Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.380

TÍNH ĐÓNG VÀ TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA NGHIỆM HỮU HIỆU BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTOR

Nguyễn Thái Anh[1], Thái Thị Mỹ Hồng[2], Nguyễn Thị Yến Nhi[2], Trần Ngọc Tâm[2*] và Nguyễn Khánh Vy[2]
[1]Bộ môn Toán, Trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long
[2]Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): tntam@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 12/06/2024
Sửa bài (Revised): 15/07/2024
Duyệt đăng (Accepted): 08/08/2024

Title: *On closedness and upper semicontinuity of efficient solutions of vector equilibrium problems*

Author(s): *Nguyen Thai Anh[1], Thai Thi My Hong[2], Nguyen Thi Yen Nhi[2], Tran Ngoc Tam[2,*] and Nguyen Khanh Vy[2]*

Affiliation(s): *[1]Nguyen Binh Khiem Specialized High School, Vinh Long Province; [2]Can Tho University*

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu bài toán cân bằng vector trong không gian định chuẩn. Trước hết, bài báo đưa ra các điều kiện đủ cho tính đóng của tập nghiệm hữu hiệu của bài toán đang xét. Tiếp theo, bài báo khảo sát một số tính chất hữu dụng của một hàm vô hướng hoá phi tuyến dạng Hiriart-Urruty mở rộng đã được giới thiệu trong tài liệu. Các tính chất này được dùng để thiết lập các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm hữu hiệu cho bài toán đang xét khi dữ liệu của bài toán bị nhiễu.

Từ khoá: *Bài toán cân bằng vector, Hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty, Tính đóng của tập nghiệm, Tính nửa liên tục*

ABSTRACT

This paper studies vector equilibrium problems in normed spaces. Firstly, the paper provides sufficient conditions for the closedness of efficient solution sets of reference problems. Subsequently, the paper studies the useful properties of a nonlinear scalarization function in the sense of generalized oriented Hiriart-Urruty introduced in the literature. These properties are utilized to establish sufficient conditions for the upper semicontinuity of efficient solution maps of the considered problems when the data are perturbed.

Keywords: *Vector equilibrium problem, Hiriart-Urruty oriented distance function, Closedness of solution sets, Semicontinuity*

1. GIỚI THIỆU

Trong nhiều năm qua, bài toán cân bằng vector nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học trên khắp thế giới bởi vì mô hình của bài toán này đơn giản nhưng chứa rất nhiều vấn đề quan trọng trong tối ưu như bài toán tối ưu vector, bài toán bất đẳng thức biến phân vector, bài toán cân bằng Nash,… (Kassay & Radulescu, 2018). Chủ đề quan trọng hàng đầu và phát triển nhất của mô hình này là sự tồn tại nghiệm (Bianchi et al., 2007; László, 2016; Farajzadeh et al., 2019). Chủ đề quan trọng tiếp theo là chủ đề tính ổn định nghiệm (Xu & Li, 2009; Han & Gong, 2014; Anh et al., 2021). Một số chủ đề quan trọng khác cũng được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu như phương pháp giải nghiệm, tính đặt chỉnh (Khanh et al., 2014; Chadli et al., 2017; Han & Huang, 2017; Iusem & Mohebbi, 2019; Anh et al., 2020).

Trong chủ đề về tính ổn định nghiệm thì tính nửa liên tục và liên tục theo các nghĩa Berge và

Hausdorff cho ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng và các mô hình khác nhận được nhiều sự quan tâm của các nhà nghiên cứu (Chen et al., 2010; Sach & Tuan, 2016; Anh et al., 2019; Tam, 2024). Khi nghiên cứu về chủ đề này cho các mô hình vector, các tác giả thường sử dụng nhiều phương pháp khác nhau, trong đó phương pháp vô hướng hóa tuyến tính là một trong những công cụ được dùng rất nhiều. Tuy nhiên, nhược điểm của phương pháp là nó đòi hỏi các giả thiết liên quan đến hàm mục tiêu, tập ràng buộc phải lồi và thường có hiệu quả đối với nghiệm hữu hiệu yếu. Gần đây, phương pháp vô hướng hóa phi tuyến được các nhà nghiên cứu sử dụng rất hiệu quả để khảo sát tính chất cho các nghiệm của các bài toán trong tối ưu với mô hình vector. Các tính chất đẹp của phương pháp này có thể khắc phục hầu hết các điều kiện khó đạt được khi khảo sát bằng phương pháp vô hướng hóa tuyến tính. Hai công cụ phổ biến được sử dụng trong phương pháp này là hàm vô hướng dạng Gerstewitz và hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty (Eichfelder, 2014; Xu & Zhang, 2018; Anh et al., 2023).

Qua tìm hiểu các tài liệu, khi xem xét mô hình bài toán cân bằng vector phụ thuộc tham số, đa số các công trình đều khảo sát nghiệm hữu hiệu yếu và dựa vào tính không rỗng của phần trong nón thứ tự trong không gian đích. Tuy nhiên, trong nhiều trường hợp, nón thứ tự lại có phần trong bằng rỗng, chẳng hạn như các nón dương trong không gian định chuẩn l^p và $L^p(\Omega)$ với $1 < p < +\infty$ đều có phần trong bằng rỗng. Nghiệm hữu hiệu thì không đòi hỏi tính khác rỗng của phần trong nón thứ tự và loại nghiệm này mang nhiều ý nghĩa thực tế hơn nghiệm yếu. Vì thế việc xem xét và nghiên cứu về nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vector là quan trọng và mang lại nhiều ý nghĩa khác nhau.

Từ những phân tích trên, mục tiêu của bài báo này là nghiên cứu các điều kiện đủ cho tính đóng của tập nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vector và tính nửa liên tục trên cho ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng vector phụ thuộc tham số. Cần chú ý thêm rằng, tính đóng và tính nửa liên tục trên của nghiệm yếu bài toán cân bằng vector sẽ dễ đạt được với điều kiện tương đối nhẹ. Tuy nhiên, đối với nghiệm hữu hiệu thì để đạt được tính đóng và tính nửa liên tục trên của nghiệm thì các điều kiện tương đối chặt hơn. Lí do ở đây là chúng ta không còn tính mở của phần trong nón thứ tự nữa.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, nếu không phát biểu gì thêm, ta xét X, Y là các không gian định chuẩn với ký hiệu chuẩn là $\|\cdot\|$. Tập tất cả các tập con khác rỗng trong không gian định chuẩn Y được ký hiệu là $\mathcal{P}(Y)$. Với $M \in \mathcal{P}(Y)$, phần trong, bao đóng, biên của M được ký hiệu lần lượt là $\mathrm{int}\, M, \mathrm{cl}M, \partial M$. Ký hiệu $d_M(y) \coloneqq \inf_{z \in M} \|y - z\|$ là khoảng cách từ điểm y đến tập M và quy ước $d_\emptyset(y) = +\infty$. Các ký hiệu $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+$ và $\mathbb{R}_{++}$ lần lượt là tập hợp tất cả các số thực, các số thực không âm và các số thực dương. Xét một tập con A của Y, ta nói rằng A là tập đóng nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subset A, x_n \to x_0$ thì $x_0 \in A$; là compact nếu với mọi phủ mở $\bigcup_{i \in I} G_i$ của A đều có một phủ con hữu hạn $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ của A; A được gọi là một tập lồi với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in A$ và với mọi $t \in [0,1]$ thì $(1-t)x_1 + tx_2 \in A$. Một tập con $K \subset Y$ được gọi là một nón nếu $\lambda K \subset K$ với mọi $\lambda \geq 0$; là có đỉnh nếu $K \cap (-K) = \{0_Y\}$ (với 0_Y ký hiệu cho vector không trong không gian Y); là nón lồi nếu K là nón và K là một tập lồi.

Với các tập hợp $M, M_1, M_2 \in \mathcal{P}(Y)$, ta sử dụng các ký hiệu sau:

$$M_1 + M_2 \coloneqq \{m_1 + m_2 \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\},$$

$$\lambda M \coloneqq \{\lambda m \mid m \in M, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Quy ước: $M + \emptyset = \emptyset + M = \emptyset, \quad \lambda\emptyset = \emptyset.$

Xét ánh xạ $f: X \to Y$, khi đó f được gọi là liên tục Lipschitz nếu tồn tại $L \geq 0$ sao cho với mọi $x_1, x_2 \in X$, ta có $\|f(x_1) - f(x_2)\|_Y \leq L\|x_1 - x_2\|_X$. Một hàm số $\eta: X \to \mathbb{R}$ được gọi là thuần nhất dương nếu $\eta(\lambda x) = \lambda\eta(x)$ với mọi $x \in X$ và $\lambda \geq 0$.

Cho A là một tập con khác rỗng của X. Trong không gian Y, ta trang bị một nón lồi, đóng, có đỉnh K. Xét $g: A \times A \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector thoả mãn $g(x,x) \in K$ với mọi $x \in A$. Mô hình bài toán cân bằng vector được phát biểu như sau:

(VEP): Tìm $\bar{x} \in A$ sao cho

$$g(\bar{x}, z) \notin -K \setminus \{0_Y\}, \forall z \in A.$$

Sau đây ta nhắc lại các khái niệm cùng với một số tính chất được dùng ở các phần sau.

Định nghĩa 2.1. (Aubin & Frankowska, 2009) Cho $F: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó:

(a) F được gọi là nửa liên tục trên tại x_0 nếu với mọi lân cận U của $F(x_0)$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $F(x) \subset U$ với mọi $x \in N$;

(b) F được gọi là nửa liên tục dưới tại x_0 nếu với bất kỳ tập con mở U của Y thoả mãn $F(x_0) \cap$

$U \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $F(x) \cap U \neq \emptyset$ với mọi $x \in N$;

(c) F được gọi là liên tục tại x_0 nếu nó vừa nửa liên tục trên, vừa nửa liên tục dưới tại x_0;

(d) F được gọi là nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới, liên tục) trong tập $B \subset X$ nếu F nửa liên tục trên (nửa liên tục dưới, liên tục) tại mọi điểm $x \in B$.

Ví dụ 2.1. Cho $X = Y := \mathbb{R}$. Ta xét các ánh xạ đa trị $F_1: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$F_1(x) := \begin{cases} [-1,1], x \neq 0, \\ \{0\}, x = 0. \end{cases}$$

Và $F_2: \mathbb{R} \rightrightarrows \mathbb{R}$ được xác định bởi

$$F_2(x) := \begin{cases} [-1,1], x = 0, \\ \{0\}, x \neq 0. \end{cases}$$

Khi đó, F_1 là nửa liên tục dưới tại 0 nhưng không nửa liên tục trên tại 0, trong khi đó F_2 là nửa liên tục trên tại 0 nhưng không nửa liên tục dưới tại 0.

Bổ đề 2.1. (Hu & Papageorgiou, 1997) *Các khẳng định sau đây là tương đương.*

(i) *F là nửa liên tục dưới tại x_0.*

(ii) *Với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và $y_0 \in F(x_0)$, tồn tại $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \to y_0$.*

(iii) *Với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0, ta có $F(x_0) \subset \operatorname{liminf} F(x_n)$, trong đó*

$$\operatorname{liminf} F(x_n) := \{y_0 \in Y \mid \exists y_n \in F(x_n), y_n \to y_0\}.$$

Bổ đề 2.2. (Hu & Papageorgiou, 1997) *Nếu $F(x_0)$ là compact thì F là nửa liên tục trên tại x_0 nếu và chỉ nếu với bất kỳ dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và với mọi $y_n \in F(x_n)$, tồn tại một dãy con $\{y_{n_k}\}$ của $\{y_n\}$ hội tụ về $y_0 \in F(x_0)$.*

3. TÍNH ĐÓNG CỦA TẬP NGHIỆM

Trong mục này, ta xét một ánh xạ đa trị

$\Psi: A \rightrightarrows A$ được xác định như sau:

$$\Psi(x) := \{z \in A \mid g(x,z) \in -K\},$$

với mọi $x \in A$.

Định lý 3.1. *Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thoả mãn:*

(i) *với mọi $x, y \in A$ và $x \neq y$ thì $g(x,y) \neq 0_Y$;*

(ii) *Ψ là nửa liên tục dưới trong A.*

Khi đó, tập nghiệm hữu hiệu E của bài toán (VEP) là một tập đóng.

Chứng minh.

Lấy bất kỳ $\{x_n\} \subset E$ với $x_n \to x_0$. Ta cần chứng tỏ rằng $x_0 \in E$. Giả sử ngược lại rằng $x_0 \notin E$, khi đó tồn tại $z_0 \in A$ sao cho

$$g(x_0, z_0) \in -K \setminus \{0_Y\}. \qquad (3.1)$$

Do đó, $g(x_0, z_0) \in -K$, hay tương đương $z_0 \in \Psi(x_0)$. Điều này cùng với tính nửa liên tục dưới của Ψ trong (ii), ta có thể tìm được dãy $\{z_n\}$ với $z_n \in \Psi(x_n)$ sao cho $z_n \to z_0$. Vì $x_n \in E \subset A$ và $z_n \in \Psi(x_n)$ nên với mọi n thì

$$g(x_n, z_n) \in -K, \forall n. \qquad (3.2)$$

Từ (3.1), ta suy ra rằng $x_0 \neq z_0$. Thật vậy, nếu $x_0 = z_0$ thì ta có $g(x_0, x_0) \in -K \setminus \{0_Y\}$ hay $g(x_0, x_0) \in -K$ và $g(x_0, x_0) \neq 0_Y$. Do đó, $g(x_0, x_0) \notin K$, đây là điều không thể. Mặt khác, vì X là không gian định chuẩn và $x_0 \neq z_0$, nên tồn tại các lân cận N của x_0 và V của z_0 sao cho

$$N \cap V = \emptyset.$$

Kết hợp điều này này với $x_n \to x_0, z_n \to z_0$, tồn tại n_0 sao cho với mọi $n \geq n_0$, ta có $x_n \in N, z_n \in V$ thoả mãn $x_n \neq z_n$. Sử dụng điều kiện (ii), ta suy ra

$$g(x_n, z_n) \neq 0_Y, \forall n \geq n_0. \qquad (3.3)$$

Từ (3.2) và (3.3), ta suy ra điều mâu thuẫn. Vậy tập nghiệm E là một tập đóng. ■

4. TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM HỮU HIỆU

Cho X, Y, A, K như ở các mục trước và Ω là một tập con khác rỗng của không gian định chuẩn Z. Xét $g: A \times A \times \Omega \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector và $H: \Omega \rightrightarrows A$ là một ánh xạ đa trị có giá trị khác rỗng. Bài toán cân bằng vector phụ thuộc tham số được xem xét như sau:

(PVEP): Tìm $\bar{x} \in H(\omega)$ sao cho

$$g(\bar{x}, z, \omega) \notin -K \setminus \{0_Y\}, \forall z \in H(\omega).$$

Với mỗi $\omega \in \Omega$, ta ký hiệu tập nghiệm hữu hiệu (PVEP) là $E(\omega)$. Ta xem E là một ánh xạ đa trị đi từ Ω vào A. Mục tiêu trong phần này là đi tìm các điều kiện đủ cho ánh xạ nghiệm E là nửa liên tục trên trong Ω. Để thực hiện điều này, chúng ta sẽ sử dụng công cụ là hàm vô hướng hoá phi tuyến dạng Hiriart-

Urruty. Trước hết, ta nhắc lại khái niệm về hàm vô hướng hoá phi tuyến này.

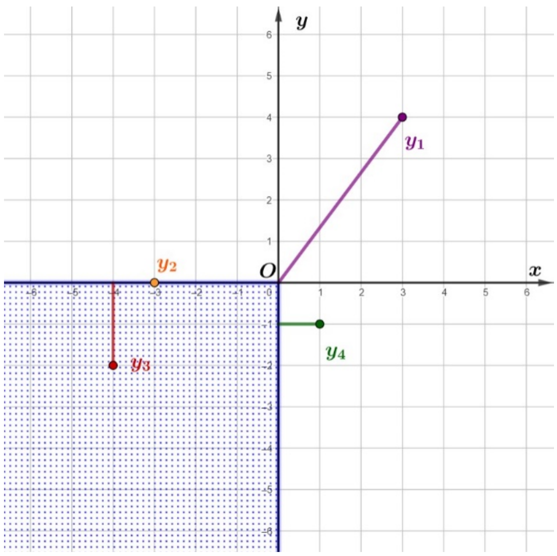
Định nghĩa 4.1. (Hiriart-Urruty, 1979) Cho $M \in \mathcal{P}(Y)$. Hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty $\mathcal{D}_M: Y \to \overline{\mathbb{R}}$ được định nghĩa như sau:

$$\mathcal{D}_M(y) := d(y, M) - d(y, Y \setminus M),$$

với mọi $y \in Y$. Ở đây, $\overline{\mathbb{R}}$ là ký hiệu tập số thực mở rộng, tức là $\overline{\mathbb{R}} \coloneqq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Ví dụ sau đây là những minh họa hình học cho sự biểu diễn giá trị của hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty.

Ví dụ 4.1. Cho $Y := \mathbb{R}^2$, $M := -\mathbb{R}^2_+$ và các điểm $y_1 = (3;4)$, $y_2 = (-3;0)$, $y_3 = (-4;-2)$ và $y_4 = (1;-1)$. Khi đó, ta có $\mathcal{D}_M(y_1) = 5$, $\mathcal{D}_M(y_2) = 0$, $\mathcal{D}_M(y_3) = -2$ và $\mathcal{D}_M(y_4) = 1$.



Hình 4.1. Biểu diễn giá trị của hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty bằng hình học

Nhận xét 4.1. Trong tài liệu, hai dạng phương pháp vô hướng hoá phi tuyến thường được sử dụng là dạng Gerstewitz và dạng Hiriart-Urruty. Đối với dạng Gerstewitz, nón thứ tự đòi hỏi phải có phần trong khác rỗng. Tuy nhiên, vô hướng hoá dạng Hiriart-Urruty không đòi hỏi điều này, và do đó, phạm vi áp dụng của phương pháp này sẽ rộng hơn.

Bổ đề sau đây phát biểu các tính chất quan trọng của hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty. Các tính chất này được sử dụng rất nhiều trong lĩnh vực tối ưu vector.

Bổ đề 4.1. (Zaffaroni, 2003) *Các phát biểu sau đây là đúng:*

(i) *$\mathcal{D}_M$ có giá trị thực với mọi $y \in Y$ và $\mathcal{D}_M$ là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz bằng 1;*

(ii) *Nếu M là một tập lồi thì $\mathcal{D}_M$ là một hàm lồi;*

(iii) $\mathcal{D}_M(y) < 0 \Leftrightarrow y \in \text{int}M, \forall y \in Y$;

(iv) $\mathcal{D}_M(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \partial M, \forall y \in Y$;

(v) $\mathcal{D}_M(y) > 0 \Leftrightarrow y \notin \text{cl}M, \forall y \in Y$;

(vi) *Nếu M là nón thì $\mathcal{D}_M$ là hàm thuần nhất dương, tức là, $\mathcal{D}_M(\lambda y) = \lambda \mathcal{D}_M(y)$ với mọi $\lambda > 0$ và mọi $y \in Y$;*

(vii) *Nếu $M, N \in \mathcal{P}(Y)$ và $M \subset N$ thì $\mathcal{D}_N(y) \leq \mathcal{D}_M(y), \forall y \in Y$;*

(viii) *Nếu K là nón lồi thì $\mathcal{D}_{-K}$ là hàm K-tăng, tức là,*

$$y_1 \leq_K y_2 \Longrightarrow \mathcal{D}_{-K}(y_1) \leq \mathcal{D}_{-K}(y_2).$$

Hơn nữa, nếu K là nón lồi và có phần trong khác rỗng thì

$$y_1 \leq_{\text{int}K} y_2 \Longrightarrow \mathcal{D}_{-K}(y_1) < \mathcal{D}_{-K}(y_2);$$

(ix) $\mathcal{D}_{-K}(y_1 + y_2) \leq \mathcal{D}_{-K}(y_1) + \mathcal{D}_{-K}(y_2), \forall y_1, y_2 \in Y$;

(x) *Nếu K là nón lồi và có phần trong khác rỗng thì*

$$\mathcal{D}_{-K}(y) = \mathcal{D}_{-\text{int}K}(y);$$

(xi) *Nếu M là tập lồi thì*

$$\mathcal{D}_{\text{cl}M}(y) = \mathcal{D}_M(y), \forall y \in Y;$$

(xii) $\mathcal{D}_M(-y) = \mathcal{D}_{-M}(y), \forall y \in Y.$

Định nghĩa 4.2. (Xu et al., 2020) Hàm vô hướng hóa phi tuyến $\varphi: Y \times \mathbb{R}_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ được xác định như sau:

$$\varphi(y, t) \coloneqq t\mathcal{D}_{-K}(y) - \|y\|,$$

với mọi $y \in Y$ và $t \in \mathbb{R}_{++}$.

Ví dụ 4.2. Cho $Y = \mathbb{R}^2, K = -\mathbb{R}^2_+$, $t = 2$ và các điểm $y_1 = (1;2)$, $y_2 = (2;0)$, $y_3 = (-3;-4)$, $y_4 = (2,-1)$. Khi đó, ta có:

$$\varphi(y_1, 2) = 2\mathcal{D}_{-K}(y_1) - \|y_1\| = -2 - \sqrt{5}.$$

$$\varphi(y_2, 2) = 2\mathcal{D}_{-K}(y_2) - \|y_2\| = -2.$$

$$\varphi(y_3, 2) = 2\mathcal{D}_{-K}(y_3) - \|y_3\| = 5.$$

$$\varphi(y_4, 2) = 2\mathcal{D}_{-K}(y_4) - \|y_4\| = 2 - \sqrt{5}.$$

Bổ đề 4.2. (Xu et al., 2020) *Các mệnh đề sau đây là đúng:*

(i) φ *có giá trị thực;*

(ii) $\varphi(\cdot, t)$ *là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz bằng* $(1 + t)$ *với mỗi* $t \in \mathbb{R}_{++}$;

(iii) Nếu $y \in -K \setminus \{0_Y\}$, *thì* $\varphi(\cdot, t) < 0$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}_{++}$;

(iv) Nếu $y \notin -K \setminus \{0_Y\}$, *thì tồn tại số* $t_y \in \mathbb{R}_{++}$ *sao cho* $\varphi(y, t_y) \geq 0$;

(v) $\varphi(\cdot, t)$ *là hàm thuần nhất dương với mỗi* $t \in \mathbb{R}_{++}$.

Bây giờ, ta xét hàm số $\vartheta: A \times A \times \Omega \times \mathbb{R}_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ được xác định như sau:

$$\vartheta(x, z, \omega, t) \coloneqq \varphi_{-K}(g(x, z, \omega), t),$$

và hàm số $\xi: A \times \Omega \times \mathbb{R}_{++} \to \overline{\mathbb{R}}$ được xác định như sau:

$$\xi(x, \omega, t) \coloneqq \inf_{z \in H(\omega)} \vartheta(x, z, \omega, t).$$

Kết quả sau đây được dễ dàng suy ra từ Định nghĩa.

Bổ đề 4.3. Với mọi $t \in \mathbb{R}_{++}$, *hàm số* $\vartheta(\cdot,\cdot,\cdot, t)$ *là liên tục trong* $A \times A \times \Omega$.

Bổ đề 4.4. *Giả sử rằng H là liên tục và có giá trị compact trong* Ω *và g liên tục trong* $A \times A \times \Omega$. *Khi đó, hàm số* $\xi(\cdot,\cdot, t)$ *là liên tục trong* $A \times \Omega$ *với mọi* $t \in \mathbb{R}_{++}$.

Chứng minh.

Với mọi $t \in \mathbb{R}_{++}$, lấy $x \in M$ và $\omega \in \Omega$ bất kỳ, ta có:

$$\begin{aligned}\xi(x, \omega, t) &= \inf_{z \in H(\omega)} \vartheta(x, z, \omega, t)\\ &= \inf_{z \in H(\omega)} \varphi_{-K}(g(x, z, \omega), t)\\ &= -\sup_{z \in H(\omega)} (-\varphi_{-K}(g(x, z, \omega), t)).\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 4.3 và Mệnh đề 2.4 trong Aubin and Ekeland (2006), ta thu được tính liên tục của hàm ξ. ■

Chú ý 4.1. Trong Bổ đề 4.4., nếu H là nửa liên tục trên và có giá trị compact và g là liên tục thì ta thu được tính nửa liên tục trên của hàm ξ.

Sau đây, sự biểu diễn vô hướng cho tập nghiệm hữu hiệu (PVEP) thông qua hàm vô hướng hóa ξ được thiết lập như sau:

Bổ đề 4.5. *Với mọi* $\omega \in \Omega$, *ta có*

$$E(\omega) = \{x \in H(\omega) \mid \xi(x, \omega, t\} \geq 0, t \in \mathbb{R}_{++}\}.$$

Chứng minh.

Với mọi $\omega \in \Omega$, ta có

$$E(\omega) = \left\{x \in H(\omega) \,\middle|\, \begin{matrix} g(x, z, \omega) \notin -K \setminus \{0_Y\}, \\ \forall z \in H(\omega) \end{matrix}\right\}.$$

Áp dụng Bổ đề 4.2(iv), tồn tại $t_0 \in \mathbb{R}_{++}$, sao cho

$$\begin{aligned}E(\omega) &= \left\{x \in H(\omega) \,\middle|\, \begin{matrix} \varphi_{-K}(g(x, z, \omega), t_0) \geq 0, \\ \forall z \in H(\omega) \end{matrix}\right\}\\ &= \left\{x \in H(\omega) \,\middle|\, \begin{matrix} \vartheta(x, z, \omega, t) \geq 0, \\ \forall z \in H(\omega) \end{matrix}\right\}\\ &= \left\{x \in H(\omega) \,\middle|\, \begin{matrix} \inf_{z \in H(\omega)} \vartheta(x, z, \omega, t) \geq 0, \\ \forall z \in H(\omega) \end{matrix}\right\}\\ &= \{x \in H(\omega) | \xi(x, \omega, t_0) \geq 0\}.\end{aligned}$$ ■

Định lý 4.1. *Giả sử các điều kiện sau đây được thoả mãn:*

(i) *H là nửa liên tục trên và có giá trị compact khác rỗng trên* Ω;

(ii) *g là liên tục trong* $A \times A \times \Omega$.

Khi đó, ánh xạ nghiệm E là nửa liên tục trên trong Ω.

Chứng minh.

Giả sử tồn tại $\omega_0 \in \Omega$ sao cho E không là nửa liên tục trên tại ω_0. Khi đó, tồn tại lân cận mở U của $E(\omega_0)$ và dãy $\{\omega_n\}$ hội tụ về ω_0 sao cho tồn tại $\hat{x}_n \in E(\omega_n)$ nhưng $\hat{x}_n \notin U$ với mọi n.

Vì H là nửa liên tục trên và có giá trị compact nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng dãy $\{\hat{x}_n\}$ hội tụ về $\hat{x} \in H(\omega_0)$. Nếu $\hat{x} \notin E(\omega_0)$ thì theo Bổ đề 4.5, với mỗi $t \in \mathbb{R}_{++}$

$$\xi(\hat{x}, \omega_0, t) < 0. \qquad (4.1)$$

Mặt khác, $\hat{x}_n \in E(\omega_n)$ nên ta có

$$\xi(\hat{x}_n, \omega_n, t) \geq 0. \qquad (4.2)$$

Từ tính nửa liên tục trên, có giá trị compact khác rỗng của H và tính liên tục của g, áp dụng Chú ý 4.1, ta suy ra tính nửa liên tục trên của hàm ξ. Kết hợp điều này với (4.2) ta được

$$\xi(\hat{x}, \omega_0, t) \geq 0.$$

Điều này mâu thuẫn với (4.1). Do đó, $\hat{x} \in E(\omega_0)$, và đây lại là điều không thể xảy ra do U là mở và $\hat{x}_n \notin U$ với mọi n. Ta đã chứng minh xong tính nửa liên tục trên của E trong Ω. ■

5. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, tính đóng và tính nửa liên tục trên của nghiệm hữu hiệu của bài toán cân bằng vector được nghiên cứu. Đối với tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu bài toán cân bằng vector, thông thường để đạt được nó là các điều kiện áp đặt rất chặt. Hi vọng rằng với cách tiếp cận này và bằng những điều chỉnh thích hợp sẽ thu được những kết quả thú vị cho tính chất nửa liên tục dưới của bài toán cân bằng vector và các mô hình tổng quát trong Lý thuyết tối ưu. Đây sẽ là những nghiên cứu tiếp theo trong tương lai.

LỜI CẢM TẠ

Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, mã số: TSV2024-26.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Aubin, J. P., & Ekeland, I. (2006). *Applied nonlinear analysis*. Courier Corporation.

Aubin, J. P., & Frankowska, H. (2009). *Set-valued Analysis*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4848-0

Anh, L. Q., Khanh, P. Q., & Tam, T. N. (2019). Continuity of approximate solution maps of primal and dual vector equilibrium problems. *Optimization Letters*, *13*, 201-211.

https://doi.org/10.1007/s11590-018-1264-8

Anh, L. Q., Duy, T. Q., & Hien, D. V. (2020). Well-posedness for the optimistic counterpart of uncertain vector optimization problems. *Annals of Operations Research, 295*, 517-533. https://doi.org/10.1007/s10479-020-03840-0

Anh, L. Q., Duoc, P. T., Tam, T. N., & Thang, N. C. (2021). Stability analysis for set-valued equilibrium problems with applications to Browder variational inclusions. *Optimization Letters*, *15*, 613-626. https://doi.org/10.1007/s11590-020-01604-0

Anh, L.Q., Anh, N. T., Duoc, P. T., Khanh, L. T. V., Thu, P. T. A. (2023). Connectedness properties of efficient and minimal sets to vector optimization problems. *Applied Set-Valued Analysis & Optimization, 5*(1), 2023. https://doi.org/10.23952/asvao.5.2023.1.08

Bianchi, M., Kassay, G., & Pini, R. (2007). Ekeland's principle for vector equilibrium problems. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *66*(7), 1454-1464. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.02.003

Chadli, O., Ansari, Q. H., & Al-Homidan, S. (2017). Existence of solutions and algorithms for bilevel vector equilibrium problems: an auxiliary principle technique. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *172*, 726-758. https://doi.org/10.1007/s10957-017-1062-y

Chen, C. R., Li, S. J., & Fang, Z. M. (2010). On the solution semicontinuity to a parametric generalized vector quasivariational inequality. *Computers & Mathematics with Applications*, *60*(8), 2417-2425. https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.08.036

Farajzadeh, A. P., Wangkeeree, R., & Kerdkaew, J. (2019). On the existence of solutions of symmetric vector equilibrium problems via nonlinear scalarization. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, *45*, 35-58. https://doi.org/10.1007/s41980-018-0118-6

Han, Y., & Gong, X. H. (2014). Lower semicontinuity of solution mapping to parametric generalized strong vector equilibrium problems. *Applied Mathematics Letters*, *28*, 38-41. https://doi.org/10.1016/j.aml.2013.09.006

Han, Y., & Huang, N. J. (2017). Well-posedness and stability of solutions for set optimization problems. *Optimization, 66*(1), 17-33. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1247270

Hu, S., & Papageorgiou, N. S. (1997). *Handbook of Multivalued Analysis: Volume I: Theory*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1016/S0898-1221(98)9022 8-0

Hiriart-Urruty, J. B. (1979). Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces. *Mathematics of operations research*, *4*(1), 79-97. https://doi.org/10.1287/moor.4.1.79

Iusem, A. N., & Mohebbi, V. (2019). Extragradient methods for vector equilibrium problems in Banach spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *40*(9), 993-1022. https://doi.org/10.1080/01630563.2019.1578232

Kassay, G., & Radulescu, V. (2018). *Equilibrium problems and applications*. Academic Press. https://doi.org/10.1016/C2015-0-06685-0

László, S. (2016). Vector equilibrium problems on dense sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *170*(2), 437-457. https://doi.org/10.1007/s10957-016-0915-0

Sadeqi, I., & Salehi Paydar, M. (2016). Lipschitz continuity of an approximate solution mapping for parametric set-valued vector equilibrium problems. *Optimization*, *65*(5), 1003-1021. https://doi.org/10.1080/02331934.2015.1105802

Sach, P. H., & Tuan, L. A. (2016). Lower semicontinuity results in parametric multivalued weak vector equilibrium problems and applications. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *37*(6), 753-785. https://doi.org/10.1080/01630563.2016.1176929

Tam, T. N. (2024). Hölder continuity of solution maps to parametric set-valued Ky Fan inequalities. *Optimization*, *73*(3), 623-640. https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2122716

Xu, S., & Li, S. J. (2009). A new proof approach to lower semicontinuity for parametric vector equilibrium problems. *Optimization Letters*, *3*, 453-459. https://doi.org/10.1007/s11590-009-0124-y

Xu, Y., & Zhang, P. (2018). Connectedness of solution sets of strong vector equilibrium problems with an application. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *178*, 131-152. https://doi.org/10.1007/s10957-018-1244-2

Xu, Y. D., Chen, C. R., & Fang, C. J. (2020). Hölder continuity for solution mappings of parametric non-convex strong generalized Ky Fan inequalities. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *41*(3), 344-360. https://doi.org/10.1080/01630563.2019.1628051

Zaffaroni, A. (2003). Degrees of efficiency and degrees of minimality. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *42*(3), 1071-1086. https://doi.org/10.1137/S0363012902411532