Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.326

TÍNH CHẤT CỦA HỢP THÀNH GIỮA CÁC QUAN HỆ MỜ

Đinh Hoài Em[1], Nguyễn Quốc Khánh[2*], Nguyễn Thế Tùng[3] và Nguyễn Lê Bảo Khuyên[4]
[1]*Trường THCS và THPT Hòa Thuận, huyện Giồng Riềng, tỉnh Kiên Giang*
[2]*Trường THPT Cái Tắc, huyện Châu Thành A, tỉnh Hậu Giang*
[3]*Trường Cao đẳng Cộng đồng Sóc Trăng*
[4]*Trường Cao đẳng Y tế Kiên Giang*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): khanhnq.ct@gmail.com*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 02/05/2024
Sửa bài (Revised): 25/06/2024
Duyệt đăng (Accepted): 08/08/2024

***Title:** Properties of composition of fuzzy relations*

***Author(s):** Dinh Hoai Em[1], Nguyen Quoc Khanh[2*], Nguyen The Tung[3] and Nguyen Le Bao Khuyen[4]*

***Affiliation(s):** [1]Hoa Thuan Secondary and High School, Giong Rieng District, Kien Giang province; [2]Cai Tac High School, Chau Thanh A district, Hau Giang province; [3]Soc Trang Community College;[4]Kien Giang Medical College*

TÓM TẮT

Nhận biết một hợp thành mờ trong thực tế là một bài toán thú vị và khó. Nó được nảy sinh trong lý thuyết toán mờ khi chúng ta mở rộng nó sang các bài toán thực tế. Đó là những vấn đề được đặt ra và giải quyết trong bài viết này thông qua những kiến thức cơ bản về liên kết mờ và hợp thành mờ.

***Từ khoá:** Hợp thành mờ, phép toán Lukasiewicz, phương tích B-K, t-chuẩn, tích trên B-K (tích Bandler-Kohout), tích dưới B-K*

ABSTRACT

Recognizing a fuzzy composition in reality is an interesting and difficult problem. It is arised in the theory of Fuzzy Mathematics when we extend it to practical problems such as fuzzy control and fuzzy clustering. Those are the problems raised and solved in this article through the basic knowledge of fuzzy association and fuzzy composition that have been researched.

***Keywords:** Fuzzy composition, Lukasiewicz operations, B-K square product, B-K supeproduct (Bandler-Kohout supeproduct), B-K subproduct, t-norm*

1. GIỚI THIỆU

Trong bài báo này, hợp thành của các quan hệ mờ được sử dụng để giải quyết vấn đề tìm nghiệm của phương trình quan hệ mờ đã được nghiên cứu bởi Bandler và Kohout (1978, 1985) và đưa ra ví dụ minh hoạ ứng dụng hợp thành của các quan hệ mờ trong sinh học.

Trong định nghĩa sau đây về một mạng dư đầy đủ, chúng ta tuân theo động cơ chính là logic mờ (cũng như mọi logic nhiều giá trị) phải là sự tổng quát hóa của logic cổ điển. Do đó, tất cả các điều kiện được thỏa mãn bởi mạng dư đầy đủ đều xuất phát từ việc chuyển đổi các tính chất của liên kết cổ điển sang nhiều giá trị.

2. HỢP THÀNH CỦA CÁC QUAN HỆ MỜ

Một ánh xạ $R: X \times Y \to [0;1]$ được gọi là ánh xạ mờ. Số $R(x;y) \in [0;1]$ là hàm thuộc giữa x và y.

Quan hệ mờ giữa các phần tử trong hai tập hữu hạn $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ và $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ có thể được biểu diễn dưới dạng ma trận:

$$R = \begin{pmatrix} R(x_1,y_1) & R(x_1,y_2) & \dots & R(x_1,y_n) \\ R(x_2,y_1) & R(x_2,y_2) & \dots & R(x_2,y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R(x_m,y_1) & R(x_m,y_2) & & R(x_m,y_n) \end{pmatrix}.$$

Nghịch đảo trong cách tiếp cận lý thuyết tập hợp cho một mối quan hệ mờ sẽ là

$$R^{-1}(x,y) = R(y,x),$$

tức là chuyển vị. Chúng ta cũng có các phép toán t-chuẩn và t-đối chuẩn

$$T(R,P)(x,y) = T(R(x,y), P(x,y)),$$
$$S(R,P)(x,y) = S(R(x,y), P(x,y)),$$

Với T, S lần lượt là t-chuẩn và t-đối chuẩn.

3. HỢP THÀNH MAX-MIN

Định nghĩa 1. Cho $X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$ và $Z = \{z_1, z_2, ..., z_p\}$ là các tập mờ hữu hạn. Nếu

$$\begin{cases} R = (r_{ij})_{i=1,2,...,m; j=1,2,...,n} \in \mathcal{F}(X \times Y) \\ S = (s_{jk})_{j=1,2,...,n; k=1,2,...,p} \in \mathcal{F}(Y \times Z) \end{cases}$$

là quan hệ mờ rời rạc thì thành phần

$$T = (t_{ik})_{i=1,2,..,m; k=1,2,..,p} = R \circ S$$
$$:= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge S(y,z)) \in \mathcal{F}(X \times Z)$$

được cho bởi

$$t_{ik} = \bigvee_{j=1}^{n} (r_{ij} \wedge s_{jk})_{1=1,2,...,m; k=1,2,...,p},$$

T được gọi là hợp thành max-min của các quan hệ mờ R và S.

Ví dụ 1. Nếu $R = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 1 & 0,3 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}$ và

$$Q = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,5 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ thì}$$

$$R \circ S = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0,4 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,5 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,3 & 0,2 \end{bmatrix}.$$

Mệnh đề 1

Cho $R_1, R_2 \in \mathcal{F}(X \times Y)$ và $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$.

(i) Nếu $R_1 \le R_2$ thì $R_1 \circ Q \le R_2 \circ Q$,

(ii) Với bất kỳ $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$ và $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ ta có:

$$(R \vee S) \circ Q = (R \circ Q) \vee (S \circ Q),$$

(iii) Với bất kỳ $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$ và $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ ta có:

$$(R \wedge S) \circ Q \le (R \circ Q) \wedge (S \circ Q).$$

Chứng minh.

(i) Ta có

$$\begin{aligned} R_1 \circ Q(x;z) &= \bigvee_{y \in Y} (R_1(x;y) \wedge Q(y;z)) \\ &\le \bigvee_{y \in Y} (R_2(x;y) \wedge Q(y;z)) \\ &= R_2 \circ Q(x;z). \end{aligned}$$

Khi đó $R_1 \circ Q \le R_2 \circ Q$.

(ii) Thật vậy,

$$(R \vee S) \circ Q(x;z) = \bigvee_{y \in Y} (R \vee S)(x;y) \wedge Q(y;z)$$
$$= \bigvee_{y \in Y} (R(x;y) \wedge Q(y;z)) \vee (S(x;y) \wedge Q(y;z))$$
$$\le \bigvee_{y \in Y} (R(x;y) \wedge Q(y;z)) \vee \bigvee_{y \in Y} (S(x;y) \wedge Q(y;z)).$$

Từ kết quả trên ta có $(R \vee S) \circ Q \le (R \circ Q) \vee (S \circ Q)$.

Mặt khác, từ mệnh đề trước ta có $R \circ Q \le (R \vee S) \circ Q$ và $S \circ Q \le (R \vee S) \circ Q$. Do đó

$$(R \circ Q) \vee (S \circ Q) \le (R \vee S) \circ Q.$$

Kết hợp hai bất đẳng thức ta được đẳng thức cần chứng minh.

(iii) Ta có

$$(R \wedge S) \circ Q(x,z) = \bigvee_{y \in Y} (R \wedge S)(x,y) \wedge Q(y,z)$$
$$= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge Q(y,z)) \wedge (S(x,y) \wedge Q(y,z))$$
$$\le \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge Q(y,z)) \wedge \bigvee_{y \in Y} (S(x,y) \wedge Q(y,z)) \quad \blacksquare$$
$$= (R \circ Q) \wedge (S \circ Q)(x,z).$$

4. HỢP THÀNH MIN-MAX

Định nghĩa 2. Cho $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ và $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$. Khi đó $R \bullet S \in \mathcal{F}(X \times Z)$, được định nghĩa là

$$R \bullet S(x,z) = \bigwedge_{y \in Y}\left(R(x,y) \vee S(y,z)\right)$$

được gọi là hợp thành min-max của các quan hệ mờ R và S.

Ví dụ 2. Nếu $R = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 1 & 0,3 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}$ và

$$Q = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,5 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix} \text{ thì}$$

$$R \bullet S = \begin{bmatrix} 0,2 & 0,2 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 & 0,2 & 0,3 \end{bmatrix}.$$

Mệnh đề 2

Cho $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$ và $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$, ta có

(i) Nếu $R \le S$ thì $R \bullet Q \le S \bullet Q$,

(ii) $(R \wedge S) \bullet Q = (R \bullet Q) \wedge (S \bullet Q)$,

(iii) $(R \vee S) \bullet Q \ge (R \bullet Q) \vee (S \bullet Q)$.

Chứng minh.

(i) Ta có

$$\begin{aligned} R \bullet Q(x,z) &= \bigwedge_{y \in Y} R(x,y) \vee Q(y,z) \\ &\le \bigwedge_{y \in Y} S(x,y) \vee Q(y,z) = S \bullet Q(x,z). \end{aligned}$$

Do đó, $R \bullet Q \le S \bullet Q$.

(ii) Ta có

$$(R \wedge S) \bullet Q(x,z) = \bigwedge_{y \in Y}(R \wedge S)(x,y) \vee Q(y,z)$$
$$= \bigwedge_{y \in Y}\left(R(x,y) \vee Q(y,z)\right) \wedge \left(S(x,y) \vee Q(y,z)\right)$$
$$\ge \bigwedge_{y \in Y}\left(R(x,y) \vee Q(y,z)\right) \wedge \bigwedge_{y \in Y}\left(S(x,y) \vee Q(y,z)\right),$$

nghĩa là $(R \wedge S) \bullet Q \ge (R \bullet Q) \wedge (S \bullet Q)$.

Mặt khác, từ mệnh đề trước ta có $R \bullet Q \ge (R \wedge S) \bullet Q$ và $S \bullet Q \ge (R \wedge S) \bullet Q$ nên

$$(R \bullet Q) \wedge (S \bullet Q) \ge (R \wedge S) \bullet Q.$$

Từ hai điều trên ta suy ra được

$$(R \wedge S) \bullet Q = (R \bullet Q) \wedge (S \bullet Q).$$

(iii) Ta có

$$(R \vee S) \bullet Q(x,z) = \bigwedge_{y \in Y}(R \vee S)(x,y) \vee Q(y,z)$$
$$= \bigwedge_{y \in Y}\left(R(x,y) \vee Q(y,z)\right) \vee \left(S(x,y) \vee Q(y,z)\right)$$
$$\ge \bigwedge_{y \in Y}\left(R(x,y) \vee Q(y,z)\right) \vee \bigwedge_{y \in Y}\left(S(x,y) \vee Q(y,z)\right)$$
$$= (R \bullet Q) \vee (S \bullet Q)(x,z).$$ ■

Mệnh đề 3. Nếu xét phủ định tiêu chuẩn thì chúng ta có $\overline{R \circ S} = \overline{R} \bullet \overline{S}$ và $\overline{R \bullet S} = \overline{R} \circ \overline{S}$.

Chứng minh. Ta thấy rằng

$$\begin{aligned} \overline{R \circ S}(x,z) &= \overline{\bigwedge_{y \in Y}\left(R(x,y) \wedge S(y,z)\right)} \\ &= \bigwedge_{y \in Y}\overline{\left(R(x,y) \wedge S(y,z)\right)} \\ &= \bigwedge_{y \in Y}\left(\overline{R}(x,y) \vee \overline{S}(y,z)\right) \\ &= \overline{R} \bullet \overline{S}. \end{aligned}$$

Đẳng thức $\overline{R \bullet S} = \overline{R} \circ \overline{S}$ được chứng minh tương tự. ■

5. HỢP THÀNH MIN $\rightarrow$

Cho $\rightarrow$ là hàm Godel chuẩn được định nghĩa là

$$\begin{aligned} x \rightarrow y &= \sup\{z \in [0;1] \mid x \wedge z \le y\} \\ &= \begin{cases} 1; & khi\ x \le y \\ y; & trường\ hợp\ khác \end{cases} \end{aligned}$$

Mệnh đề 4. Với bất kỳ $x, y, z \in [0;1]$ ta có

(i) $(x \vee y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \wedge (y \rightarrow z)$,

(ii) $(x \wedge y) \rightarrow z = (x \rightarrow z) \vee (y \rightarrow z)$,

(iii) $x \rightarrow (y \vee z) = (x \rightarrow y) \vee (x \rightarrow z)$,

(iv) $x \rightarrow (y \wedge z) = (x \rightarrow y) \wedge (x \rightarrow z)$.

Chứng minh.

(i) Trường hợp 1. Nếu $x \vee y \le z$ thì $(x \vee y) \to z = 1$ và do vậy ta có $x \le z$ và $y \le z$. Khi đó

$$(x \to z) \wedge (y \to z) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Trường hợp 2. Nếu $x \vee y > z$ thì $(x \vee y) \to z = z$ và $x \ge z$ or $y \ge z$ và do vậy ta có

$$(x \to z) = z \text{ hoặc } (y \to z) = z$$

và khi đó $(x \to z) \wedge (y \to z) = z$.

(ii) Trường hợp 1. Nếu $x \wedge y \le z$ thì $(x \wedge y) \to z = 1$. Do vậy, suy ra một trong hai

$$x \le z \text{ hoặc } y \le z$$

ứng với mỗi trường hợp thì $x \to z = 1$ hoặc $y \to z = 1$ và do đó

$$(x \to z) \vee (y \to z) = 1.$$

Trường hợp 2. Nếu $x \wedge y > z$, thì $(x \wedge y) \to z = z$. Do vậy, nếu $(x \wedge y) > z$ thì xảy ra cả hai

$$x > z \text{ và } y > z$$

suy ra $x \to z = z$ và $y \to z = z$.

(iii) Trường hợp 1. Nếu $x \le (y \vee z)$ thì $x \to (y \vee z) = 1$. Do vậy, xảy ra một trong hai

$$x \le y \text{ hoặc } x \le z$$

suy ra $x \to y = 1$ hoặc $x \to z = 1$.

Trường hợp 2. Ngược lại $x \to (y \vee z) = (y \vee z)$ ta có

$$x > y \text{ và } x > z$$

suy ra $x \to y = y$ và $x \to z = z$.

Do đó $(x \to y) \vee (x \to z) = y \vee z$.

(iv) Trường hợp 1. Nếu $x \le (y \wedge z)$ thì $x \to (y \wedge z) = 1$. Do vậy, xảy ra cả hai

$$x \le y \text{ và } x \le z,$$

suy ra $x \to y = 1$ và $x \to z = 1$. Vậy

$$(x \to y) \wedge (x \to y) = 1.$$

Trường hợp 2. Ngược lại $x \to (y \wedge z) = y \wedge z$ thì ta có $x > y$ và $x > z$.

Suy ra $x \to y = y$ và $x \to z = z$. Vậy

$$(x \to y) \wedge (x \to z) = y \wedge z \blacksquare$$

Định nghĩa 3. Hợp thành dưới được định nghĩa:

$$R \lhd S(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} R(x,y) \to S(y,z).$$

Thông thường, nó được gọi là tích dưới và phép toán 2 ngôi dưới đây

$$R \rhd S(x,z) = \bigwedge_{y \in Y} S(x,y) \to R(y,z)$$

gọi là hợp thành trên.

Ví dụ 3.

Nếu $R = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 1 & 0,3 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}$ và

$Q = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,5 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$ thì

$R \lhd Q = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,3 & 0,1 & 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0 & 0,1 \end{bmatrix}$ và

$R \rhd Q = \begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 1 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 & 0 \\ 0 & 1 & 0,2 & 0 \\ 0 & 0,3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Mối quan hệ giữa hai phép toán trên tuân theo mệnh đề dưới đây:

Mệnh đề 5. Với bất kỳ $R, S \in \mathcal{F}(X \times Y)$ và $Q \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ sao cho $R \le S$ thì

(i) $R \lhd Q \ge S \lhd Q$,

(ii) $(R \vee S) \lhd Q = (R \lhd Q) \wedge (S \lhd Q)$,

(iii) $(R \wedge S) \lhd Q = (R \lhd Q) \vee (S \lhd Q)$.

Chứng minh.

(i) Từ $\to$ đang giảm trong đối số đầu tiên ta có

$$R \lhd Q(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} R(x,y) \to Q(y,z)$$

$$\geq \bigwedge_{y\in Y} \big(R(x,y) \to Q(y,z)\big) = R \lhd S(x,z).$$

(ii) Từ mệnh đề trước ta có $(R \vee S) \lhd Q \leq R \lhd Q$ và $(R \vee S) \lhd Q \leq S \lhd Q$, suy ra

$$(R \vee S) \lhd Q \leq (R \lhd Q) \wedge (S \lhd Q).$$

Từ mệnh đề của hàm Godel chuẩn suy ra

$$(R \vee S) \lhd Q(x,z) = \bigvee_{y\in Y} \big(R(x,y) \vee S(x,y)\big) \to Q(y,z)$$

$$= \bigwedge_{y\in Y} \big(R(x,y) \to Q(y,z)\big) \wedge \big(S(x,y) \to Q(y,z)\big)$$

$$\geq \bigwedge_{y\in Y} \big(R(x,y) \to Q(y,z)\big) \wedge \bigwedge_{y\in Y} \big(S(x,y) \to Q(y,z)\big)$$

$$= (R \lhd Q) \wedge (S \lhd Q)(x,z).$$

Kết hợp hai bất đẳng thức ta được đẳng thức cần chứng minh.

(iii) Tương tự *(ii)* ta có $(R \wedge S) \lhd Q \geq R \lhd Q$ và $(R \wedge S) \lhd Q \geq S \lhd Q$, suy ra

$$(R \vee S) \lhd Q \geq (R \lhd Q) \vee (S \lhd Q). \blacksquare$$

Định nghĩa 4. Kết hợp hợp thành trên và hợp thành dưới ta được hợp thành tương đương

$$\boldsymbol{R \,\square\, S(x,z) = \bigwedge_{y\in Y} R(x,y) \leftrightarrow S(y,z)}$$

Hay $R \,\square\, S = (R \lhd S) \wedge (R \rhd S)$.

Ví dụ 4.

Nếu $R = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,4 & 0,2 & 0,5 \\ 0 & 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,4 & 0,5 & 0,2 & 0,1 \\ 1 & 0,3 & 0,3 & 0 \end{bmatrix}$ và

$Q = \begin{bmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,2 & 0,1 \\ 0,6 & 0,5 & 0 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 & 0,4 & 0,1 \\ 0,4 & 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{bmatrix}$ thì

$$R \,\square\, Q = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. HỆ PHƯƠNG TRÌNH QUAN HỆ MỜ VỚI HỢP THÀNH MAX-MIN VÀ HỢP THÀNH MIN $\to$

Ta xét hai phương trình quan hệ mờ sau đây:

$$R \circ P = Q \text{ và } R \lhd P = Q$$

với $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$, $P \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ và $Q \in \mathcal{F}(X \times Z)$.

Định lý 1. Các bất đẳng thức sau đây đúng:

(i) $P \leq R^{-1} \lhd (R \circ P)$,

(ii) $R \circ \big(R^{-1} \lhd Q\big) \leq Q$,

(iii) $R \leq \big(P \lhd (R \circ P)^{-1}\big)^{-1}$.

Chứng minh.

(i) Từ Mệnh đề 4, ta có với mọi $y \in Y$ và $z \in Z$,

$$R^{-1} \lhd (R \circ P)(y,z) = \bigwedge_{x\in X} R^{-1}(y,x) \to (R \circ P)(x,z)$$

$$= \bigwedge_{x\in X} R^{-1}(y,x) \to \bigvee_{t\in Y} R(x,t) \wedge P(t,z)$$

$$\geq \bigwedge_{x\in X} R(x,y) \to R(x,y) \wedge P(y,z)$$

$$\geq \bigwedge_{x\in X} P(y,z) = P(y,z).$$

(ii) Từ Định nghĩa 1, ta có với mọi $x \in X$ và $z \in Z$,

$$R \circ \big(R^{-1} \lhd Q\big)(x,z) = \bigvee_{y\in Y} R(x,y) \wedge \big(R^{-1} \lhd Q\big)(y,z)$$

$$= \bigvee_{y\in Y} R(x,y) \wedge \Big(\bigwedge_{t\in X} R^{-1}(y,x) \to Q(t,z)\Big)$$

$$\leq \bigvee_{y\in Y} R(x,y) \wedge \big(R(x,y) \to Q(x,z)\big)$$

$$\leq \bigvee_{y\in Y} Q(x,z) = Q(x,z).$$

(iii) Ta có với mọi $x \in X$ và $y \in Y$

$$\left(P \lhd (R\circ P)^{-1}\right)^{-1}(x,y) = P \lhd (R\circ P)^{-1}(y,x)$$
$$= \bigwedge_{z\in Z} P(y,z) \to (R\circ P)^{-1}(z,x)$$
$$= \bigwedge_{z\in Z} P(y,z) \to \bigvee_{t\in Y} R(x,y)\wedge P(t,z) \qquad \blacksquare$$
$$\geq \bigwedge_{z\in Z} P(y,z) \to R(x,y)\wedge P(y,z)$$
$$\geq \bigwedge_{z\in Z} R(x,y) = R(x,y)$$

7. VÍ DỤ MINH HOẠ CỦA HỢP THÀNH CÁC QUAN HỆ MỜ

Cho $Z = \{z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7\}$ là tập hợp các họ động vật, trong đó z_1 – Chim, z_2 – Cá, z_3 – Chó, z_4 – Ngựa, z_5 – Muỗi, z_6 – Đơn huyệt, z_7 – Bò sát. Đặt $Y = \{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8, y_9\}$ là tập hợp các đặc điểm của động vật, trong đó y_1 – động vật bay, y_2 – động vật có lông vũ, y_3 – động vật có vây, y_4 – động vật có móng vuốt, y_5 - động vật có lông, y_6 – động vật có răng, y_7 – động vật có mỏ, y_8 – động vật có vảy, y_9 – động vật bơi lội. Và cuối cùng, cho X = {Thú mỏ vịt, Đà điểu, Chó ít lông, Cá sấu, Cá vẹt, Hải âu} là tập hợp các con vật cụ thể.

Cho $S \in \mathcal{F}(Y \times Z)$ và $R \in \mathcal{F}(X \times Y)$ được cho như sau:

S	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
y_1	0,8	0	0	0	1	0	0
y_2	1	0	0	0	0	0	0
y_3	0	1	0	0	0	0,5	0
y_4	0,9	0	1	0	0	0,8	0,3
y_5	0	0	0,8	1	0	0	0,7
y_6	0	0,6	1	1	0	0	0,7
y_7	1	0,1	0	0	0	0,5	0
y_8	0,7	0,1	0	0	0	0	1
y_9	0,5	1	0,8	0,6	0,1	0,7	0,8

R	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
Thú mỏ vịt	0	0	0	1	1	0	1	0	0,9
Đà điểu	0	1	0	1	0	0	1	0,5	0,4
Chó ít lông	0	0	0	1	0,2	1	0	0	0,7
Cá sấu	0	0	0	1	0	1	0	1	0,9
Cá vẹt	0	0	1	0	0	0,9	0,8	1	1
Hải âu	1	1	0	1	0	0	1	0,4	0,9

Sử dụng Đại số Lukasiweicz làm cấu trúc đại số cơ bản thì ta được các kết quả sau:

$R \circ S$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
Thú mỏ vịt	1	0,9	1	1	0	0,9	0,7
Đà điểu	1	0,4	1	0	0	0,8	0,5
Chó ít lông	0,9	0,7	1	1	0	0,8	0,7
Cá sấu	0,9	0,9	1	1	0	0,8	1
Cá vẹt	0,8	1	0,9	0,9	0,1	0,7	1
Hải âu	1	0,9	1	0,5	1	0,8	0,7

$R \lhd S$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
Thú mỏ vịt	0	0	0	0	0	0,5	0
Đà điểu	0,9	0	0	0	0	0	0
Chó ít lông	0	0	1	0	0	0	0,3
Cá sấu	0	0	0	0	0	0	0,3
Cá vẹt	0	0,3	0	0	0	0	0
Hải âu	0,6	0	0	0	0	0	0

$R \square S$	z_1	z_2	z_3	z_4	z_5	z_6	z_7
Thú mỏ vịt	0	0	0	0	0	0,5	0
Đà điểu	0,2	0	0	0	0	0	0
Chó ít lông	0	0	0,4	0	0	0	0
Cá sấu	0	0	0	0	0	0	0,3
Cá vẹt	0	0,3	0	0	0	0	0
Hải âu	0,6	0	0	0	0	0	0

Ta thấy, kết quả do $R \circ S$ đưa ra rất nhiều số liệu về đặc điểm của một loại động vật, điều đó không giúp phân loại một con vật nhất định vào một họ chính xác. Mặt khác, kết quả do $R \lhd S$ đưa ra vẫn còn nhiều số liệu cho một loại động vật. Cuối cùng $R \square S$ cho kết quả mỗi loại động vật có một số liệu để đánh giá, khi đó dễ dàng phân loại một con vật nhất định vào một họ chính xác.

8. KẾT LUẬN

Bài viết này đã giải quyết được các vấn đề quan trọng như phân tích sâu tính chất các hợp thành của quan hệ mờ; khả năng giải được phương trình quan hệ mờ; ví dụ minh hoạ ứng dụng của hợp thành các quan hệ mờ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bandler W., & Kohout L. J. (1978). Fuzzy relational products and fuzzy implication operators. In:Proc. Int. *Workshop on Fuzzy Reasoning Theory and Applications*. Queen Mary College, London.

Bandler W., & Kohout L. J. (1985). Relational-product architectures for information processing, (pp. 25-37). *Information Sciences 37.*

Nhung Cao, Stepnicka M., & Holcapek M. (2015). An Extension of Fuzzy Relational Compositions Using Generalized Quantifiers. *16th World Congress of the International*. Fuzzy Systems Association (IFSA).

Bandler, W., & Kohout, L. J. (1980). Fuzzy relational products as a tool for analysis and synthesis of the behaviour of complex natural and artificial systems. In *Fuzzy sets: theory and applications to policy analysis and information systems* (pp. 341-367). Boston, MA: Springer US.

Kohout L. J., & Bandler W. (1985). Relational-product architectures for information processing. *Information Sciences* (pp.25 – 37).