Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.368

DƯỚI VI PHÂN MORDUKHOVICH CỦA HÀM GIÁ TRỊ TỐI ƯU TRONG ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CÓ THAM SỐ VỚI RÀNG BUỘC CÂN BẰNG

Trần Song Huyền Anh[1*] và Nguyễn Thành Quí[2]
[1]Lớp Toán ứng dụng K47, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
[2]Bộ môn Toán học, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): anhb2103227@student.ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 12/06/2024
Sửa bài (Revised): 01/07/2024
Duyệt đăng (Accepted): 02/08/2024

Title: *Mordukhovich subdifferential of marginal functions in parametric optimal control with equilibrium constraints*

Author(s): *Tran Song Huyen Anh[1*] and Nguyen Thanh Qui[2]*

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Nghiên cứu được thực hiện nhằm phát triển một số kết quả đã có về vi phân suy rộng như các công thức tính đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc, các công thức tính dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu của lớp bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng. Sử dụng các kết quả này, bài báo thu được các kết quả mới, bao gồm các công thức tính dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng.

Từ khoá: *Dưới vi phân Mordukhovich, điều khiển tối ưu, đối đạo hàm, hàm giá trị tối ưu, phương trình đạo hàm riêng elliptic*

ABSTRACT

The research was carried out to develop some existing results on generalized differentiation such as formulas for calculating the Fréchet and Mordukhovich coderivatives of constraint operators and formulas for calculating the Fréchet subdifferential of optimal value functions of a class of parametric optimal control problems with equilibrium constraints. Using these results, the article obtains new results including formulas for calculating the Mordukhovich subdifferential of optimal value functions of the parametric optimal control problem with equilibrium constraints.

Keywords: *Mordukhovich subdifferential, optimal control, coderivative, marginal function, elliptic partial differential equation*

1. GIỚI THIỆU

Xét bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính với ràng buộc cân bằng $P(e)$: Tìm min của hàm mục tiêu

$$J: L^2(\Omega) \times E \to \mathbb{R}$$

xác định bởi

$$J(u,e) = \int_\Omega L\left(x, y_{u+e_Y}(x)\right) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \zeta(x)(u+e_Y)^2(x)dx + \int_\Omega e_J(x) y_{u+e_Y}(x)dx$$

thỏa điều kiện ràng buộc cân bằng sau

$$0 \in \psi(u, e_P) + Q(u, e_P), \tag{1.1}$$

trong đó

- tương ứng với điều khiển u của bài toán $P(e)$, trạng thái y_{u+e_Y} là nghiệm yếu của phương trình trạng thái của bài toán $P(e)$, tức là phương trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính được cho dưới đây

$$\begin{cases} Ay + f(x,y) = u + e_Y & \text{trong } \Omega \\ y = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases} \tag{1.2}$$

- A là toán tử vi phân elliptic bậc hai có dạng

$$Ay(x) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}y(x)\right),$$

- $\psi: L^2(\Omega) \times L^p(\Omega) \to W$ (với $1 < p < \infty$) thuộc lớp C^2,
- $Q: L^2(\Omega) \times L^p(\Omega) \to 2^W$ là ánh xạ đa trị với W là một không gian Banach,
- $\zeta(x) \geq 0$ h.h. $x \in \Omega$ là một hàm cho trước,
- $E = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^p(\Omega)$ là không gian tham số và $e = (e_Y, e_J, e_P) \in E$ là tham số của bài toán $P(e)$, trong đó chuẩn của tham số $e \in E$ là chuẩn tổng sau đây

$$\|e\|_E = \|e\|_{L^2(\Omega)} + \|e\|_{L^2(\Omega)} + \|e\|_{L^p(\Omega)}.$$

Lý thuyết điều khiển tối ưu có một vai trò và vị trí rất quan trọng trong các lĩnh vực đời sống của chúng ta ngày nay. Một trong những lĩnh vực quan trọng được ứng dụng lý thuyết điều khiển tối ưu là ngành hàng không và công nghệ không gian. Hơn thế nữa, các lĩnh vực như robot, trình tự chuyển động, kiểm soát hóa học, quy trình hoạt động nhà máy điện, mô hình dẫn nhiệt, khuếch tán, truyền sóng, cơ học chất lưu,… cũng được ứng dụng lý thuyết điều khiển tối ưu. Các lĩnh vực ứng dụng vừa nêu có thể được mô hình hóa trong các trường hợp cụ thể của bài toán $P(e)$ đang xét, điều này có thể được tìm thấy trong bộ sách chuyên khảo Tröltzsch (2010).

Sau đây ta nêu một số khái niệm liên quan đến bài toán $P(e)$. Với mỗi $e \in E$, ký hiệu *tập hợp các điều khiển chấp nhận được* của bài toán $P(e)$ bởi

$$\mathcal{G}_{ad}(e) = \left\{u \,\middle|\, \begin{matrix} u \in L^2(\Omega), \\ 0 \in \psi(u, e_P) + Q(u, e_P) \end{matrix}\right\}. \tag{1.3}$$

Với *hàm ràng buộc* dạng cân bằng được cho bởi biểu thức (1.3), *hàm giá trị tối ưu* (the *optimal value function* hay còn gọi là hàm *marginal*) của bài toán $P(e)$ là hàm $\mu: E \to \overline{\mathbb{R}}$ được cho bởi

$$\mu(e) = \inf_{u \in \mathcal{G}_{ad}(e)} J(u, e), \tag{1.4}$$

và ánh xạ nghiệm $S: E \to 2^{L^2(\Omega)}$ của bài toán $P(e)$ được xác định bởi

$$S(e) = \{u \in \mathcal{G}_{ad}(e) \mid \mu(e) = J(u, e)\}. \tag{1.5}$$

Hàm giá trị tối ưu và ánh xạ nghiệm của các bài toán tối ưu phụ thuộc tham số đóng vai trò quan trọng trong giải tích biến phân, lý thuyết tối ưu, điều khiển tối ưu, và đã thu hút được nhiều chuyên gia quan tâm nghiên cứu. Các kết quả nghiên cứu về hàm giá trị tối ưu và ánh xạ nghiệm của các bài toán tối ưu chứa tham số có thể tham khảo trong nghiên cứu của Mordukhovich (2006a, 2006b, 2018), Mordukhovich et al. (2009), Qui (2020), Qui and Wachsmuth (2020), Quí et al. (2022), Quí và Phúc (2022) và Quí et al. (2023).

Trong bài toán $P(e)$, tham số e_Y xuất hiện với vai trò nhiễu tuyến tính đối với phương trình đạo hàm riêng đang xét, và số hạng

$$\int_\Omega e_J(x) y_{u+e_Y}(x)dx$$

của biểu thức hàm mục tiêu $J(u, e)$ là nhiễu xiên, khái niệm *nhiễu xiên* được giới thiệu và nghiên cứu bởi Poliquin and Rockafellar (1998). Sự ổn định của ràng buộc cân bằng (1.1) dưới các dạng nhiễu khác nhau được nghiên cứu khá chi tiết trong nghiên cứu của Qui (2016), và các kết quả ổn định được sử dụng trong nghiên cứu của Quí et al. (2023) để nghiên cứu các tính chất vi phân trong điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng.

Các mô hình bài toán điều khiển tối ưu (có tham số hoặc không tham số) cho phương trình đạo hàm riêng elliptic liên quan đến bài toán $P(e)$ với ràng buộc điểm được nghiên cứu bởi Casas and Mateos (2002), Casas et al. (2008), Casas (2012), Qui and Wachsmuth (2018, 2019, 2020), Qui (2020), Quí và Phúc (2022), Tröltzsch (2010). Công trình đầu tiên nghiên cứu về bài toán điều khiển tối ưu có tham số liên quan đến bài toán $P(e)$ với ràng buộc biên trơn là bài báo Quí et al. (2022). Tiếp theo, bài báo Quí et al. (2023) nghiên cứu lớp bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng $P(e)$ và thu được một số kết quả về vi phân suy rộng như các công thức tính đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc, các công thức tính dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu của lớp bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng.

Bài báo này tiếp tục nghiên cứu lớp bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng $P(e)$ và phát triển một số kết quả về vi phân suy rộng của Quí et al. (2023). Sử dụng các kết quả thu được trong Quí et al. (2023), bài viết thu được các kết quả mới về vi phân suy rộng bao gồm các công thức tính *dưới vi phân Mordukhovich* của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng $P(e)$.

2. GIẢ THIẾT VÀ KẾT QUẢ BỔ TRỢ

⋆ ***Hệ thống các giả thiết***

Hệ thống các giả thiết được sử dụng trong bài báo này bao gồm:

(A1) Tập $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (với $N = 1, 2, 3$) là một miền mở và bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên Lipschitz Γ. với các hàm hệ số $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ thỏa mãn điều kiện

$$\lambda_A \|\gamma\|^2 \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\gamma_i\gamma_j,$$

với mọi $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{R}^N$, h.h. $x \in \Omega$, $\lambda_A > 0$ là hằng số.

(A2) Hàm $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory (tức là, $f(\cdot, y)$ đo được với mọi $y \in \mathbb{R}$ và $f(x,\cdot)$ liên tục với h.h. $x \in \Omega$) thuộc lớp hàm C^2 đối với biến thứ hai và thỏa mãn

$$f(\cdot,0) \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \ge 0 \text{ với h.h. } x \in \Omega,$$

và với mọi $M > 0$ tồn tại $C_{f,M} > 0$ sao cho

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \le C_{f,M}$$

với h.h. $x \in \Omega$ và $|y| \le M$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_1)\right| \le C_{f,M}|y_2 - y_1|$$

với h.h. $x \in \Omega$ và $|y_1|, |y_2| \le M$.

(A3) Hàm $L: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thuộc lớp C^2 đối với biến thứ hai. Hơn nữa, ta cũng có $L(\cdot,0) \in L^1(\Omega)$ và với mọi $M > 0$ tồn tại hằng số $C_{L,M} > 0$ và $\psi_M \in L^2(\Omega)$ sao cho

$$\left|\frac{\partial L}{\partial y}(x,y)\right| \le \psi_M(x), \quad \left|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y)\right| \le C_{L,M},$$

với h.h. $x \in \Omega$ và $|y| \le M$, và

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y_1) - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x,y_2)\right| \le C_{L,M}|y_2 - y_1|$$

với h.h. $x \in \Omega$ và $|y_1|, |y_2| \le M$.

Các giả thiết (A1), (A2), (A3) là các giả thiết căn bản và thường được sử dụng trong lý thuyết điều khiển tối ưu. Các giả thiết này đảm bảo cho sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) của bài toán $P(e)$. Định nghĩa *nghiệm yếu* của phương trình trạng thái (1.2) được nêu trong sách Tröltzsch (2010). Kết quả phát biểu trong định lý sau đây được tham khảo trong cuốn sách chuyên khảo Tröltzsch (2010) (Định lý 4.4).

Định lý 2.1. *Giả sử rằng các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn. Khi đó, với mỗi $u + e_Y \in L^2(\Omega)$ phương trình trạng thái* (1.2) *luôn có nghiệm yếu duy nhất $y_{u+e_Y} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$.*

Theo Định lý 2.1, ký hiệu ánh xạ nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) bởi

$$G: L^2(\Omega) \to H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$$
$$u + e_Y \mapsto y_{u+e_Y} = G(u + e_Y).$$

Cho tham số $\bar{e} \in E$, một điều khiển chấp nhận được $\bar{u} \in \mathcal{G}_{ad}(\bar{e})$ được gọi là một *điều khiển tối ưu* (hay *nghiệm*) của bài toán $P(\bar{e})$ ứng với trạng thái tối ưu $\bar{y}_{\bar{u}+\bar{e}_Y} = G(\bar{u} + \bar{e}_Y) \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ nếu

$$J(\bar{u}, \bar{e}) \le J(u, \bar{e}), \quad \forall u \in \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}).$$

⋆ ***Các khái niệm về vi phân suy rộng***

Lý thuyết vi phân Mordukhovich được xây dựng dựa trên các khái niệm dưới vi phân, nón pháp tuyến và đối đạo hàm theo nghĩa Mordukhovich. Đáng chú ý là các khái niệm này được định nghĩa cho các đối tượng không nhất thiết lồi, vì vậy phạm vi áp dụng của lý thuyết vi phân Mordukhovich là rất rộng. Hơn thế nữa, lý thuyết Mordukhovich có thể đặc trưng cho các tính chất quan trọng của ánh xạ đa trị như tính giả-Lipschitz theo nghĩa Aubin, tính chính quy mêtric, tính mở địa phương,… Các khái niệm về vi phân suy rộng trình bày dưới đây được tham khảo trong bộ sách chuyên khảo Mordukhovich (2006a, 2006b) cho các phiên bản vô hạn chiều, các phiên bản hữu hạn chiều tương ứng trong nghiên cứu của Mordukhovich (2018). Cho không gian Banach X, hàm đa trị $F: X \to 2^{X^*}$ và hàm thực mở rộng $\sigma: X \to \bar{\mathbb{R}}$. *Giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé – Kuratowski* của F khi $u \to \bar{u}$ được xác định bởi

$$\underset{u\to\bar{u}}{\operatorname{Limsup}} F(u) = \left\{ u^* \in X^* \middle| \begin{array}{c} \text{tồn tại } u_n \to \bar{u} \text{ và} \\ F(u_n) \ni u_n^* \to u^* \text{ theo tôpô } w^* \end{array} \right\}.$$

Với $\epsilon \geq 0$, tập các ϵ-dưới gradient của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma := \{u \in X | \sigma(u) < \infty\}$ được cho bởi

$$\hat{\partial}_\epsilon \sigma(\bar{u}) = \left\{ u^* \middle| \begin{array}{c} u^* \in X^* \text{ thỏa mãn} \\ \liminf\limits_{u\to\bar{u}} \dfrac{\sigma(u) - \sigma(\bar{u}) - \langle u^*, u - \bar{u}\rangle}{\|u - \bar{u}\|} \geq -\epsilon \end{array} \right\}.$$

Dưới vi phân Fréchet (*dưới vi phân chính quy*) của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma$ được định nghĩa bởi

$$\hat{\partial}\sigma(\bar{u}) := \hat{\partial}_0 \sigma(\bar{u}).$$

Dưới vi phân Fréchet trên (*dưới vi phân chính quy trên*) của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma$ được xác định bởi

$$\hat{\partial}^+\sigma(\bar{u}) := -\hat{\partial}(-\sigma)(\bar{u}).$$

Dưới vi phân Mordukhovich (*dưới vi phân qua giới hạn*) của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma$ được định nghĩa bởi

$$\partial\sigma(\bar{u}) := \underset{u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}, \epsilon\downarrow 0}{\operatorname{Limsup}} \hat{\partial}_\epsilon \sigma(u)$$

và *dưới vi phân qua giới hạn suy biến* của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom}\sigma$ được cho bởi

$$\partial^\infty \sigma(\bar{u}) := \underset{u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}, \epsilon\downarrow 0, \lambda\downarrow 0}{\operatorname{Limsup}} \lambda \hat{\partial}_\epsilon \sigma(u),$$

trong đó $u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}$ có nghĩa là $u \to \bar{u}$ và $\sigma(u) \to \sigma(\bar{u})$.

Cho ánh xạ đa trị $F: X \to 2^W$ giữa các không gian Banach X và W. Khi đó, tập hợp

$$\operatorname{gph}F := \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x)\}$$

là đồ thị của F. *Nón pháp tuyến Fréchet* hay còn gọi là *nón pháp tuyến chính quy* $\hat{N}\big((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph}F\big)$ của $\operatorname{gph}F$ tại điểm $(\bar{u}, \bar{v})$ định nghĩa bởi

$$\hat{N}\big((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph}F\big) = \hat{\partial}\delta\big((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph}F\big),$$

và *nón pháp tuyến Mordukhovich* $N\big((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph}F\big)$ của $\operatorname{gph}F$ tại điểm $(\bar{u}, \bar{v})$ được cho bởi

$$N\big((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph}F\big) = \partial\delta\big((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph}F\big).$$

Đối đạo hàm Fréchet hay còn gọi là *đối đạo hàm chính quy* của $F: X \to 2^W$ tại điểm $(\bar{u}, \bar{v}) \in \operatorname{gph}F$ là ánh xạ đa trị

$$\hat{D}^* F(\bar{u}, \bar{v}): W^* \to 2^{X^*}$$

định nghĩa bởi

$$\hat{D}^* F(\bar{u}, \bar{v})(v^*) = \left\{u^* \in X^* \middle| (u^*, -v^*) \in \hat{N}\big((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph}F\big)\right\}.$$

Đối đạo hàm Mordukhovich của $F: X \to 2^W$ tại điểm $(\bar{u}, \bar{v}) \in \operatorname{gph}F$ là ánh xạ đa trị

$$D^* F(\bar{u}, \bar{v}): W^* \to 2^{X^*}$$

xác định bởi

$$D^* F(\bar{u}, \bar{v})(v^*) = \left\{u^* \in X^* \middle| (u^*, -v^*) \in N\big((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph}F\big)\right\}.$$

Ánh xạ đa trị $F: X \to 2^W$ được gọi là *chính quy pháp tuyến* tại điểm $(\bar{u}, \bar{v}) \in \operatorname{gph}F$ nếu như đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$$\hat{D}^* F(\bar{u}, \bar{v})(v^*) = D^* F(\bar{u}, \bar{v})(v^*), \forall v^* \in W^*.$$

Từ các định nghĩa đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich ta có nhận xét rằng trong trường hợp tổng quát thì chúng khác nhau. Tuy nhiên, trong một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn như đối với lớp hàm chính quy pháp tuyến, thì hai khái niệm đối đạo hàm này trùng nhau.

Thông qua bộ sách chuyên khảo Mordukhovich (2006a, 2006b), các khái niệm đối đạo hàm và dưới vi phân của Mordukhovich mang nhiều ý nghĩa quan trọng trong giải tích biến phân, lý thuyết tối ưu và điều khiển,…

⋆ ***Các kết quả bổ trợ***

Tính khả vi của xạ nghiệm yếu $G(\cdot)$ của phương trình trạng thái (1.2) nêu trong định lý sau đây được khẳng định trong nghiên cứu của Casas et al. (2008) (Định lý 2.4); có thể xem thêm trong nghiên cứu của Quí et al. (2022) (Định lý 2.3), Quí và Phúc (2022) (Định lý 3.2), Quí et al. (2023) (Định lý 3.1) và Casas and Mateos (2002).

Định lý 2.2. *Giả sử rằng các giả thiết* (A1)–(A3) *được thỏa mãn. Khi đó, ánh xạ nghiệm yếu của phương trình* (1.2), $G: L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ *với* $G(w) = y_w$, *thuộc lớp hàm* C^2. *Hơn nữa, với mọi* $u, v, e_Y \in L^2(\Omega)$, $z_{u+e_Y,v} = G'(u + e_Y)v$ *là nghiệm yếu duy nhất của*

$$\begin{cases} A z_{u+e_Y,v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y}) z_{u+e_Y,v} = v & \textit{trong } \Omega \\ z_{u+e_Y,v} = 0 & \textit{trên } \Gamma. \end{cases}$$

Với mọi $u, v_1, v_2, e_Y \in L^2(\Omega)$, *ta có*

$$z_{u+e_Y,v_1v_2} = G''(u + e_Y)v_1v_2$$

là nghiệm yếu duy nhất của

$$\begin{cases} Az_{u+e_Y,v_1v_2} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y,v_1v_2} \\ + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y,v_1}z_{u+e_Y,v_2} = 0 \quad \text{trong } \Omega \\ \qquad\qquad z_{u+e_Y,v_1v_2} = 0 \quad \text{trên } \Gamma, \end{cases}$$

trong đó $z_{u+e_Y,v_i} = G'(u+e_Y)v_i$ *với* $i = 1, 2$.

Tính khả vi của hàm mục tiêu $J(u,e)$ theo biến điều khiển u nêu trong định lý sau đây được khẳng định trong nghiên cứu của Qui et al. (2019) (Định lý 2.3), ở đó u được thay thế bởi $u + e_Y$; có thể xem thêm trong nghiên cứu của Quí et al. (2022) (Định lý 2.4) và Quí et al. (2023) (Định lý 3.2).

Định lý 2.3. *Giả sử rằng các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn. Khi đó, ánh xạ* $J(\cdot, e): L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ *thuộc lớp hàm* C^2. *Hơn nữa, với mọi* $u, v \in L^2(\Omega)$, *đạo hàm riêng* $J'_u(u,e)$ *xác định bởi*

$$J'_u(u,e)v = \int_\Omega \left(\varphi_{u,e} + \zeta(u+e_Y)\right) v dx$$

trong đó $\varphi_{u,e}$ *là nghiệm yếu duy nhất của phương trình*

$$\begin{cases} A^*\varphi + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})\varphi \\ \qquad = \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y_{u+e_Y}) + e_J \quad \text{trong } \Omega \\ \qquad \varphi = 0 \qquad\qquad \text{trên } \Gamma, \end{cases}$$

trong đó $y_{u+e_Y} = G(u+e_Y)$ *và* A^* *là toán tử liên hợp của A xác định bởi*

$$A^*\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\right).$$

Ta định nghĩa hai tập hợp sau đây trước khi phát biểu định lý về các công thức tính đối đạo hàm cho hàm ràng buộc. Với $w := -\psi(u, e_P) \in Q(u, e_P)$, tức là $(u, e_P, w) \in \text{gph}Q$, và $\omega = (e, u) \in \text{gph}\,\mathcal{G}_{ad}$, ta định nghĩa tập

$$\widehat{\Xi}(Q,\psi,\omega)(u^*) = \bigcup_{w^* \in W^*} \left\{ e^* \left| \begin{array}{c} e^* = (e_Y^*, e_J^*, e_P^*) \in E^*, e_Y^* = e_J^* = 0, \\ (e_P^*, -u^*) \in \\ \nabla\psi(u, e_P)^* w^* + \widehat{D}^* Q(u, e_P, w)(w^*) \end{array} \right. \right\}$$

và tập

$$\Xi(Q,\psi,\omega)(u^*) = \bigcup_{w^* \in W^*} \left\{ e^* \left| \begin{array}{c} e^* = (e_Y^*, e_J^*, e_P^*) \in E^*, e_Y^* = e_J^* = 0, \\ (e_P^*, -u^*) \in \\ \nabla\psi(u, e_P)^* w^* + D^* Q(u, e_P, w)(w^*) \end{array} \right. \right\}$$

trong đó $\nabla\psi(u, e_P)^*$ là toán tử liên hợp của đạo hàm của hàm ψ tại (u, e_P).

Định lý dưới đây thiết lập các công thức tính đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc cân bằng $\mathcal{G}_{ad}(\cdot)$. Kết quả này được tham khảo trong nghiên cứu của Quí et al. (2023) (Định lý 3.3). Khái niệm SNC của một hàm đa trị có thể xem trong nghiên cứu của Mordukhovich et al. (2009).

Định lý 2.4. *Giả sử rằng các giả thiết* (A1)–(A3) *được thỏa mãn. Cho* $\bar{\omega} = (\bar{e}, \bar{u}) \in \text{gph}\,\mathcal{G}_{ad}$. *Khi đó, với mọi* $u^* \in L^2(\Omega)$, *ta có các bao hàm thức*

$$\widehat{\Xi}(Q,\psi,\bar{\omega})(u^*) \subset \widehat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e},\bar{u})(u^*) \subset D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e},\bar{u})(u^*).$$

Nếu toán tử đa trị Q đóng địa phương quanh điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ *với* $\bar{w} = -\psi(\bar{u}, \bar{e}_P) \in Q(\bar{u}, \bar{e}_P)$, *SNC tại điểm* $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ *và thỏa điều kiện*

$$\begin{cases} 0 \in \nabla\psi(\bar{u}, \bar{e}_P)^* w^* + D^*Q(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})(w^*) \\ \qquad \Longrightarrow w^* = 0 \end{cases}$$

thì ta có các bao hàm thức

$$\widehat{\Xi}(Q,\psi,\bar{\omega})(u^*) \subset \widehat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e},\bar{u})(u^*) \subset D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e},\bar{u})(u^*) \subset \Xi(Q,\psi,\bar{\omega})(u^*).$$

Nếu thêm vào đó toán tử đa trị Q chính quy đồ thị tại điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ *thì ta có các đẳng thức*

$$\widehat{\Xi}(Q,\psi,\bar{\omega})(u^*) = \widehat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e},\bar{u})(u^*) = D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e},\bar{u})(u^*) = \Xi(Q,\psi,\bar{\omega})(u^*).$$

3. DƯỚI VI PHÂN MORDUKHOVICH

Trong mục này, ta sẽ thiết lập các công thức tính dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng $P(e)$. Trước tiên ta cần nêu một số khái niệm sau đây được tham khảo trong nghiên cứu của Mordukhovich et al. (2009).

Ta nói rằng ánh xạ nghiệm S là *μ-nửa liên tục trong* (*μ-inner semicontinuous*) tại $(\bar{e}, \bar{u}) \in \text{gph}S$ nếu với mỗi dãy $e_k \xrightarrow{\mu} \bar{e}$ tồn tại dãy $u_k \in S(e_k)$ sao cho $\{u_k\}$ có dãy con hội tụ đến $\bar{u}$.

Ánh xạ nghiệm S được gọi là *μ-nửa compact trong* (*μ-inner semicompact*) tại $\bar{e}$ nếu với mỗi dãy $e_k \xrightarrow{\mu} \bar{e}$ tồn tại dãy $u_k \in S(e_k)$ sao cho $\{u_k\}$ có dãy con hội tụ.

Định lý 3.1. *Giả sử rằng các giả thiết* (A1)–(A3) *được thỏa mãn và xét* $\bar{e} = (\bar{e}_Y, \bar{e}_J, \bar{e}_P) \in \mathrm{dom}S$ *và* $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$. *Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

i) *Nếu* S là *μ-nửa liên tục trong tại* $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ *thì ta có bao hàm thức*

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).$$

ii) *Nếu* S là *μ-nửa compact trong tại* $\bar{e}$ *thì ta có bao hàm thức*

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset \bigcup_{\bar{u}\in S(\bar{e})} \Big(J'_e(\bar{u}, \bar{e}) + D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})\big(J'_u(\bar{u}, \bar{e})\big)\Big).$$

iii) *Nếu* S *là μ-nửa liên tục trong tại* $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$, *và* $\mathcal{G}_{ad}$ *là chính quy pháp tuyến tại điểm* $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$, *và* $S\colon \mathrm{dom}\,\mathcal{G}_{ad} \to 2^{L^2(\Omega)}$ *có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ *thì hàm giá trị tối ưu* μ *là chính quy dưới tại* $\bar{e}$ *và ta nhận được đẳng thức*

$$\partial\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).$$

Chứng minh. Ta chứng minh định lý dựa trên các khẳng định (i), (ii), (iii) trong nghiên cứu của Mordukhovich et al. (2009) (Định lý 7). Chú ý rằng hàm mục tiêu $J(\cdot,\cdot)$ thuộc lớp C^2 nên $J(\cdot,\cdot)$ liên tục Lipschitz quanh điểm $(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})$.

i) Theo Định lý 7(i) trong nghiên cứu của Mordukhovich et al. (2009) ta có

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset \bigcup_{(u^*,e^*)\in\partial J(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})} (e^* + D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(u^*)).$$

Theo Định lý 2.3, hàm mục tiêu $J\colon L^2(\Omega) \times E \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2, do đó

$$\partial J(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) = \{J'(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\} = \big\{\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}), J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)\big\}.$$

Từ đó ta thu được bao hàm thức

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).$$

ii) Theo Định lý 7(ii) trong nghiên cứu của Mordukhovich et al. (2009) ta có

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset \bigcup_{\bar{u}\in S(\bar{e})} \bigcup_{(u^*,e^*)\in\partial J(\bar{u},\bar{e})} (e^* + D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})(u^*)).$$

Ta biết rằng hàm mục tiêu $J\colon L^2(\Omega) \times E \to \mathbb{R}$ thuộc lớp C^2 nên với mọi $\bar{u} \in \mathrm{S}(\bar{e})$ ta có

$$\partial J(\bar{u}, \bar{e}) = \{J'(\bar{u}, \bar{e})\} = \big\{\big(J'_u(\bar{u}, \bar{e}), J'_e(\bar{u}, \bar{e})\big)\big\}.$$

Do đó, ta thu được bao hàm thức

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset \bigcup_{\bar{u}\in S(\bar{e})} \Big(J'_e(\bar{u}, \bar{e}) + D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})\big(J'_u(\bar{u}, \bar{e})\big)\Big).$$

iii) Từ các giả thiết đã cho ta có thể áp dụng Định lý 7(iii) trong nghiên cứu của Mordukhovich et al. (2009) để suy ra đẳng thức

$$\partial\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)$$

và hàm giá trị tối ưu μ chính quy dưới tại $\bar{e}$. □

Ta nhận xét rằng công cụ và phương pháp chứng minh Định lý 3.1 là phát triển của kết quả của Quí et al. (2023). Trong khi Quí et al. (2023) nghiên cứu dưới vi phân Fréchet còn bài báo này nghiên cứu dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu với ràng buộc cân bằng.

Định lý 3.2. *Giả sử rằng các giả thiết* (A1)–(A3) *được thỏa mãn và xét* $\bar{e} = (\bar{e}_Y, \bar{e}_J, \bar{e}_P) \in \mathrm{dom}S$ *và* $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$. *Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

i) *Nếu* S là *μ-nửa liên tục trong tại* $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ *và toán tử đa trị* Q *đóng địa phương quanh điểm* $(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P, \bar{w}) \in \mathrm{gph}Q$ *và SNC tại điểm* $(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P, \bar{w})$ *với* $\bar{w} := -\psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P) \in Q(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P)$, *và thỏa điều kiện*

$$\begin{cases} 0 \in \nabla\psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P)^* w^* + D^*Q(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P, \bar{w})(w^*) \\ \qquad\qquad \Longrightarrow w^* = 0 \end{cases}$$

thì ta có bao hàm thức

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big),$$

với $\bar{\omega}_{\bar{e}} := (\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}) \in \mathrm{gph}\,\mathcal{G}_{ad}$.

ii) *Nếu* S *là μ-nửa compact trong tại điểm* $\bar{e}$ *và với mọi* $\bar{u} \in S(\bar{e})$ *toán tử đa trị* Q *đóng địa phương quanh điểm* $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w}) \in \mathrm{gph}Q$ *và SNC tại điểm* $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$, *với* $\bar{w} := -\psi(\bar{u}, \bar{e}_P) \in Q(\bar{u}, \bar{e}_P)$, *và thỏa điều kiện*

$$\begin{cases} 0 \in \nabla\psi(\bar{u}, \bar{e}_P)^* w^* + D^*Q(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})(w^*) \\ \qquad\qquad \Longrightarrow w^* = 0 \end{cases}$$

thì ta có bao hàm thức

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset \bigcup_{\bar{u}\in S(\bar{e})} \Big(J'_e(\bar{u}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}, \bar{e})\big)\Big),$$

với $\bar{\omega} := (\bar{e}, \bar{u}) \in \mathrm{gph}\,\mathcal{G}_{ad}$.

iii) *Nếu các giả thiết trong i) được thỏa mãn đồng thời* $\mathcal{G}_{ad}$ *là chính quy pháp tuyến tại* $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ *và* $S\colon \mathrm{dom}\,\mathcal{G}_{ad} \to 2^{L^2(\Omega)}$ *có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại* $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ *thì hàm giá trị tối ưu* μ *là chính quy dưới tại* $\bar{e}$ *và ta có đẳng thức*

$$\partial\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).$$

Chứng minh. Ta sẽ áp dụng Định lý 2.4 và Định lý 3.1 để chứng minh định lý này.

i) Với các giả thiết đã cho thì theo Định lý 2.4 ta có bao hàm thức

$$D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big) \subset \Xi(Q,\psi,\bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big).$$

Kết hợp bao hàm thức này và Định lý 3.1 ta suy ra

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) + \Xi(Q,\psi,\bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big).$$

ii) Với mọi $\bar{u} \in S(\bar{e})$, sử dụng tiếp bao hàm thức trong Định lý 2.4 sau đây

$$D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e},\bar{u})\big(J'_u(\bar{u},\bar{e})\big) \subset \Xi(Q,\psi,\bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u},\bar{e})\big).$$

và áp dụng Định lý 3.1 ta thu được

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset \bigcup_{\bar{u}\in S(\bar{e})}\Big(J'_e(\bar{u},\bar{e}) + \Xi(Q,\psi,\bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u},\bar{e})\big)\Big).$$

iii) Với các giả thiết đã cho, áp dụng Định lý 2.4 ta suy ra

$$D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e},\bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big) = \Xi(Q,\psi,\bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big).$$

Từ đẳng thức này ta tiếp tục áp dụng Định lý 3.1 để suy ra đẳng thức

$$\partial\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) + \Xi(Q,\psi,\bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big).$$

Cũng theo Định lý 3.1 ta suy ra rằng hàm giá trị tối ưu μ chính quy dưới tại $\bar{e}$. ☐

Định lý 3.3. *Giả sử rằng các giả thiết* (A1)–(A3) *được thỏa mãn và xét* $\bar{e} = (\bar{e}_Y,\bar{e}_J,\bar{e}_P) \in \mathrm{dom}S$ *và* $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$. *Khi đó, ta có các khẳng định sau:*

i) *Nếu các giả thiết trong i) của Định lý 3.2 được thỏa mãn thì ta có bao hàm thức tường minh sau*

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) + \Xi(Q,\psi,\bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big)$$

$$\subset \bigcup_{w^*\in W^*}\left\{e^* \left|\begin{array}{l} e^* = (e^*_Y,e^*_J,e^*_P) \in E^*,\\ e^*_Y = \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y),\\ e^*_J = y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y},\\ \big(e^*_P, -\varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} - \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y)\big)\\ \in \nabla\psi(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}_P)^*w^* +\\ \quad D^*Q(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}_P,\bar{w})(w^*)\end{array}\right.\right\}.$$

ii) *Nếu các giả thiết trong ii) của Định lý 3.2 được thỏa mãn thì ta có bao hàm thức tường minh sau đây*

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset \bigcup_{\bar{u}\in S(\bar{e})}\Big(J'_e(\bar{u},\bar{e}) + \Xi(Q,\psi,\bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u},\bar{e})\big)\Big)$$

$$\subset \bigcup_{\bar{u}\in S(\bar{e})}\bigcup_{w^*\in W^*}\left\{e^* \left|\begin{array}{l} e^* = (e^*_Y,e^*_J,e^*_P) \in E^*,\\ e^*_Y = \varphi_{\bar{u},\bar{e}} + \zeta(\bar{u} + \bar{e}_Y),\\ e^*_J = y_{\bar{u}+\bar{e}_Y},\\ \big(e^*_P, -\varphi_{\bar{u},\bar{e}} - \zeta(\bar{u} + \bar{e}_Y)\big)\\ \in \nabla\psi(\bar{u},\bar{e}_P)^*w^* +\\ \quad D^*Q(\bar{u},\bar{e}_P,\bar{w})(w^*)\end{array}\right.\right\}.$$

iii) *Nếu các giả thiết trong iii) của Định lý 3.2 được thỏa mãn thì ta có đẳng thức tường minh sau*

$$\partial\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) + \Xi(Q,\psi,\bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big)$$

$$= \bigcup_{w^*\in W^*}\left\{e^* \left|\begin{array}{l} e^* = (e^*_Y,e^*_J,e^*_P) \in E^*,\\ e^*_Y = \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y),\\ e^*_J = y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y},\\ \big(e^*_P, -\varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} - \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y)\big)\\ \in \nabla\psi(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}_P)^*w^* +\\ \quad D^*Q(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}_P,\bar{w})(w^*)\end{array}\right.\right\}.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 2.3 ta suy ra rằng đạo hàm của hàm mục tiêu theo biến điều khiển tại các điểm $(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) \in \mathrm{gph}S$ và $(\bar{u},\bar{e}) \in \mathrm{gph}S$ là

$$J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) = \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y),$$

$$J'_u(\bar{u},\bar{e}) = \varphi_{\bar{u},\bar{e}} + \zeta(\bar{u} + \bar{e}_Y).$$

Theo Quí et al. (2022) (Định lý 4.2) ta cũng có đạo hàm của hàm mục tiêu theo biến tham số tại các điểm $(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) \in \mathrm{gph}S$ và $(\bar{u},\bar{e}) \in \mathrm{gph}S$ là

$$J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) = \big(\varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, 0\big),$$

$$J'_e(\bar{u},\bar{e}) = \big(\varphi_{\bar{u},\bar{e}} + \zeta(\bar{u} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}+\bar{e}_Y}, 0\big).$$

Thay thế các biểu thức tường minh trên của

$$J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}),\ J'_u(\bar{u},\bar{e}),\ J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}),\ J'_e(\bar{u},\bar{e})$$

vào các bao hàm thức và đẳng thức được thiết lập trong i) - iii) của Định lý 3.2 ta suy ra các khẳng định tương ứng i) - iii) của định lý. ☐

Để minh họa cho các kết quả chính của bài báo ta xét ví dụ tính toán sau đây. Chú ý rằng ví dụ sau đây xem xét bài toán $P(e)$ với ràng buộc bất đẳng thức dạng

$$\psi(u,e_P) \le 0,$$

trong đó ràng buộc bất đẳng thức này được biểu diễn dưới dạng bao hàm thức ràng buộc cân bằng của bài toán $P(e)$. Cần lưu ý thêm rằng các bài toán tối ưu và điều khiển tối ưu với ràng buộc bất đẳng thức là phổ biến và thường xuất hiện trong toán học cả về phương diện lý thuyết và ứng dụng.

Ví dụ 3.1. Xét hàm $Q: L^2(\Omega) \times L^p(\Omega) \to 2^{\mathbb{R}}$ được xác định bởi

$$Q(u, e_P) = [0, +\infty), \forall (u, e_P) \in L^2(\Omega) \times L^p(\Omega).$$

Khi đó, bao hàm thức ràng buộc cân bằng

$$0 \in \psi(u, e_P) + Q(u, e_P)$$

tương đương với bất đẳng thức $\psi(u, e_P) \leq 0$. Xét điều khiển $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$ với $\bar{e} = (\bar{e}_Y, \bar{e}_J, \bar{e}_P)$. Với mọi $\bar{u} \in S(\bar{e})$ và điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w}) \in \text{gph}Q$ với

$$\bar{w} = -\psi(\bar{u}, \bar{e}_P) \in Q(\bar{u}, \bar{e}_P),$$

ta thấy rằng Q đóng địa phương và thỏa SNC tại $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$. Với mọi $\bar{u} \in S(\bar{e})$, ta tính toán được giá trị của đối đạo hàm $D^*Q(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ của hàm đa trị Q tại w^* như sau

$$D^*Q(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})(w^*) = \begin{cases} \{(0,0)\} & \text{với } w^* \geq 0 \\ \emptyset & \text{với } w^* < 0. \end{cases}$$

Do đó

$$\begin{cases} 0 \in \nabla\psi(\bar{u}, \bar{e}_P)^* w^* + D^*Q(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})(w^*) \\ \qquad \Longrightarrow w^* = 0. \end{cases}$$

Áp dụng Định lý 3.2 và Định lý 4.3 ta thu được

i) Khi S là μ-nửa liên tục trong tại $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ thì ta có bao hàm thức

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)$$
$$\subset \Big\{\Big(\varphi_{\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y}, \eta\nabla_{e_P}\psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P)\Big)\Big\},$$

trong đó $\eta := w^* \geq 0$.

ii) Khi S là μ-nửa compact trong tại điểm $\bar{e}$ thì ta có bao hàm thức

$$\partial\mu(\bar{e}) \subset \bigcup_{\bar{u} \in S(\bar{e})} \Big(J'_e(\bar{u}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}, \bar{e})\big)\Big)$$
$$\subset$$
$$\bigcup_{\bar{u} \in S(\bar{e})} \Big\{\Big(\varphi_{\bar{u}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u} + \bar{e}_Y}, \eta\nabla_{e_P}\psi(\bar{u}, \bar{e}_P)\Big)\Big\},$$

trong đó $\eta := w^* \geq 0$.

iii) Khi S là μ-nửa liên tục trong và có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ thì ta có công thức tính chính xác sau

$$\partial\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)$$
$$= \Big\{\Big(\varphi_{\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y}, \eta\nabla_{e_P}\psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P)\Big)\Big\},$$

trong đó $\eta := w^* \geq 0$.

4. KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu sự ổn định vi phân của bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính với ràng buộc cân bằng. Bài báo đã đạt được các kết quả mới bao gồm các công thức tính toán/đánh giá dưới vi phân Mordukhovich của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc dạng cân bằng. Bài báo có thể tiếp tục được mở rộng theo hướng nghiên cứu dưới vi phân qua giới hạn suy biến của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc dạng cân bằng.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo này được tài trợ bởi đề tài sinh viên 2024 mã số TSV2024-30 của Trường Đại học Cần Thơ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Casas, E. (2012). Second order analysis for bang-bang control problems of PDEs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *50*(4), 2355-2372. https://doi.org/10.1137/120862892

Casas, E., & Mateos, M. (2002). Second order optimality conditions for semilinear elliptic control problems with finitely many state constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *40*(5), 1431-1454. https://doi.org/10.1137/S0363012900382011

Casas, E., de los Reyes, J. C., & Tröltzsch, F. (2008). Sufficient second-order optimality conditions for semilinear control problems with pointwise state constraints. *SIAM Journal on optimization*, *19*(2), 616-643. https://doi.org/10.1137/07068240X

Mordukhovich, B. S. (2006a). *Variational analysis and generalized differentiation. I. Basic theory*. Springer-Verlag, Berlin.

Mordukhovich, B. S. (2006b). *Variational analysis and generalized differentiation. II. Applications*. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/3-540-31246-3

Mordukhovich, B. S. (2018). *Variational analysis and applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92775-6

Mordukhovich, B. S., Nam, N. M., & Yen, N. D. (2009). Subgradients of marginal functions in parametric mathematical programming. *Mathematical Programming*, *116*(1-2), 369-396. https://doi.org/10.1007/s10107-007-0120-x

Poliquin, R. A., & Rockafellar, R. T. (1998). Tilt stability of a local minimum. *SIAM Journal Optimization, 8*(2), 287-299. https://doi.org/10.1137/S1052623496309296

Qui, N. T. (2016). Coderivatives of implicit multifunctions and stability of variational systems. *Journal of Global Optimization*, *65*(3), 615-635. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0387-z

Qui, N. T. (2020). Subdifferentials of marginal functions of parametric bang–bang control problems. *Nonlinear Analysis*, *195*, 111743. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111743

Quí, N. T., Duy, V. T. T., Đạo, M. L. C., & Phúc, Đ. D. (2022). Vi phân suy rộng trong điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc biên trơn. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ*, *58*(1), 138-144. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2022.108

Quí, N. T., & Phúc, Đ. D. (2022). Vi phân suy rộng của hàm giá trị tối ưu trong điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình đạo hàm riêng elliptic. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ*, *58*(1), 87-94. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2022.009

Quí, N. T., Đạo, M. L. C., & Phúc, Đ. D. (2023). Tính chất vi phân trong điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ, 59*(6), 16-24. https://doi.org/10.22144/ctujos.2023.207

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2018). Stability for bang-bang control problems of partial differential equations. *Optimization*, *67*(12), 2157-2177. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1522634

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2019). Full stability for a class of control problems of semilinear elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *57*(4), 3021-3045. https://doi.org/10.1137/17M1153224

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2020). Subgradients of marginal functions in parametric control problems of partial differential equations. *SIAM Journal on Optimization*, *30*(2), 1724-1755. https://doi.org/10.1137/18M1200956

Tröltzsch, F. (2010). *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*. American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/gsm/112