_+\left(x_0, y_0\right)(x)$, thì có tồn tại $t_n \to 0^+,\ x_n \to x$ và $w_n \to w$ thỏa mãn, với tất cả n, $y_0 + t_n w_n \in F(x_0 + t_n^m x_n) + C$. Từ đây suy ra có tồn tại $y_n \in F(x_0 + t_n^m x_n)$ và $c_n \in C$ thỏa mãn

$$w_n = \frac{y_n - y_0}{t_n} + \frac{c_n}{t_n}. \quad (2.2)$$

Bởi vì F là Lipschitz calm địa phương tại $\left(x_0, y_0\right)$, nên tồn tại $\lambda > 0$ thỏa mãn, với n đủ lớn,

$$y_n \in F(x_0 + t_n^m x_n) \subset \{y_0\} + \lambda \| t_n x_n \| B_Y.$$

Điều này suy ra rằng

$$\frac{\| y_n - y_0 \|}{t_n} \le \lambda \| x_n \|.$$

Vì không gian Y là hữu hạn chiều nên ta suy ra $\dfrac{\| y_n - y_0 \|}{t_n}$ hội tụ đến v và $v \in D^m F(x_0, y_0)(x)$. Từ (2.2), ta suy ra $\dfrac{c_n}{t_n}$ hội tụ đến $c \in C$ và $w = v + c$. Do đó, ta có $w \in D^m F(x_0, y_0)(x) + C$. □

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng chiều ngược lại trong bao hàm thức (2.1) là không đúng, nghĩa là

$$D^m F_+(x_0, y_0)(x) \not\subset D^m F(x_0, y_0)(x) + C.$$

Ví dụ 2.3. Xét các ánh xạ đa trị $F: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F(x) = \begin{cases} \{0\}, & \text{khi } x \le 0, \\ \{-1, \sqrt{x}\}, & \text{khi } x > 0. \end{cases}$$

Ta giả sử $C = \mathbb{R}_+$. Khi đó, với mọi $x > 0$, ta có $D^2 F(0,0)(x) = \{\sqrt{x}\}$ và $D^2(F + C)(0,0)(x) = \mathbb{R}$. Do đó, với mọi $x > 0$, ta có

$$D^2 F_+(0,0)(x) \not\subset D^2 F(0,0)(x) + C.$$

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Mệnh đề 3.1 (Công thức tổng). Đặt $F_1, F_2: X \rightrightarrows Y$, $x_0 \in \operatorname{dom} F_1 \cap \operatorname{dom} F_2$, $y_i \in F(x_0)$, với $i = 1,2$ và $u \in X$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Giả sử một trong hai trường hợp sau xảy ra hoặc F_1 có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (x_0, y_1) hoặc F_2 có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (x_0, y_2). Khi đó

$$D^m F_1(x_0, y_1)(u) + D^m F_2(x_0, y_2)(u) \subset D^m (F_1 + F_2)(x_0, y_1 + y_2)(u). \quad (3.1)$$

Nếu hơn nữa không gian Y là hữu hạn chiều và một trong hai trường hợp sau xảy ra hoặc F_1 là Lipschitz calm địa phương tại (x_0, y_1) hoặc F_2 là Lipschitz calm địa phương tại (x_0, y_2) thì (3.1) trở thành đẳng thức.

Chứng minh. Giả sử F_2 có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (x_0, y_2) và $v_i \in D^m F_i(x_0, y_i)(u)$, $i = 1,2$. Với v^1, có tồn tại $t_n \to 0^+$, $u_n \to u$ và $v_n^1 \to v_1$ thỏa mãn

$$y_1 + t_n v_n^1 \in F_1(x_0 + t_n^m u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Với những t_n và u_n, có tồn tại $v_n^2 \to v^2$ thỏa mãn

$$y_2 + t_n v_n^2 \in F_2(x_0 + t_n^m u_n), \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó, ta có

$$y_1 + y_2 + t_n(v_n^1 + v_n^2) \in (F_1 + F_2)(x_0 + t_n^m u_n)$$

và $v^1 + v^2 \in D^m (F_1 + F_2)(x_0, y_1 + y_2)(u)$.

Tiếp theo, ta chứng minh trường hợp xảy ra đẳng thức. Giả sử rằng F_1 là Lipschitz calm địa phương tại (x_0, y_1). Đặt

$$v \in D^m (F_1 + F_2)(x_0, y_1 + y_2)(u),$$

thì tồn tại $t_n \to 0^+$, $u_n \to u$ và $v_n \to v$ thỏa mãn, với tất cả n,

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + t_n v_n &\in (F_1 + F_2)(x_0 + t_n^m u_n) \\ &= F_1(x_0 + t_n^m u_n) + F_2(x_0 + t_n^m u_n). \end{aligned}$$

Điều này suy ra rằng tồn tại

$$y_n^i \in D^m F_i(x_0 + t_n^m u_n)(u), \ i = 1,2$$

thỏa mãn

$$v_n = \frac{y_n^1 - y_1}{t_n} + \frac{y_n^2 - y_2}{t_n}.$$

Chứng minh tương tự như trong mệnh đề 2.1 và 2.3, ta nhận được $v^1 \in D^m (F_1)(x_0, y_1)(u)$ và $v^2 \in D^m F_2(x_0, y_2)(u)$ thỏa mãn $v^2 = v - v^1$. Do đó, ta có

$$v \in D^m F_1(x_0, y_1)(u) + D^m F_2(x_0, y_2)(u). \quad □$$

Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng sự tồn tại đạo hàm semi Studniarski-like cấp m của F_1 hoặc F_2 là cần thiết để có bao hàm thức (3.1).

Ví dụ 3.1. Xét các ánh xạ đa trị $F_1, F_2: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ xác định bởi

$$F_1(x)=\begin{cases}\{1\}, \text{ khi } x=\frac{1}{n},\ n=1,2,...\\ \{0\}, \text{ khi } x=0\end{cases}$$

và

$$F_2(x)=\begin{cases}\{0\}, \text{ khi } x=\frac{1}{n},\ n=1,2,...\\ \{1\}, \text{ khi } x=0.\end{cases}$$

Ta thấy rằng F_1 không có đạo hàm semi Studniarski-like cấp 1 tại $(0,0)$ và F_2 không có đạo hàm semi Studniarski-like cấp 1 tại $(0,1)$. Ta có $DF_1(0,0)(0)=\mathbb{R}$ và $DF_2(0,1)(0)=\mathbb{R}$. Mặt khác, ta có

$$(F_1+F_2)(x)=\begin{cases}\{1\}, \text{ khi } x=\frac{1}{n},\ n=1,2,...\\ \{1\}, \text{ khi } x=0.\end{cases}$$

Để ý rằng, ta có $D(F_1+F_2)(0,1)(0)=\mathbb{R}$. Do đó, ta có (3.1) không xảy ra.

Mệnh đề 3.2 (Công thức của hàm hợp). Đặt

$$F: X \rightrightarrows Y,\ G: Y \rightrightarrows Z,\ (x_0,y_0)\in \text{gr}F,$$
$$(y_0,z_0)\in \text{gr}G,\ \ \text{im}F\subset \text{dom}G \text{ và } u\in X,\ m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}.$$

Giả sử rằng G có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (y_0,z_0) thì

$$D^1G(y_0,z_0)(D^mF(x_0,y_0)(u)) \subset D^m(G\circ F)(x_0,z_0)(u). \quad (3.2)$$

Nếu hơn nữa không gian Y là hữu hạn chiều và F là Lipschitz calm địa phương tại (x_0,y_0) thì (3.2) trở thành đẳng thức.

Chứng minh. Giả sử

$$w\in D^1G(y_0,z_0)(D^mF(x_0,y_0)(u)).$$

Do đó có tồn tại $v\in D^mF(x_0,y_0)(u)$, thỏa mãn $w\in D^1G(y_0,z_0)(v)$. Vì vậy tồn tại

$$t_n\to 0^+,\ u_n\to u \text{ và } v_n\to v$$

thỏa mãn, với tất cả n,

$$y_0+t_nv_n\in F(x_0+t_n^mu_n).$$

Với t_n, u_n, ta có $w_n\to w$ thỏa mãn, với tất cả n,

$$z_0+t_nw_n\in G(y_0+t_nv_n).$$

Nên $z_0+t_nw_n\in G(F(x_0+t_n^mu_n))$. Do đó,

$$w\in D^m(G\circ F)(x_0,z_0)(u).$$

Giả sử $w\in D^m(G\circ F)(x_0,z_0)(u)$, tồn tại $t_n\to 0^+$, $u_n\to u$ và $w_n\to w$ thỏa mãn, với tất cả n, $z_0+t_nw_n\in G(F(x_0+t_n^mu_n))$. Điều này suy ra rằng tồn tại $y_n\in F(x_0+t_n^mu_n)$ thỏa mãn $z_0+t_nw_n\in G(y_n)$. Nhờ vào tính Lipschitz calm địa phương của F và Y là hữu hạn chiều, dãy $v_n=\frac{y_n-y_0}{t_n}$ hội tụ đến v và

$$v\in D^mF(x_0,y_0)(u).$$

Điều này suy ra rằng $z_0+t_nw_n\in G(y_0+t_nv_n)$ và do đó $w\in D^1G(y_0,z_0)(v)$. □

Định nghĩa 3.1. Giả sử $F_1,F_2: X\rightrightarrows\mathbb{R}^k$, $\mathbb{R}^k$ là không gian Euclide, tích của ánh xạ đa trị F_1 và F_2 là ánh xạ đa trị $\langle F_1,F_2\rangle: X\rightrightarrows\mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$\langle F_1,F_2\rangle(x)=\{\langle y_1,y_2\rangle: y_1\in F_1(x), y_2\in F_2(x)\}.$$

Mệnh đề 3.3 (Công thức tích). Đặt

$$F_1,F_2: X\rightrightarrows\mathbb{R}^k, x_0\in\text{dom}F_1\cap\text{dom}F_2,\ y_i\in F(x_0),$$

với $i=1,2$ và $u\in X$, $m\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Giả sử một trong hai trường hợp sau xảy ra hoặc F_1 có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (x_0,y_1) hoặc F_2 có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (x_0,y_2). Khi đó

$$\langle y_2, D^mF_1(x_0,y_1)(u)\rangle+\langle y_1, D^mF_2(x_0,y_2)(u)\rangle \subset D^m(\langle F_1,F_2\rangle)(x_0,\langle y_1,y_2\rangle)(u). \quad (3.3)$$

Nếu hơn nữa F_1 là Lipschitz calm địa phương tại (x_0,y_1) và F_2 là Lipschitz calm địa phương tại (x_0,y_2) thì (3.3) trở thành đẳng thức.

Chứng minh. Giả sử rằng F_2 có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (x_0,y_2) và

$$v_i\in D^mF_i(x_0,y_i)(u),\ i=1,2.$$

Khi đó tồn tại $t_n \to 0^+$, $u_n \to u$, $v_n^1 \to v^1$ và $v_n^2 \to v^2$ thỏa mãn với tất cả n,

$$y_1 + t_n v_n^1 \in F_1(x_0 + t_n^m u_n)$$

$$\text{và } y_2 + t_n v_n^2 \in F_2(x_0 + t_n^m u_n).$$

Ta có

$$\begin{aligned}&\left\langle y_1 + t_n v_n^1, y_2 + t_n v_n^2 \right\rangle = \left\langle y_1, y_2 \right\rangle \\ &+t_n \left(\left\langle y_1, v_n^2 \right\rangle + \left\langle y_2, v_n^1 \right\rangle + t_n \left\langle v_n^1, v_n^2 \right\rangle \right),\end{aligned}$$

và

$$\left\langle y_1 + t_n v_n^1, y_2 + t_n v_n^2 \right\rangle \in \left\langle F_1, F_2 \right\rangle (x_0 + t_n^m u_n).$$

Điều này suy ra

$$\left\langle y_1, v^2 \right\rangle + \left\langle y_2, v^1 \right\rangle \in D^m(\left\langle F_1, F_2 \right\rangle)(x_0, \left\langle y_1, y_2 \right\rangle)(u).$$

Giả sử $v \in D^m(\left\langle F_1, F_2 \right\rangle)(x_0, \left\langle y_1, y_2 \right\rangle)(u)$, thì tồn tại $t_n \to 0^+$, $u_n \to u$, $v_n^1 \to v^1$ và $y_n^i \in F_i(x_0 + t_n^m u_n)$ thỏa mãn $\left\langle y_1, y_2 \right\rangle + t_n v_n = \left\langle y_n^1, y_n^2 \right\rangle$ với tất cả n. Ta có

$$\begin{aligned}&\left\langle y_n^1, y_n^2 \right\rangle = \left\langle y_n^1 - y_1 + y_1, y_n^2 - y_2 + y_2 \right\rangle \\ &= \left\langle y_n^1 - y_1, y_n^2 - y_2 \right\rangle + \left\langle y_n^1 - y_1, y_2 \right\rangle \\ &+ \left\langle y_n^2 - y_2, y_1 \right\rangle + \left\langle y_1, y_2 \right\rangle.\end{aligned}$$

Điều này suy ra rằng

$$\begin{aligned}v_n &= \left\langle \frac{y_n^1 - y_1}{t_n}, y_2 \right\rangle + \left\langle \frac{y_n^2 - y_2}{t_n}, y_1 \right\rangle \\ &+ t_n \left\langle \frac{y_n^1 - y_1}{t_n}, \frac{y_n^2 - y_2}{t_n} \right\rangle. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

Bởi vì F_i là Lipschitz calm địa phương tại (x_0, y_i) nên tồn tại $L_i > 0$ thỏa mãn với $i = 1,2$ và n đủ lớn,

$$y_n^i \in F_i(x_0 + t_n^m u_n) \subset \{y_i\} + L_i \| t_n u_n \| B_Y.$$

Điều này suy ra rằng tồn tại một dãy con $\{n_k\}$ thỏa mãn $\frac{y_{n_k}^i - y_i}{t_{n_k}}$ hội tụ đến $v^i \in \mathbb{R}^k$ và

$$v^i \in D^m F_i(x_0, y_i)(u),\ i = 1,2.$$

Do đó, từ (3.4) ta suy ra rằng

$$v \in \left\langle y_2, D^m F_1(x_0, y_1)(u) \right\rangle + \left\langle y_1, D^m F_2(x_0, y_2)(u) \right\rangle. \ \square$$

Định nghĩa 3.2. Giả sử $\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}: \boldsymbol{X} \rightrightarrows \mathbb{R}$, thương của ánh xạ đa trị F_1 và F_2 là ánh xạ đa trị $\frac{F_1}{F_2}: X \rightrightarrows \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi

$$\frac{F_1}{F_2}(x) = \left\{ \frac{y_1}{y_2} : y_1 \in F_1(x), y_2 \in F_2(x), y_2 \neq 0 \right\}.$$

Mệnh đề 3.4 (Công thức thương). Đặt $F_1, F_2: X \rightrightarrows \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{dom}F_1 \cap \text{dom}F_2$, $y_i \in F(x_0)$, với $i = 1,2$ với $y_2 \neq 0$ và $u \in X$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Giả sử một trong hai trường hợp sau xảy ra hoặc F_1 có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (x_0, y_1) hoặc F_2 có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (x_0, y_2). Khi đó

$$\begin{aligned}&\frac{1}{y_2^2}\left(y_2 D^m F_1(x_0, y_1)(u) - y_1 D^m F_2(x_0, y_2)(u) \right) \\ &\subset D^m \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \left(x_0, \frac{y_1}{y_2} \right)(u). \qquad (3.5)\end{aligned}$$

Hơn nữa, nếu F_1 là Lipschitz calm địa phương tại (x_0, y_1) và F_2 là Lipschitz calm địa phương tại (x_0, y_2) thì (3.3) trở thành đẳng thức.

Chứng minh. Giả sử rằng F_2 có đạo hàm semi Studniarski-like cấp m tại (x_0, y_2) và

$$v_i \in D^m F_i(x_0, y_i)(u),\ i = 1,2.$$

Khi đó tồn tại $t_n \to 0^+$, $u_n \to u$, $v_n^1 \to v^1$ và $v_n^2 \to v^2$ thỏa mãn, với tất cả n,

$$y_1 + t_n v_n^1 \in F_1(x_0 + t_n^m u_n)$$

$$\text{và } y_2 + t_n v_n^2 \in F_2(x_0 + t_n^m u_n).$$

Ta có

$$\frac{y_1 + t_n v_n^1}{y_2 + t_n v_n^2} = \frac{y_1}{y_2} + t_n \left(\frac{y_2 v_n^1 - y_1 v_n^2}{y_2^2 + t_n v_n^2 y_2} \right) \in \frac{F_1}{F_2}(x_0 + t_n^m u_n).$$

Điều này suy ra rằng

$$\frac{y_2 v^1 - y_1 v^2}{y_2^2} \in D^m \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \left(x_0, \frac{y_1}{y_2} \right)(u).$$

Giả sử rằng $v \in D^m\left(\frac{F_1}{F_2}\right)\left(x_0, \frac{y_1}{y_2}\right)(u)$. Suy ra có tồn tại $t_n \to 0^+$, $u_n \to u$, $v_n \to v$ và $v_n^2 \to v^2$ thỏa mãn với tất cả n,

$$\frac{y_1}{y_2} + t_n v_n \in \frac{F_1}{F_2}(x_0 + t_n^m u_n).$$

Nên có tồn tại $y_n^i \in F_i(x_0 + t_n^m u_n)$ thỏa mãn

$$\frac{y_1}{y_2} + t_n v_n = \frac{y_n^1}{y_n^2}.$$

Do đó, ta có

$$\frac{y_n^1}{y_n^2} = \frac{y_1}{y_2} + \frac{y_2(y_n^1 - y_1) - y_1(y_n^2 - y_2)}{y_2^2 + y_2(y_n^2 - y_2)}.$$

Từ đây, ta suy ra

$$v_n = \frac{\frac{y_2(y_n^1 - y_1)}{t_n} - \frac{y_1(y_n^2 - y_2)}{t_n}}{y_2^2 + \frac{t_n y_2(y_n^2 - y_2)}{t_n}}.$$

Bởi vì F_i là Lipschitz calm địa phương tại (x_0, y_i), ta suy $v^1 \in D^m F_1(x_0, y_1)(u)$ và $v^2 \in D^m F_2(x_0, y_2)(u)$ thỏa mãn

$$v = \frac{y_2 v^1 - y_1 v^2}{y_2^2}.$$

Do đó, ta có

$$v \in \frac{1}{y_2^2}\left(y_2 D^m F_1(x_0, y_1)(u) - y_1 D^m F_2(x_0, y_2)(u)\right). \quad \square$$

4. KẾT LUẬN

Các kết quả trong bài báo này là mới và khác với kết quả trong bài báo của Anh and Khanh (2014) bởi vì đạo hàm Studniarski-like khác với đạo hàm Studniarski. Trong định hướng tiếp theo, các công thức tính toán của đạo hàm Studniarski-like sẽ được áp dụng để nghiên cứu điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu đa trị, cũng như phân tích độ nhạy nghiệm của bài toán tối ưu đa trị với tham số.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, N. L. H., & Khanh, P. Q. (2014). Calculus and applications of Studniarski's derivatives to sensitivity and implicit function theorems. *Control and Cybernetics. 43*, 33–57.

Anh, N. L. H. (2014). Higher-order optimaltity conditions in set-valued optimization using Studniarski derivatives and applications to duality. *Positivity, 18*, 449-473. https://doi.org/10.1007/s11117-013-0254-4

Anh, N. L. H. (2017). Sensitivity analysis in constrained set-valued optimization via Studniarski derivatives. *Positivity, 21*, 255-272. https://doi.org/10.1007/s11117-016-0418-0

Diem, H. T. H., Khanh, P. Q., & Tung, L. T. (2014). On higher-order sensitivity analysis in nonsmooth vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications, 162*, 463–488. https://doi.org/10.1007/s10957-013-0424-3

Durea, M., & Florea, E. A. (2018). Calculus of some higher-order derivatives for set-valued mappings and applications to generalized vector optimization. *Pacific Journal of Optimization, 14*, 431-449

Studniarski, M. (1986). Necessary and sufficient conditions for isolated local minima of nonsmooth functions. *SIAM Journal on Control and Optimization, 25*, 1044–1049. https://doi.org/10.1137/0324061

Sun, X. K., & Li, S. J. (2011). Lower Studniarski derivative of the perturbation map in parametrized vector optimization. *Optimization Letters, 5*, 601–614. https://doi.org/10.1007/s11590-010-0223-9

Sun, X. K., & Li, S. J. (2012). Weak lower Studniarski derivative in set-valued optimization. *Pacific Journal of Optimization, 8*, 307–320.

Tung, L. T. (2020). On higher-order proto-differentiability of perturbation mapss. *Positivity, 24*, 441–462. https://doi.org/10.1007/s11117-019-00689-x

Wang, Q. N. (2013). A note on lower Studniarski derivative of the perturbation map in parameterized vector optimization. *Optimization Letters, 7*, 985–990. https://doi.org/10.1007/s11590-012-0478-4