Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.342

MOMENT BẬC CAO CHO BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN TRONG KHÔNG GIAN TRẠNG THÁI RỜI RẠC

Lâm Hoàng Chương[1,*], Trịnh Hữu Nghiệm[2] và Lê Hoài Nhân[1]

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Trường Đại học Nam Cần Thơ*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): lhchuong@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 01/05/2024
Sửa bài (Revised): 30/06/2024
Duyệt đăng (Accepted): 04/08/2024

Title: *Higher order moment for random walks in discrete state space*

Author(s): *Lam Hoang Chuong[1*], Trinh Huu Nghiem[2] and Le Hoai Nhan[1]*

Affiliation(s): *[1]Can Tho University, [2]Nam Can Tho University*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, moment bậc cao của mô hình bước đi ngẫu nhiên trong không gian trạng thái rời rạc sẽ được xem xét. Đầu tiên, sử dụng công thức Jacob-Bernoulli tính tổng lũy thừa bậc cao để tìm nghiệm riêng của phương trình Poisson liên kết với toán tử Markov P tương ứng quá trình đang xét. Sau đó, sử dụng tính chất của kỳ vọng có điều kiện và phương pháp đệ quy để tính các moment. Cuối cùng, giới hạn của moment bậc cao sẽ được tính để đạt được kết quả mong muốn.

Từ khoá: *Bước đi ngẫu nhiên, công thức Jacob-Bernoulli, moment, toán tử Markov*

ABSTRACT

This paper investigates the higher order moment analysis of the random walk model in discrete state space. Initially, Jacob-Bernoulli's formula is employed to compute the sum of higher-order powers, facilitating the determination of a partial solution to the Poisson equation associated with the Markov operator P relevant to the studied process. Subsequently, when the properties of conditional expectation are applied and a recursive approach is employed, moments are computed. Lastly, the limit of higher-order moments is determined to attain the desired result.

Keywords: *Random walk, Jacob-Bernoulli's formula, moment, Markov operator*

1. GIỚI THIỆU

Moment là một trong những tham số đặc trưng quan trọng nhất trong việc nghiên cứu quy luật phân phối xác suất của các biến ngẫu nhiên, hay tổng quát hơn là các quá trình ngẫu nhiên. Năm 1887, nhà toán học Chebyshev lần đầu giới thiệu phương pháp moment trong việc chứng minh sự tồn tại của định lý giới hạn trung tâm cho một số mô hình xác suất, làm nền tảng cho sự phát triển đến tận ngày nay và phương pháp này đã được giới thiệu lại trong tài liệu của Billingsley (1995). Từ đó rất nhiều nghiên cứu liên quan đến phương pháp moment đã được công bố trong các tài liệu như Norris (1998); Ross (2010); Chương và ctv. (2021); Chương (2021); và Chương và ctv. (2024). Ngoài ra, một trong những quá trình ngẫu nhiên quan trọng và có nhiều ý nghĩa trong khoa học cũng như trong đời sống là mô hình bước đi ngẫu nhiên. Đây là một đối tượng nghiên cứu đã và đang được rất nhiều nhà toán học quan tâm cùng mức độ đào sâu khai thác vấn đề đạt được gần như tường tận. Tuy nhiên, với những ứng dụng ngày càng mạnh mẽ trong nhiều lĩnh vực, đặc biệt là trong lý thuyết trò chơi, thì nhiều vấn đề cần nghiên cứu mới lại được phát sinh. Trong kết quả nghiên cứu mới gần đây, Chương và ctv. (2024) đã đưa ra giới hạn của phương sai cho bước đi ngẫu nhiên trong không gian trạng thái $a\mathbb{Z}$ trong mô hình trò chơi không công bằng thông qua việc xác định các moment bậc 1 và bậc 2 của quá trình. Từ đó, nó trở thành động lực thúc đẩy việc tiếp tục nghiên cứu các moment bậc cao hơn nhằm làm phong phú hơn nữa các tính chất của bước đi ngẫu nhiên với không gian trạng thái rời rạc $\mathbb{Z}$. So với các moment bậc thấp thì vấn đề trở nên phức tạp hơn rất nhiều khi xét cho moment với bậc bất kỳ vì các phép toán trở nên cồng kềnh và khó khăn hơn. Điều này đòi hỏi cần nhiều công cụ hơn để giải quyết vấn đề. Ngoài ra, một trong những ứng dụng quan trọng của moment bậc cao là để chứng minh sự tồn tại của định lý giới hạn trung tâm hay luật số lớn cho các biến ngẫu nhiên. Đây được xem là một phương pháp khá hiệu quả trong nghiên cứu các dạng hội tụ của các biến ngẫu nhiên phụ thuộc.

Mô hình được nghiên cứu trong phạm vi bài báo này thuộc lớp các bước đi ngẫu nhiên không cân bằng với các giá trị lân cận gần nhất. Cụ thể, xét bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ trong không gian trạng thái $\mathbb{Z}$ với điều kiện ban đầu là $X_0 = 0$ và các xác suất chuyển được cho bởi các biểu thức sau

$$P(X_{n+1} = k+1 \,|\, X_n = k) = \beta,$$
$$P(X_{n+1} = k | X_n = k) = 1 - \beta - \gamma,$$
$$P(X_{n+1} = k-1 | X_n = k) = \gamma,$$

trong đó β và γ là các số dương thỏa $\beta + \gamma \leq 1$. Ngoài ra, ta giả sử rằng $\gamma < \beta$ như là điều kiện của bước đi ngẫu nhiên lệch phải, tức là quá trình có khuynh hướng dịch chuyển về bên phải trên trục số nguyên $\mathbb{Z}$.

Bài báo tập trung vào việc xác định giới hạn cho moment của bước đi ngẫu nhiên đang xét. Kết quả chính của nghiên cứu được cho ở định lý sau:

Định lý 1.1 *Giới hạn sau luôn đúng*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E({X_n}^k)}{n^k} = (\beta - \gamma)^k,$$

trong đó $E({X_n}^k)$ là moment bậc k ($k = 1,2,3,\ldots$) của biến ngẫu nhiên X_n.

Chương và ctv. (2024) đã xác định giới hạn này cho trường hợp $k = 1$ và $k = 2$ trong không gian trạng thái $a\mathbb{Z}$.

2. PHƯƠNG PHÁP NGHIÊN CỨU

Mục này sẽ trình bày chi tiết cách tính moment bậc 1 của bước đi ngẫu nhiên như đã giới thiệu ở phần trước. Đồng thời, phương pháp nghiên cứu sẽ được phân tích và đánh giá để làm tiền đề cho việc xác định moment bậc cao. Ta nhắc lại định nghĩa toán tử Markov liên kết với bước đi ngẫu nhiên như sau:

Định nghĩa 2.1 *Cho $(Z_n)_{n\geq 0}$ là một xích Markov với không gian trạng thái $\mathbb{Z}$. Toán tử Markov P được xác định bởi*

$$Pf(Z_n) = E[f(Z_{n+1})|Z_n], n \geq 0, \qquad (1)$$

trong đó f là hàm xác định trên $\mathbb{Z}$.

Dựa vào xác suất chuyển của bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ và cách tính kỳ vọng có điều kiện ta có:

$$Pf(m) = E[f(X_{n+1})|X_n = m], n \geq 0$$

theo công thức (1). Từ đó, ta thu được biểu thức như sau:

$$Pf(m) - f(m) = \beta[f(m+1) - f(m)] - \gamma[f(m) - f(m-1)]. \quad (2)$$

Tiếp theo, ta nhắc lại phương pháp xác định giới hạn của phương sai của bước đi ngẫu nhiên trong môi trường ngẫu nhiên được giới thiệu lần đầu bởi Depauw and Derrien (2009). Khi đó, nhóm tác giả đã nghiên cứu toán tử Markov P liên kết với bước đi ngẫu nhiên để xây dựng phương trình Poisson với điều kiện biên cho trước. Đây là một dạng của phương trình hàm xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$ và được giải thông qua áp dụng phương pháp truy hồi với các giá trị rời rạc. Cụ thể, ta xét phương trình hàm có dạng như sau

$$Pg(m) - g(m) = 1, \qquad (3)$$

trong đó hàm số g xác định trên tập $\mathbb{Z}$, với điều kiện biên $g(0) = 0$. Đây còn được gọi là phương trình Poisson tương ứng với toán tử P. Điều quan trọng nhất ở phương pháp này là ta cần chỉ ra sự tồn tại nghiệm phương trình (3) bằng bổ đề sau

Bổ đề 2.2 *Phương trình (3) luôn có nghiệm g xác định trên tập $\mathbb{Z}$.*

Chứng minh. Biến đổi vế trái của phương trình (3) bằng cách áp dụng công thức (2) ta có phương trình tương đương

$$g(m+1) - g(m) - \frac{\gamma}{\beta}[g(m) - g(m-1)] = \frac{1}{\beta}.$$

Để thuận tiện trong các bước tính toán ta đặt hệ số $\rho = \gamma/\beta$ là một số dương nhỏ hơn 1. Ta có nhận xét phương trình biến đổi sau cùng có dạng truy hồi theo m với các hệ số không bằng nhau và đặt biệt là có hệ số $\rho < 1$. Đây là tiền đề để ta tính được tổng chuỗi lũy thừa trong miền hội tụ $(0;\ 1)$. Để thấy rõ hơn điều này ta có thể đặt hàm

$$\varphi(m) = g(m) - g(m-1)$$

với $m \in \mathbb{Z}$. Khi đó ta lại được một phương trình truy hồi mới có dạng như sau

$$\varphi(m+1) - \rho\varphi(m) = \frac{1}{\beta}.$$

Với nhận xét ở trên là $0 < \rho < 1$ nên khi đệ quy theo m ta xác định được hàm φ như sau

$$\varphi(m) = \frac{1}{\beta(1-\rho)}$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$. Từ đó ta có phương trình tương đương theo hàm g là

$$g(m) - g(m-1) = \frac{1}{\beta - \gamma}$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$. Cuối cùng, nghiệm của phương trình (3) hoàn toàn được xác định, đó là

$$g(m) = \frac{m}{\beta-\gamma} \qquad (4)$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$ nhờ vào điều kiện biên cho trước theo giả thiết ban đầu là $f(0) = 0$. ∎

Bổ đề 2.3 *Giả sử hàm số g là nghiệm của phương trình (3). Khi đó, ta có*

$$E[g(X_n)] = n, \qquad (5)$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Vì g là nghiệm của phương trình (3) và X_n cũng nhận giá trị nguyên nên ta có thể thay m bởi X_n trong phương trình (3) mà không ảnh hưởng đến dấu của đẳng thức. Khi đó ta có

$$Pg(X_n) - g(X_n) = 1$$

luôn đúng với mọi $n \geq 0$.

Theo định nghĩa của toán tử P ta có thể viết lại đẳng thức trên thông qua kỳ vọng có điều kiện của X_n như sau

$$E[g(X_{n+1})|X_n] - g(X_n) = 1,$$

với mọi $n \geq 0$. Sử dụng tính chất kỳ vọng của kỳ vọng có điều kiện là

$$E[E(g(X_{n+1})|X_n)] = E[g(X_{n+1})]$$

dẫn đến kết quả là

$$E[g(X_{n+1})] - E[g(X_n)] = 1,$$

với mọi $n \geq 0$. Đến đây, sử dụng phương pháp đệ quy theo n kết hợp giả thiết về trạng thái ban đầu của bước đi ngẫu nhiên là $X_0 = 0$ suy ra $g(X_0) = g(0) = 0$ thì ta được điều phải chứng minh. ∎

Mệnh đề 2.4 *Moment bậc* 1 *của bước đi ngẫu nhiên* $(X_n)_{n\geq 0}$ *là*

$$E(X_n) = (\beta - \gamma)n \qquad (6)$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Để chứng minh mệnh đề này ta chỉ việc kết hợp hàm g tìm được trong công thức (4) và đẳng thức (5) bằng việc thế trực tiếp hàm g vào cách tính kỳ vọng của X_n. Cụ thể, ta có

$$E[g(X_n)] = E\left[\frac{X_n}{\beta - \gamma}\right] = n$$

với mọi $n \geq 0$. Do $\beta - \gamma$ là hằng nên ta có thể đưa ra khỏi kỳ vọng rồi quy đồng mẫu số thì được kết quả mong muốn. ∎

Trong phần tiếp theo, ta sẽ áp dụng cách thức này để xác định moment bậc cao của bước đi ngẫu nhiên X_n. Điều quan trọng nhất của phương pháp này là giải phương trình Poisson tìm nghiệm thích hợp để đánh giá kỳ vọng của các biến ngẫu nhiên đang xét.

3. MOMENT BẬC CAO CHO BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN

Ở đoạn này ta sẽ tính giá trị của $E({X_n}^k)$ cũng thông qua toán tử Markov P và giải phương trình Poisson để tìm nghiệm là các hàm số xác định trên tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Ta xét phương trình sau

$$Pg_k(m) - g_k(m) = m^{k-1} \qquad (7)$$

với mỗi $k \geq 1$ và với mọi $m \in \mathbb{Z}$ đồng thời thỏa điều kiện biên $g_k(0) = 0$. Đây là một dạng phương trình hàm bậc cao, đòi hỏi sử dụng các công cụ giải tích liên quan đến đa thức và chuỗi lũy thừa. Trường hợp đặc biệt với $k = 1$, hàm g_1 được xác định như trong phần tìm moment bậc 1, cụ thể là

$$g_1(m) = g(m) = \frac{m}{\beta - \gamma}$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$.

Định nghĩa 3.1 *(Hàm đa thức logarit) Chuỗi lũy thừa có dạng*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^s} = z + \frac{z^2}{2^s} + \frac{z^3}{3^s} + \cdots$$

được gọi là hàm đa thức logarit hay chuỗi Dirichlet, trong đó $s \in \mathbb{R}$.

Hàm đa thức logarit được ký hiệu là $Li_s(z)$. Ta thấy rằng hàm đa thức logarit luôn xác định với $|z| < 1$.

Các bổ đề sau được chứng minh trong tài liệu của Graham et al. (1994).

Bổ đề 3.2 (Jacob-Bernoulli) *Tổng lũy thừa*

$$\sum_{i=1}^{m} i^k = \frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k} C_{k+1}^{j} B_j m^{k+1-j}$$

trong đó B_j là hệ số Bernoulli thứ j, đó là

$$B_j = \sum_{v=o}^{j} \frac{1}{v+1}\sum_{r=0}^{v}(-1)^r C_j^r r^j.$$

Bổ đề 3.3 *Chuỗi số sau luôn hội tụ*

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)^j \rho^k = \frac{1}{\rho} Li_{-j}(\rho)$$

với mọi số thực $\rho \in (0;\ 1)$ và $j \in \mathbb{N}$.

Bổ đề 3.4 *Phương trình (7) luôn có nghiệm g_k xác định trên tập $\mathbb{Z}$*

Chứng minh. Biến đổi vế trái của phương trình (7) bằng cách áp dụng công thức (2) ta có phương trình tương đương

$$g_k(m+1) - g_k(m) - \rho[g_k(m) - g_k(m-1)] = \frac{m^{k-1}}{\beta}.$$

Đặt hàm $h_k(m) = g_k(m) - g_k(m-1)$. Phương trình ở trên trở thành phương trình truy hồi theo hàm số h_k, cụ thể là

$$h_k(m+1) - \rho h_k(m) = \frac{m^{k-1}}{\beta}.$$

Áp dụng giá trị của chuỗi hàm trong Bổ đề 3.3 và đệ quy theo $m-1, m-2, \dots, -\infty$ ta được

$$h_k(m) = \frac{1}{\beta\rho}[Li_0(\rho) m^{k-1} + (-1)^1 C_{k-1}^1 Li_{-1}(\rho) m^{k-2} + \dots + (-1)^{k-1} C_{k-1}^{k-1} Li_{-(k-1)}(\rho)]$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$. Từ đó dẫn đến

$$g_k(m) = \frac{1}{\beta\rho}\Big[\frac{1}{k}A_{00} m^k + \Big(\frac{1}{k}A_{01} + \frac{1}{k-1}A_{10}\Big) m^{k-1} + \cdots + \Big(\frac{1}{k}A_{0(k-1)} + \frac{1}{k-1}A_{1(k-2)} + \cdots + A_{(k-1)0}\Big) m\Big] \quad (8)$$

với mọi $m \in \mathbb{Z}$. Trong đó A_{js} được xác định bởi công thức

$$A_{js} = (-1)^j C_{k-1}^j C_{k-j}^s Li_{-j}(\rho) B_s, 0 \le s \le k-1, 0 \le j \le k-1.$$

Hàm $g_k(m)$ được xác định bằng cách đệ quy theo m và kết hợp điều kiện biên $g_k(0) = 0$. Như vậy, theo biểu thức (8), ta được hàm $g_k(m)$ là một đa thức bậc k theo biến m với hệ số của bậc cao nhất có giá trị là $1/(\beta-\gamma)k$. ■

Bổ đề 3.5 *Giả sử hàm sốg_k là nghiệm của phương trình (7). Khi đó, ta có*

$$E[g_k(X_n)] = \frac{(\beta-\gamma)^{k-1} n^k}{k} + O(n^{k-1}), \quad (9)$$

với mọi $n \ge 0$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh bổ đề này bằng quy nạp. Với $k = 1$ thì đẳng thức (9) đúng theo đẳng thức (5).

Giả sử đẳng thức (9) đúng với $k \ge 1$, phương trình hàm

$$P g_{k+1}(m) - g_{k+1}(m) = m^k$$

có nghiệm là

$$g_{k+1}(m) = \frac{1}{\beta-\gamma}\Big[\frac{1}{k+1}A_{00} m^{k+1} + \Big(\frac{1}{k+1}A_{01} + \frac{1}{k}A_{10}\Big) m^k + \cdots + \Big(\frac{1}{k+1}A_{0(k)} + \frac{1}{k}A_{1(k-1)} + \cdots + A_{(k)0}\Big) m\Big].$$

Từ đó ta có

$$E[g_{k+1}(X_{n+1})|X_n] - E g_{k+1}(X_n) = E\big({X_n}^k\big)$$

với mọi $n \ge 0$. Đệ quy theo n ta được kết quả kỳ vọng như sau

$$E[g_{k+1}(X_n)] = \frac{(\beta-\gamma)^k n^{k+1}}{k+1} + O(n^k),$$

thì được điều phải chứng minh. ■

Mệnh đề 3.6 *Moment bậc k của bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\ge0}$ được cho bởi công thức*

$$E\big({X_n}^k\big) = (\beta-\gamma)^k n^k + O(n^{k-1}), \quad (10)$$

với mọi $n \ge 0$.

Chứng minh. Với hàm $g_k(m)$ tìm được như trên, ta thế m bởi X_n thì ta được

$$g_k(X_n) = \frac{1}{\beta\rho}\Big[\frac{1}{k}A_{00}{X_n}^k + \Big(\frac{1}{k}A_{01} + \frac{1}{k-1}A_{10}\Big){X_n}^{k-1} + \cdots + \Big(\frac{1}{k}A_{0(k-1)} + \frac{1}{k-1}A_{1(k-2)} + \cdots + A_{(k-1)0}\Big) X_n\Big]$$

vì X_n cũng nhận giá trị trong tập số nguyên $\mathbb{Z}$. Trong biểu thức trên ta lưu ý

$$A_{00} = Li_0(\rho) = \frac{\rho}{1-\rho}.$$

Lấy kỳ vọng hai vế rồi áp dụng công thức (9) ta được điều cần phải chứng minh. ■

Trong phần cuối này, ta dùng Mệnh đề 3.6 để chứng minh Định lý 1.1. Cụ thể, ta chia hai vế của đẳng thức (10) cho n^k rồi tính giới hạn theo n thì được kết quả mong muốn.

Hệ quả 3.7 Nếu ta xét $k = 1$ và $k = 2$ thì Mệnh đề 3.6 suy ra

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E(X_n)}{n} = \beta - \gamma,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{E({X_n}^2)}{n^2} = (\beta - \gamma)^2.$$

Từ đó ta cũng kết luận về luật yếu số lớn, đó là

$$\frac{X_n}{n} \to \beta - \gamma$$

theo xác suất khi $n \to \infty$.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã sử dụng công cụ giải tích trong giải phương trình hàm để xác định moment bậc bất kỳ của bước đi ngẫu nhiên với không gian trạng thái rời rạc. Nhờ tính chất nghiệm của phương trình Poisson mà ta có thể chỉ ra sự liên hệ giữa các kỳ vọng của biến ngẫu nhiên thay vì phải tính toán trực tiếp rất phức tạp. Đây là một công cụ hữu hiệu cho các dạng bài toán liên quan đến lớp các quá trình ngẫu nhiên có tính chất truy hồi, phụ thuộc nhau và có tính Markov.

LỜI CẢM ƠN

Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, Mã số: T2022-28.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Billingsley, P. (1995). Probability and Measure, Third Edition. John Wiley, New York. https://doi.org/10.2307/2291440

Chương, L. H., Trường, N. V., Nhu, N. T. H., Hằng, P. T. M., & Nhiêm, N. C. (2024). Giới hạn phương sai cho bước đi ngẫu nhiên trong không gian aZ. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ, 60*(2), 36-40. https://doi.org/10.22144/ctujos.2024.254

Chương, L. H. (2021). Luật số lớn trong mô hình trò chơi không công bằng. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ, 57*(2), 44-48. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.036

Chương, L. H., Lộc, T. P., Kim, L. M., & Tuyền, D. T. (2021). Định lý giới hạn trung tâm trong mô hình trò chơi công bằng. *Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ*, *57*(2), 39-43. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.036

Depauw, J., & Derrien, J. M. (2009). Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur Z. *Comptes Rendus Mathematique*, *347*(7-8), 401–406. https://doi.org/10.1016/j.crma.2009.01.030

Graham, R. L., Knuth, D. E., & Patashnik O. (1994). Concrete mathematics: a foundation for computer science, Second Edition. Addison-Wesley Professional.

Norris, J. R. (1998). Markov chains. *Cambridge University Press.* https://doi.org/10.1017/CBO9780511810633

Ross, S. M. (2010). Introduction to Probability Models. Elsevier Inc. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-375686-2.00007-8