Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.331

SỰ TỒN TẠI, TÍNH DUY NHẤT VÀ MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA NGHIỆM TRONG MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN NGẪU NHIÊN VỚI HỆ SỐ TRƯỢT KHÔNG THOẢ ĐIỀU KIỆN LIPSCHITZ

Dương Thị Bé Ba* và Lê Hoài Nhân
Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): dtbba@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 03/05/2024
Sửa bài (Revised): 05/07/2024
Duyệt đăng (Accepted): 08/08/2024

Title: *Existence, uniqueness, and some properties of solutions in a class of stochastic differential equations with non-Lipschitz drift coefficients*

Author(s): *Duong Thi Be Ba* and Le Hoai Nhan*

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, mục tiêu chính là xem xét một lớp các phương trình vi phân ngẫu nhiên (PTVPNN) có hệ số không thỏa điều kiện Lipschitz. Đầu tiên, các PTVPNN cơ bản cùng với một số kết quả quan trọng có liên quan được giới thiệu. Tiếp theo, thông qua sự kết hợp của phương pháp cắt đuôi và các kết quả trước đó, sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm cho một dạng cụ thể của PTVPNN với hệ số trượt không thỏa điều kiện Lipschitz được chứng minh. Cuối cùng, tính dương của nghiệm và tính bị chặn của các moment của chúng được xem xét.

Từ khoá: *Điều kiện Lipschitz, hệ số khuếch tán, hệ số trượt, phương pháp cắt đuôi, phương trình vi phân ngẫu nhiên*

ABSTRACT

The main objective of this paper is to examine a class of stochastic differential equations (SDEs) with coefficients that do not satisfy the Lipschitz condition. First, the basic SDEs along with some important related results are introduced. Next, by combining the truncation method with previous findings, the existence and uniqueness of solutions for a specific class of SDEs with non-Lipschitz drift coefficients are established. Finally, the positivity of the solutions and the boundedness of their moments are investigated.

Keywords: *Lipschitz condition, diffusion coefficient, drift coefficient, truncation method, stochastic differential equation*

1. GIỚI THIỆU

Phương trình vi phân ngẫu nhiên (PTVPNN) là một loại phương trình vi phân kết hợp giữa yếu tố xác định và yếu tố ngẫu nhiên để mô tả sự thay đổi của các quá trình theo thời gian. PTVPNN được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực như tài chính, vật lý, sinh học và kinh tế, nơi mà các hiện tượng ngẫu nhiên có ảnh hưởng đáng kể đến sự biến đổi của các quá trình. Ví dụ, trong tài chính, PTVPNN được sử dụng để mô hình hóa sự biến động của giá cổ phiếu thông qua mô hình Black-Scholes (Black & Scholes, 1973). Mô hình này sử dụng PTVPNN để định giá quyền chọn. Ngoài ra, PTVPNN cũng được sử dụng để mô hình hóa lãi suất, với các mô hình nổi tiếng như mô hình Vasicek (Vasicek, 1977) và mô hình Cox-Ingersoll-Ross (Cox et al., 1985) và một số mô hình khác. Trong sinh học, PTVPNN giúp mô phỏng sự lan truyền của dịch bệnh và sự thay đổi của quần thể sinh vật (Allen, 2007). Các ứng dụng khác của PTVPNN trong vật lý và kinh tế cũng rất phong phú, được trình bày trong nghiên cứu của Van Kampen (1992) và Dixit and Pindyck (1994).

Một vấn đề quan trọng thường được đặt ra trong nghiên cứu PTVPNN là sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm. Đây là một bài toán được nhiều nhà khoa học quan tâm và đã đạt được nhiều kết quả quan trọng. Cụ thể, trong trường hợp các hệ số của phương trình thỏa mãn điều kiện Lipschitz, nghiệm của phương trình sẽ tồn tại và là duy nhất (Ikeda & Watanabe, 1981; Oksendal, 2013). Tuy nhiên, nếu điều kiện Lipschitz không được thỏa mãn, PTVPNN có thể vô nghiệm. Trong trường hợp có nghiệm, việc phát hiện và chứng minh sự tồn tại nghiệm sẽ phức tạp hơn, điều này đòi hỏi việc sử dụng nhiều phương pháp khác nhau tương ứng với các bài toán cụ thể (Mao, 2007).

Trong phạm vi của bài báo này, sự tồn tại và tính duy nhất của nghiệm cho một lớp PTVPNN một chiều với hệ số trượt không thỏa mãn điều kiện Lipschitz được nghiên cứu. Bên cạnh đó, một số tính chất của nghiệm vừa tìm được cũng được nghiên cứu. Cụ thể, PTVPNN sau đây được xem xét:

$$dX_t = (X_t - X_t^2)dt + \lambda X_t dB_t, \tag{1}$$

với λ là hằng số dương và điều kiện ban đầu là $X_0 = x_0 > 0$.

Nhắc lại, một hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ được gọi là thoả điều kiện Lipschitz nếu tồn tại một số thực $C > 0$ sao cho

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|,$$

với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Dễ thấy rằng mặc dù hàm số $g(x) := \lambda x$ thoả điều kiện Lipschitz nhưng hàm số $h(x) := x - x^2$ không thoả điều kiện này. Do đó, sự tồn tại nghiệm của phương trình (1) không được đảm bảo.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Phần này sẽ nhắc lại các kết quả đã có của PTVPNN với các hệ số thoả mãn điều kiện Lipschitz và cách so sánh nghiệm của các PTVPNN có cùng hệ số khuếch tán. Các kết quả này được xem như là kiến thức cơ sở để giải bài toán được đưa ra. Đặc biệt, để giải quyết bài toán khi hệ số trượt không thoả điều kiện Lipschitz, phương pháp cắt đuôi được sử dụng. Đây là phương pháp được giới thiệu bởi Khoshnevisan et al. (2023) khi nghiên cứu phương trình vi phân ngẫu nhiên riêng. Phương pháp này cho ta cách xây dựng các hàm số liên tục Lipschitz từ hàm số chưa thoả điều kiện này. Sau đó, với các phép lấy giới hạn phù hợp ta sẽ thu được kết quả cho hàm số ban đầu.

Trước tiên, chúng tôi nhắc lại một số vấn đề cơ bản về PTVPNN. Cụ thể, PTVPNN một chiều cơ bản có dạng tổng quát như sau:

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t, \tag{2}$$

trong đó, biến X_t là quá trình ngẫu nhiên cần tìm theo thời gian t, b và σ là các hàm số xác định trên $\mathbb{R}$, lần lượt được gọi là hệ số trượt và hệ số khuếch tán của phương trình, và B_t là quá trình Wiener hay còn được gọi là chuyển động Brown, biểu diễn cho yếu tố ngẫu nhiên.

Hệ thống $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ được gọi là một cơ sở ngẫu nhiên với không gian mẫu Ω nếu $\mathcal{F}$ là một σ - đại số trên Ω, $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ là một bộ lọc trên $\mathcal{F}$, $\{B_t\}_{t\geq 0}$ là quá trình $\mathcal{F}_t$- Wiener, và P là độ đo xác suất trên $\mathcal{F}$.

Nghiệm của PTVPNN được định nghĩa tương ứng với cơ sở ngẫu nhiên như sau:

Định nghĩa 2.1. *(i) Cho một cơ sở ngẫu nhiên $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$. Một quá trình ngẫu nhiên $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ được gọi là nghiệm của PTVPNN (2) tương ứng với cơ sở ngẫu nhiên $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ nếu X liên tục hầu chắc chắn (h.c.c.), thích nghi với bộ lọc $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ và thoả mãn*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s \ h.c.c.$$

Ngoài ra còn có các định nghĩa về nghiệm mạnh và nghiệm yếu như sau:

(ii) PTVPNN (2) được gọi là có nghiệm mạnh nếu với mỗi cơ sở ngẫu nhiên $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ và biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_0$ - đo được η, tồn tại một nghiệm cho phương trình (2) tương ứng với cơ sở ngẫu nhiên $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ sao cho $X_0 = \eta$ h.c.c.

(iii) PTVPNN (2) được gọi là có nghiệm yếu nếu với biến ngẫu nhiên $\mathcal{F}_0$ - đo được η, tồn tại một nghiệm cho phương trình (2) tương ứng với cơ sở ngẫu nhiên $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ nào đó sao cho $X_0 = \eta$ theo phân phối.

Tính duy nhất của nghiệm được chia thành hai loại: tính duy nhất mạnh (hay tính duy nhất theo đường đi) và tính duy nhất yếu (hay tính duy nhất theo luật phân phối). Cụ thể, các khái niệm này được trình bày như sau:

Định nghĩa 2.2. *(i) Tính duy nhất mạnh: Giả sử tồn tại hai nghiệm* $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *và* $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *tương ứng với cùng cơ sở ngẫu nhiên* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ *và điều kiện ban đầu* $X_0 = \tilde{X}_0$ *h.c.c., thì* $X_0 = \tilde{X}_0$ *h.c.c. với mọi* $t \geq 0$.

(ii) Tính duy nhất yếu: Nếu tồn tại hai nghiệm $X = \{X_t\}_{t\geq 0}$ *và* $\tilde{X} = \{\tilde{X}_t\}_{t\geq 0}$ *tương ứng với cơ sở ngẫu nhiên* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ *và cơ sở ngẫu nhiên* $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \{\tilde{\mathcal{F}}_t\}_{t\geq 0}, \{\tilde{B}_t\}_{t\geq 0}, \tilde{P})$, *và điều kiện ban đầu* $X_0 = \tilde{X}_0$ *theo phân phối, thì* $X_t = \tilde{X}_t$ *theo phân phối với mọi* $t \geq 0$.

Theo Yamada and Watanabe (1971), sự tồn tại của tính duy nhất mạnh dẫn đến sự tồn tại của tính duy nhất yếu.

Với các điều kiện nhất định, sự tồn tại và tính duy nhất của các nghiệm cho PTVPNN được đảm bảo. Cụ thể, các điều kiện sau đây là đủ để đạt được các kết quả này.

Bổ đề 2.3. *Giả sử* b *và* σ *là các hàm liên tục Lipschitz trên tập số thực* $\mathbb{R}$. *Khi đó, PTVPNN (2) có nghiệm mạnh duy nhất. Có nghĩa là, tồn tại nghiệm mạnh cho phương trình (2) và tính duy nhất mạnh được đảm bảo.*

Kết quả của bổ đề trên được trình bày trong nghiên cứu của Ikeda và Watanabe (1981) cùng với Oksendal (2013). Đây là kết quả quan trọng khi nghiên cứu về PTVPNN.

Bên cạnh đó, ta có thể so sánh giá trị giữa các nghiệm của các PTVPNN dưới các điều kiện cụ thể như được mô tả trong định lý sau đây.

Bổ đề 2.4. *Cho cơ sở ngẫu nhiên* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ *và các PTVPNN*

$$dX^{(i)}{}_t = b_i\big(X^{(i)}{}_t\big)dt + \sigma(X^{(i)}{}_t)dB_t,$$

với $i \in \{1,2\}$.

Giả sử $b_1(x) \leq b_2(x)$ *với mọi* $x \in \mathbb{R}$, *các nghiệm mạnh duy nhất* $X^{(i)} = \{X^{(i)}{}_t\}_{t\geq 0}$ *của các PTVPNN trên tương ứng với cơ sở ngẫu nhiên* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$ *tồn tại và thoả điều kiện*

$$X^{(1)}{}_0 \leq X^{(2)}{}_0 \text{ h.c.c.}$$

Khi đó

$$X^{(1)}{}_t \leq X^{(2)}{}_t \; h.c.c.,$$

với mọi $t \geq 0$.

Kết quả trên là phiên bản đơn giản hơn của định lý 1.1 trong Chương 6 của Ikeda và Watanabe (1989). Từ kết quả này, ta có thể suy ra rằng, khi xét hai PTVPNN với cùng hệ số khuếch tán, nếu phương trình nào có hệ số trượt lớn hơn và điều kiện ban đầu lớn hơn, thì nghiệm của phương trình đó sẽ lớn hơn. Lưu ý rằng kết quả này không phụ thuộc bởi điều kiện Lipschitz.

Trở lại với phương trình (1), mặc dù hệ số khuếch tán $\sigma(x) := \lambda x$ thoả điều kiện Lipschitz nhưng hệ số trượt $b(x) := x - x^2$ không thoả điều kiện này. Do đó, đây là PTVPNN với hệ số trượt không thoả điều kiện Lipschitz. Bổ đề sau cho ta cách xây dựng các hàm thoả điều kiện Lipschitz từ hệ số trượt đã cho bằng phương pháp cắt đuôi.

Bổ đề 2.5. *Với* $N \in \mathbb{N}$, *đặt*

$$b_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \leq 0, \\ b(x) & \text{nếu } 0 < x < N, \\ b(N) & \text{nếu } x \geq N. \end{cases} \quad (3)$$

Khi đó, b_N *là hàm liên tục Lipschitz, bị chặn trên* $\mathbb{R}$.

Chứng minh. Hàm b_N, được xây dựng như công thức (3), rõ ràng là hàm liên tục bị chặn trên $\mathbb{R}$. Hơn nữa, hàm b_N thoả mãn điều kiện Lipschitz với hằng số Lipschitz là $1 + 3N^2$. ■

Với việc lấy giới hạn khi $N \to +\infty$ ta sẽ được $b_N(x) \to b(x)$ với mọi $x \geq 0$. Do đó, với việc lấy giới hạn này ta kỳ vọng sẽ thu được kết quả cho phương trình với hệ số trượt b.

3. SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH DUY NHẤT

Định lý 3.1. *PTVPNN (1) có nghiệm mạnh duy nhất.*

Chứng minh. Trong các phần tiếp theo của bài báo chúng tôi sử dụng cơ sở ngẫu nhiên $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$.

Theo Bổ đề 2.5 , b_N là hàm liên tục Lipschitz và bị chặn trên $[0, \infty)$. Do đó, PTVPNN sau có các hệ số thoả điều kiện Lipschitz

$$dX_t^{(N)} = b_N\big(X_t^{(N)}\big)dt + \sigma\big(X_t^{(N)}\big)dB_t,$$

với điều kiện ban đầu $X_0^{(N)} = x_0$.

Theo Bổ đề 2.3, phương trình trên có nghiệm mạnh duy nhất $X^{(N)} = \{X^{(N)}{}_t\}_{t\geq 0}$ đối với cơ sở ngẫu nhiên $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, \{B_t\}_{t\geq 0}, P)$.

Vì $b_N(0) = 0$, $\sigma(0) = 0$, và $x_0 > 0$ nên theo định lý so sánh nghiệm ta được $X_t^{(N)} > 0$ h.c.c. với mọi $t \geq 0$ và $N \geq 1$.

Ngoài ra, với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $N \geq 1$, ta có

$$b_N(x) \geq b_{N+1}(x).$$

Theo Bổ đề 2.4, ta được

$$X_t^{(N)} \geq X_t^{(N+1)}\ h.c.c.,$$

với mọi $t \geq 0$ và $N \geq 1$.

Do đó

$$X_t := \lim_{N\to\infty} X_t^{(N)},$$

tồn tại h.c.c. với mọi $t \geq 0$.

Vì $X^{(N)}$ là quá trình ngẫu nhiên thích nghi với bộ lọc $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$ nên X_t cũng thích nghi với bộ lọc $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Với $N \geq 1$, đặt

$$T_N := inf\{t \geq 0;\ X_t^{(N)} \geq \mathrm{N}\}.$$

Khi đó, T_N là quá trình dừng với bộ lọc $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}$.

Vì $b_N \geq b_{N+1}$nên từ Bổ đề 2.4, ta được

$$X_t^{(N)} \geq X_t^{(N+1)}\ h.c.c.,$$

với $t \in [0, T_N)$.

Lập luận tương tự ta cũng được

$$X_t^{(N)} = X_t^{(N+M)}\ h.c.c.,$$

với mọi $t \in [0, T_N)$, $N, M \in \mathbb{N}$.

Cho $M \to \infty$ ta được

$$X_t = X_t^{(N)}\ h.c.c., \qquad (4)$$

với mọi $t \in [0, T_N)$ và $N \in \mathbb{N}$.

Vì vậy ta có thể xem T_N là thời gian đầu tiên sao cho $X_t \geq N$.

Từ đó suy ra

$$T_N \leq T_{N+1}\ h.c.c.$$

Lưu ý rằng theo tính chất nghiệm của PTVPNN ta có $X^{(N)}$ là một quá trình ngẫu nhiên liên tục h.c.c. Do đó, từ đẳng thức (4) ta được X là một quá trình liên tục h.c.c. trên $[0, T_N)$. Do vậy, nếu $T_N \to \infty$ khi $N \to \infty$ thì ta có thể kết luận rằng X là một quá trình liên tục h.c.c. Đây cũng chính là kết quả của bổ đề sau.

Bổ đề 3.2. *Giới hạn* $T_\infty := \lim_{N\to\infty} T_N$ *tồn tại và bằng vô cực h.c.c.*

Chứng minh. Như đã trình bày, T_N là thời gian đầu tiên thoả $X_t \geq N$. Do đó

$$T_N \leq T_{N+1}\ h.c.c.$$

Vì vậy

$$T_\infty := \lim_{N\to\infty} T_N$$

tồn tại h.c.c.

Theo Bổ đề 2.4, với mọi $t \geq 0$ ta được

$$0 \leq X_t^{(N)} \leq Y_t\ h.c.c., \qquad (5)$$

trong đó Y_t là nghiệm của PTVPNN

$$dY_t = Y_t dt + \lambda Y_t dB_t,$$

với điều kiện ban đầu $Y_0 = x_0$.

Nghiệm của phương trình trên có thể tìm được cụ thể như sau:

$$Y_t = x_0 exp\left[\left(1 - \frac{\lambda^2}{2}\right)t + \lambda B_t\right].$$

Với $k \in \mathbb{N}$, ta được

$$Y_t^k = x_0^k e^{tk}\left(exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}t + \lambda B_t\right]\right)^k.$$

Vì $exp\left(-\frac{\lambda^2}{2}t + \lambda B_t\right)$ là một Martingale liên tục không âm nên với $T > 0$ ta được

$$E \sup_{t\in[0,T]} Y_t^k \leq x_0^k e^{Tk} E\left(\sup_{t\in[0,T]} exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}t + \lambda B_t\right]\right)^k$$

$$\leq x_0^k e^{Tk}\left(\frac{k}{k-1}\right)^k E\left(exp\left[-\frac{\lambda^2}{2}T + \lambda B_T\right]\right)^k$$

$$= x_0^k\left(\frac{k}{k-1}\right)^k \exp\left(k - \frac{k\lambda^2 T}{2} + \frac{k^2\lambda^2 T}{2}\right). \quad (6)$$

Dấu bất đẳng thức thứ hai là kết quả của việc áp dụng bất đẳng thức Doob cho các quá trình Martingale (xem thêm chi tiết trong nghiên cứu của Revuz and Yor, 2013).

Từ biểu thức (5) và bất đẳng thức Markov, ta được

$$P(T_N \leq T) \leq P\left(\sup_{t\in[0,T]} Y_t \geq N\right) \leq \frac{E\left[\sup_{t\in[0,T]} Y_t^k\right]}{N^k}.$$

Kết hợp với biểu thức (6) cho ta kết quả sau

$$P(T_N \leq T) \leq \frac{x_0^k\left(\frac{k}{k-1}\right)^k \exp\left(k - \frac{k\lambda^2 T}{2} + \frac{k^2\lambda^2 T}{2}\right)}{N^k} \to 0 \text{ khi } N \to \infty. \qquad (7)$$

Vì vậy, $T_N \to \infty$ h.c.c. khi $N \to \infty$. ■

Như đã thảo luận trước đó, kết quả của bổ đề trên suy ra rằng X liên tục hầu khắp nơi trên $[0, \infty)$.

Vấn đề cuối cùng để đạt được kết quả rằng X là nghiệm của phương trình (1) là cần chứng minh X thoả mãn

$$X_t = x_0 + \int_0^t X_s - X_s^2 ds + \int_0^t \lambda X_s dB_s \; h.c.c. \tag{8}$$

Ta đã có

$$0 \le X_t \le Y_t \; h.c.c.$$

và

$$\sup_{t\in[0,T]} Y_t \in L^k.$$

Vì vậy

$$\sup_{t\in[0,T]} X_t \in L^k.$$

Do đó, tích phân ngẫu nhiên

$$I_t := \int_0^t \lambda X_s dB_s$$

tồn tại và liên tục h.c.c.

Bên cạnh đó từ biểu thức (4) ta được (8) đúng với mọi $t \in [0, T_N)$ và mọi $N \in \mathbb{N}$. Kết hợp cùng với Bổ đề 2.2 ta được (8) đúng với mọi $t \in [0, \infty)$.

Sự tồn tại nghiệm của phương trình (1) đã được chứng minh. Tính duy nhất của X dễ dàng được suy ra từ tính duy nhất của $X^{(N)}$.

Tóm lại, Định lý 3.1 đã được chứng minh. ■

4. MỘT SỐ TÍNH CHẤT NGHIỆM

Định lý 4.1. Nghiệm của PTVPNN (1) luôn dương với mọi $t \ge 0$.

Chứng minh. Vì $X_t^{(N)} > 0 \; h.c.c.$ với mọi $t > 0$ và $N \in \mathbb{N}$ nên ta có

$$P(X_t \le 0, T_N > t) = P\left(X_t^{(N)} \le 0, T_N > t\right) = 0.$$

Điều này cùng với biểu thức (7) cho ta kết quả sau:

$$P(X_t \le 0) = \lim_{N\to\infty} P(X_t \le 0, T_N \le t) + \lim_{N\to\infty} P(X_t \le 0, T_N > t)$$

$$\le \lim_{N\to\infty} P(T_N \le t) + \lim_{N\to\infty} P(X_t^{(N)} \le 0, T_N > t)$$

$$= 0.$$

Do đó, ta có thể kết luận rằng $X_t > 0 \; h.c.c.$ như mong muốn. ■

Bên cạnh đó, nghiệm của phương trình (1) có các moment bị chặn được trình bày như sau:

Định lý 4.2. Với $k \ge 2$, ta có

$$\sup_{t\ge 0} E\left[{X_t}^k\right] \le [2x_0 + 8R(k)]^k.$$

Trong đó $R(k)$ được xác định bởi

$$R(k) = \sup_{y\ge 0} \frac{b(y) + \gamma k^2 y}{1 + \gamma k^2} < \infty,$$

với $\gamma = 4\lambda^2 \vee \frac{1}{4}$.

Hơn nữa, $R(k) \uparrow \infty$ khi $k \uparrow \infty$.

Chứng minh. Với $k \ge 2$ cố định cho trước, chọn một giá trị dương $\rho = \rho(k) = 1 + \gamma k^2$ sao cho với mọi $y \ge \rho$ ta có

$$(1 + \gamma k^2) y \le y^2.$$

Với $y \in [0, \rho]$, ta luôn có

$$(1 + \gamma k^2) y \le (1 + \gamma k^2)\rho - \gamma k^2 y.$$

Vì vậy, ta có thể kết luận rằng

$$(1 + \gamma k^2) y \le (1 + \gamma k^2)\rho + y^2.$$

Bên cạnh đó, với mọi $y \ge 0$, ta có thể biểu diễn

$$b(y) \le (1 + \gamma k^2)\rho - \gamma k^2 y.$$

Hiển nhiên

$$R(k) = \sup_{y\ge 0} \frac{b(y) + \gamma k^2 y}{1 + \gamma k^2} = \frac{1}{2}(1 + \gamma k^2) = \frac{1}{2}\rho.$$

Vì thế $R(k) < \infty$ và $R(k) \uparrow \infty$ khi $k \uparrow \infty$.

Theo Bổ đề 2.4, ta được

$$P(X_t \le K_t \text{ với mọi } t \ge 0) = 1,$$

trong đó K_t là nghiệm của PTVPNN

$$dK_t = \left((1 + \gamma k^2) 2R(k) - \gamma k^2 K_t\right)dt + \lambda K_t dB_t,$$

với điều kiện ban đầu $K_0 = x_0$.

Đặt $a := \gamma k^2$ và $c := (1 + \gamma k^2) 2R(k)$.

Ta có

$$dK_t = (c - aK_t)dt + \lambda K_t dB_t. \tag{9}$$

Đặt $Z_t := e^{at} K_t$. Theo công thức Itô, ta được

$$dZ_t = ae^{at} K_t dt + e^{at} dK_t. \tag{10}$$

Thay biểu thức (10) vào biểu thức (9) và rút gọn, ta được

$$dZ_t = ce^{at}dt + e^{at}K_t dB_t.$$

Vì vậy

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t ce^{as}ds + \int_0^t \lambda e^{as}K_s dB_s.$$

Do đó

$$K_t = \frac{1}{e^{at}}\left(x_0 + \frac{c}{a}(e^{at}-1)\right) + \frac{1}{e^{at}}\int_0^t \lambda e^{as}K_s dB_s. \tag{11}$$

Dễ thấy rằng K_t bị chặn dưới bởi 0.

Sau đây cận trên của K_t sẽ được xem xét. Cụ thể, biểu thức đầu tiên của (11) bị chặn trên bởi $L := x_0 + 4R(k)$ với mọi $t \geq 0$. Kết quả này được suy ra từ $a > 0$ và $\frac{c}{a} = 2\,R(k)\frac{1+a}{a} \leq 4R(k)$.

Do đó, với $k \geq 2$, áp dụng bất đẳng thức Minkowski cho đẳng thức (11) ta được

$$E\left[{K_t}^k\right] \leq 2^{k-1}\,L^k + 2^{k-1}\lambda^k E\left(\left|\int_0^t e^{a(s-t)}K_s dB_s\right|^k\right). \tag{12}$$

Vì $M_t = \int_0^t e^{a(s-t)}KdB_s$ là một Martingale liên tục nên theo bất đẳng thức Burkholder-Davis-Gundy (xem thêm chi tiết trong nghiên cứu của Carlen and Kree (1991)) ta được

$$E\left(\left|\int_0^t e^{a(s-t)}K_s dB_s\right|^k\right) \leq \left(2\sqrt{k}\right)^k E\left\{\left(\int_0^t e^{2a(s-t)}{K_s}^2 ds\right)^{\frac{k}{2}}\right\}.$$

Từ bất đẳng thức Minkowski cho tích phân, ta được

$$\left[E\left\{\left(\int_0^t e^{2a(s-t)}{K_s}^2 ds\right)^{\frac{k}{2}}\right\}\right]^{\frac{2}{k}} \leq \int_0^t \left(E\left[\left(e^{2a(s-t)}{K_s}^2\right)^{\frac{k}{2}}\right]\right)^{\frac{2}{k}} ds$$

$$\leq \left(\sup_{s\in(0,t)} E{K_s}^k\right)^{\frac{2}{k}} \int_0^t e^{2a(s-t)}\,ds$$

$$\leq \frac{1}{2a}\left(\sup_{s\in(0,t)} EK_s^k\right)^{\frac{2}{k}}.$$

Vì vậy, bất đẳng thức (12) trở thành

$$E\left[{K_t}^k\right] \leq 2^{k-1}L^k + 2^{k-1}\lambda^k\left(2\sqrt{k}\right)^k\left(\frac{1}{2a}\right)^{(k/2)} \sup_{s\in(0,t)} E{K_s}^k$$

$$\leq 2^{k-1}L^k + \frac{1}{2}\sup_{s\in(0,t)} E{K_s}^k,$$

trong đó dấu bất đẳng thức cuối được suy ra từ $\gamma \geq 4\lambda^2$.

Từ kết quả trên, ta suy ra

$$\sup_{s\,\in(0,t)} E\left[{K_s}^k\right] \leq (2L)^k.$$

Vì L không phụ thuộc vào t nên từ kết quả trên ta suy ra được điều phải chứng minh. ■

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã chứng minh được sự tồn tại và duy nhất của nghiệm cho một dạng cụ thể của PTVPNN, cũng như một số tính chất của nó thông qua việc áp dụng phương pháp cắt đuôi, các bất đẳng thức trong lý thuyết xác suất và các kết quả đã có trong nghiên cứu PTVPNN. Bên cạnh đó, bài báo cũng đã xem xét một số tính chất của nghiệm cho phương trình được xem xét. Lưu ý rằng, các phương pháp được đề cập trong bài báo có tính linh hoạt cao vì có thể áp dụng cho các dạng PTVPNN tổng quát hơn, cụ thể như phương trình sau

$$dX_t = (aX_t - bX_t^{\alpha})dt + \lambda X_t dB_t,$$

trong đó $a, b, \lambda > 0$, $\alpha > 1$ và điều kiện ban đầu dương. Hiển nhiên, để giải quyết bài toán này, các hàm số và hệ số phải chọn cần được điều chỉnh sao cho hợp lý.

Ngoài ra, một vấn đề khác đáng quan tâm trong nghiên cứu về PTVPNN là dáng điệu của nghiệm khi thời gian t tiến ra vô cực. Trong tương lai, nghiên cứu sẽ khai thác vấn đề này để khám phá sâu hơn về các khía cạnh quan trọng khác của PTVPNN.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo được tài trợ bởi đề tài nghiên cứu của Trường Đại học Cần Thơ, mã số: T2023-08.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Allen, E. (2007). *Modeling with Itô stochastic differential equations*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4020-5953-7

Carlen, E., & Kree, P. (1991). Lp estimates on iterated stochastic integrals. *The Annals of Probability*, 354-368. https://doi.org/10.1214/aop/1176990549

Cox, J. C., Ingersoll Jr, J. E., & Ross, S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica, 53,* 385-408. https://doi.org/10.2307/1911242

Dixit, A. K., & Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton university press. https://doi.org/10.1515/9781400830176

Ikeda, N., & Watanabe, S. (1981). *Stochastic differential equations and diffusion processes.* Elsevier. https://doi.org/10.1016/S0924-6509(08)70217-4

Khoshnevisan, D. (2002). *Multiparameter processes: an introduction to random fields.* Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/b97363

Khoshnevisan, D., et al. (2023). Phase analysis for a family of stochastic reaction-diffusion equations. *Electronic Journal of Probability*, *28*, 1-66. https://doi.org/10.1214/23-EJP983

Mao, X. (2007). *Stochastic differential equations and applications*. Elsevier. https://doi.org/10.1533/9780857099402

Oksendal, B. (2013). Stochastic differential equations: an introduction with applications. *Springer Science & Business Media*. https://doi.org/10.1007/978-3-662-03185-8

Revuz, D., & Yor, M. (2013). *Continuous martingales and Brownian.* Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-3-662-06400-9

Van Kampen, N. G. (1992). *Stochastic processes in physics and chemistry*. Elsevier. https://doi.org/10.1016/B978-0-444-52965-7.X5000-4

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of financial economics*, *5*(2), 177-188. https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2

Yamada, T., & Watanabe, S. (1971). On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations. *Journal of Mathematics of Kyoto University*, *11*(1), 155-167. https://doi.org/10.1215/kjm/1250523620