Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.379

GIẢI THUẬT CHO BÀI TOÁN VỊ TRÍ LÁT CẮT TỔNG TỐI TIỂU TRÊN ĐỒ THỊ

Nguyễn Đặng Ngọc Ngân*, Phan Minh Tâm và Thái Đức Hưng
Bộ môn Sư phạm Toán học, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): nganb2100137@student.ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 30/04/2024
Sửa bài (Revised): 02/07/2024
Duyệt đăng (Accepted): 17/08/2024

Title: *Title is italicized with the first letter and proper nouns capitalized*

Author(s): *Nguyen Dang Ngoc Ngan*, Phan Minh Tam and Thai Duc Hung*

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu vấn đề tìm một lát cắt phân chia một đồ thị liên thông thành hai thành phần liên thông rời nhau sao cho tổng khoảng cách có trọng số từ bất kỳ đỉnh nào của đồ thị đến lát cắt là nhỏ nhất. Bài toán này được gọi là bài toán lát cắt tổng tối tiểu. Bài báo sẽ chứng minh rằng bài toán này là NP-khó trên đồ thị tổng quát bằng cách quy giản bài toán phủ tập hợp về bài toán này và đồng thời chỉ ra rằng bài toán trên đồ thị cây có thể giải trong thời gian tuyến tính bằng quy hoạch động.

Từ khoá: *Bài toán vị trí, lát cắt, trung vị, độ phức tạp, quy hoạch động*

ABSTRACT

This paper concerns the problem of finding a cut which partitions a connected network into two connected components so that the total weighted distance from any vertices of the network to the cut edge(s) is minimized. This problem is called the minisum cut problem. This paper shows that the problem is NP-hard on general networks by reducing the set cover problem to this problem and the problem on trees can be solved in linear time by dynamic programming.

Keywords: *Location problem, cut, median, complexity, dynamic programming*

1. GIỚI THIỆU

Lý thuyết vị trí có nhiều ứng dụng quan trọng trong vận trù học và trong thực tế cuộc sống. Bài báo "Năm mươi năm Lý thuyết vị trí" (Marianov & Eiselt, 2024) đã tổng hợp các cột mốc quan trọng và nổi bật trong lịch sử phát triển của Lý thuyết vị trí.

Hai bài toán phổ biến nhất trong Lý thuyết vị trí là bài toán p-median và p-center. Hai loại bài toán này được phát triển vô cùng mạnh mẽ (Kariv & Hakimi, 1979a, 1979b). Đối với bài toán p-median, mục tiêu là tìm vị trí đặt p cơ sở trên một đồ thị sao cho tổng khoảng cách có trọng số từ mỗi đỉnh đến cơ sở gần nhất là nhỏ nhất. Bài toán p-median thường được dùng để mô hình hóa các cơ sở công cộng giúp tối thiểu hóa chi phí di chuyển như bệnh viện hay trường học. Bài toán p-center có mục tiêu là chọn p đỉnh từ một đồ thị sao cho khoảng cách lớn nhất từ bất kỳ đỉnh nào đến đỉnh gần nhất trong tập hợp các đỉnh được chọn là nhỏ nhất. Bài toán p-center có nhiều ứng dụng thực tế quan trọng, đặc biệt trong các lĩnh vực liên quan đến quy hoạch các cơ sở vận chuyển như là các trạm xe buýt, trung tâm logistic để đảm bảo rằng khoảng cách vận chuyển hoặc di chuyển lớn nhất được giảm thiểu, từ đó cải thiện hiệu quả vận hành và giảm chi phí (Chen et al., 2020; İbrahim Miraç & Eren, 2020).

Trong khi các bài toán vị trí cổ điển thường tập trung vào việc xác định các vị trí quan trọng như là các điểm trên mặt phẳng hoặc trên mạng lưới đồ thị, một số tác giả đã nghiên cứu vấn đề xác định vị trí của các đối tượng hình học không phải là điểm. Ví dụ, Schöbel (1999) đã nghiên cứu bài toán vị trí các đường thẳng trên mặt phẳng và các siêu phẳng trong không gian. Brimberg et al. (2009) đã xem xét bài toán định vị một đường tròn sao cho tổng khoảng cách có trọng số từ các cơ sở đến đường tròn này là nhỏ nhất. Họ đã chứng minh rằng nếu bán kính của đường tròn không được cố định, thì sẽ tồn tại một đường tròn tối ưu đi qua hai cơ sở. Bên cạnh đó, Juel (2005) cũng đã nghiên cứu bài toán vị trí của đường tròn trên mặt cầu.

Tuy vậy, cho đến nay, chưa có mô hình nào nghiên cứu các bài toán vị trí trên mạng lưới đồ thị với các đối tượng không phải là điểm. Bài báo này đề xuất bài toán xác định một lát cắt trên đồ thị sao cho tổng khoảng có trọng số từ các cơ sở cho trước đến lát cắt là nhỏ nhất. Việc nghiên cứu bài toán này có tiềm năng ứng dụng trong việc xác định các liên kết quan trọng (lát cắt) trong một mạng lưới đồng thời đảm bảo tính trung tâm (tổng tối tiểu) của lát cắt. Ví dụ, trong một mạng lưới giao thông, các con đường chính hoặc cầu có thể được xem là các liên kết quan trọng. Việc xác định được những liên kết này có thể giúp quản lý giao thông hiệu quả hơn và tối ưu hóa việc phân bổ tài nguyên.

2. ĐỊNH NGHĨA BÀI TOÁN VÀ GIẢI THUẬT

2.1. Kiến thức chuẩn bị

Trong lý thuyết tính toán, khái niệm *NP-khó* là một thước đo quan trọng để đánh giá độ phức tạp của các bài toán. Nó xác định những bài toán mà mức độ khó của chúng tương đương hoặc lớn hơn bất kỳ bài toán nào trong lớp *NP*, tạo ra một thách thức lớn cho các nhà khoa học. Hiểu được *NP-khó* giúp nhận thức rõ hơn về những thách thức khi đối mặt với các bài toán khó và phát triển các phương pháp hiệu quả để giải quyết chúng.

Để hiểu rõ về *NP-khó*, trước tiên cần biết một số khái niệm cơ bản khác như *P* và *NP*.

Lớp *P* bao gồm các bài toán có thể được giải quyết một cách hiệu quả, tức là bằng một thuật toán có thời gian thực thi theo một hàm đa thức của kích thước đầu vào.

Lớp *NP* bao gồm các bài toán mà nếu được cung cấp một giải pháp cho bài toán, thì có thể kiểm tra tính đúng đắn của giải pháp đó một cách nhanh chóng (trong thời gian đa thức). Một bài toán thuộc lớp *NP* không nhất thiết phải có một thuật toán giải quyết nó trong thời gian đa thức, nhưng nếu có một cách nào đó để kiểm tra một giải pháp trong thời gian đa thức, bài toán đó thuộc lớp *NP*.

Một bài toán được gọi là *NP-đầy đủ* nếu nó vừa nằm trong lớp *NP* và mọi bài toán trong lớp *NP* đều có thể được chuyển đổi (bằng một thuật toán đa thức) thành bài toán đó. Nếu có thể tìm được một thuật toán thời gian đa thức để giải quyết bất kỳ bài toán *NP*-đầy đủ nào, thì tất cả các bài toán trong lớp *NP* cũng có thể được giải quyết trong thời gian đa thức.

NP-khó là lớp các bài toán ít nhất cũng khó như các bài toán *NP-đầy đủ*. Tuy nhiên, các bài toán *NP-khó* không nhất thiết phải thuộc lớp *NP*. Nói cách khác, một bài toán *NP-khó* có thể không có cách kiểm tra giải pháp trong thời gian đa thức, hoặc thậm chí nó có thể là bài toán mà giải pháp của nó không thể được xác minh trong thời gian đa thức. Đặc điểm chính của các bài toán *NP-khó* là nếu có một thuật toán thời gian đa thức để giải quyết một bài toán *NP-khó* nào đó, thì mọi bài toán trong lớp *NP* cũng có thể được giải quyết trong thời gian đa thức.

2.2. Định nghĩa bài toán

Cho đồ thị $G=(V,E)$ với tập đỉnh V và tập cạnh E. Mỗi cạnh $e\in E$ được gán một trọng số dương, gọi là $l(e)$. Hơn nữa, một trọng số không âm w_v được gán với mỗi đỉnh $v\in V$. Khoảng cách giữa hai đỉnh u và v, ký hiệu là $d(u,v)$, là độ dài đường đi ngắn nhất nối hai đỉnh. Với tập con $S\subset V$ và một đỉnh $v\in V$, khoảng cách giữa v và S được định nghĩa là $d(v,S)=\min_{u\in S} d(u,v)$. Trong đồ thị G, một lát cắt chia tập V thành hai tập con tách rời, gọi là V_1 và V_2. Ta ký hiệu một lát cắt của G là (V_1,V_2). Với lát cắt (V_1,V_2), gọi:

$$C(V_1,V_2)=\{v\in V_1 : \exists v'\in V_2 \text{ sao cho } (v,v')\in E\} \cup \{v\in V_2 : \exists v'\in V_1 \text{ sao cho } (v,v')\in E\}$$

là tập các đỉnh cắt.

Gọi $\{e=(u,v): u,v\in C(V_1,V_2)\}$ là tập các cạnh cắt trên đồ thị.

Bài toán lát cắt tổng tối tiểu (*Minisum cut (MSC)*) trên G được phát biểu như sau:

Xác định một lát cắt $\left(V_1, V_2\right)$ để hàm median $\sum_{v\in V} w_v d\left(v, C\left(V_1, V_2\right)\right)$ nhỏ nhất, với ràng buộc hai đồ thị con sinh bởi V_1 và V_2 liên thông.

2.3. Tính NP-khó trên đồ thị tổng quát

Xem xét vấn đề trên các đồ thị tổng quát và thu được kết quả sau đây.

Định lý 1. *Bài toán vị trí tổng lát cắt tổng tối tiểu trên đồ thị tổng quát là NP-khó.*

Chứng minh. Để chứng minh bài toán lát cắt tổng tối tiểu là *NP-khó*, ta sẽ chứng minh rằng bài toán *Bao phủ tập hợp (Set Cover problem (SC))* có thể quy giản về *phiên bản quyết định* của bài toán lát cắt tổng tối tiểu. Cụ thể hơn, xuất phát từ bài toán *(SC)*, ta sẽ xây dựng *một* bài toán lát cắt tổng tối tiểu dạng quyết định sao cho câu trả lời của bài toán này là "có" khi và chỉ khi câu trả lời cho bài toán *(SC)* là "có". Khi đó, do bài toán *(SC)* là *NP-đầy đủ* (xem Garey & Johnson, 1990), nên bài toán lát cắt tổng tối tiểu là *NP-khó*.

Trước hết, ta giới thiệu về bài toán *Bao phủ tập hợp (SC)*. Cho một tập hợp $S=\{1,2,...,n\}$, $S_1, S_2, ..., S_m$ là *m* tập con của *S* và một số nguyên *k*, với $k \le m$. Trong bài toán *(SC)*, mục tiêu là xác định sự tồn tại của *k* tập con của *S* sao cho hợp của chúng đúng bằng *S*, nghĩa là $\bigcup_{i=1}^{k} S_{j_i} = \{1,2,...,n\}$, trong đó các chỉ số $j_1,..., j_k$ thuộc $\{1,...,m\}$.

Bây giờ, ta giới thiệu phiên bản quyết định của bài toán lát cắt tổng tối tiểu *(MSC)* trên đồ thị. Cho đồ thị *G* và một giá trị mục tiêu *B*, câu hỏi ở đây là liệu có thể tách mạng lưới *G* thành hai phần liên thông sao cho giá trị trung vị trên các cạnh bị cắt không vượt quá *B* đã cho hay không?

Xét bài toán *(SC)*, ta sẽ xây dựng một bài toán *(MSC)* từ *(SC)* như sau.

Xét đồ thị *G = (V; E)* với $V = V_1 \cup V_2 \cup V_3 \cup \{s,t\}$ và $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4$.

Trong đó,

$V_1 = \{P_1, P_2, ..., P_m\}$, $V_2 = \{Q_1, Q_2, ..., Q_m\}$,

$V_3 = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$.

$E_1 = \left\{\left(s, P_j\right)\right\}_{j=1,...,m}$, $E_2 = \left\{\left(P_j, Q_j\right)\right\}_{j=1,...,m}$,

$E_3 = \left\{\left(Q_j, v_i\right) : i \in \{1,...,n\}, j \in \{1,...,m\}, i \in S_j\right\}$ và

$E_4 = \left\{\left(v_i, t\right)\right\}_{i=1,...,n}$.

Độ dài mỗi cạnh trong *G* bằng 1. Trọng số tại các đỉnh là $\mathrm{w}_s = \mathrm{w}_t = 0, \mathrm{w}_{P_i} = \mathrm{w}_{Q_j} = 1$ với mọi $j = 1,...,m,$ và $\mathrm{w}_{v_v} = k$ với mọi $i = 1,...,n$. Ta chọn $B = k.$

Ta thấy rằng đồ thị *G* được xây dựng từ *(SC)* trong thời gian đa thức. Tiếp theo ta sẽ chứng minh rằng câu trả lời cho *(SC)* là "có" khi và chỉ khi câu trả lời cho *(MSC)* dạng quyết định là "có".

Như vậy chứng minh sẽ gồm hai chiều. Ta bắt đầu chiều đầu tiên.

Giả sử rằng câu trả lời cho *(SC)* là "có". Ta cần chứng minh câu trả lời cho *(MSC)* là "có". Không mất tính tổng quát, giả sử tồn tại *k* tập con của *S*, gọi là $S_1, S_2, ..., S_k$, sao cho hợp của chúng chính xác là *S*. Tiếp theo, chọn lát cắt *C(P,V\P) với* $P = \{s, P_1, P_2, ..., P_m, Q_1, Q_2, ..., Q_k\}$. Rõ ràng các tập con sinh ra bởi *P* và *(V \ P)* là liên thông. Bây giờ ta sẽ chứng minh rằng giá trị hàm mục tiêu đúng bằng *k*. Dựa vào cách chọn lát cắt như trên, ta thấy rằng $Q_1,...,Q_m$ thuộc vào lát cắt nên $d(Q_i, C(P, V \setminus P)) = 0.$ Hơn nữa, vì P_j liền kề Q_j với $j = k+1,...,m$, nên P_j cũng thuộc $C(P, V \setminus P)$ do đó $d\left(P_j, C\left(P, V \setminus P\right)\right) = 0.$

Vì hợp của $S_1, S_2, ..., S_k$ bằng *S*, nên mỗi đỉnh v_i với $i = 1,...,n$ đều kề với một trong các đỉnh $Q_1,...,Q_k$, nghĩa là v_i là các đỉnh cắt, do đó $d(v_i, C(P, V \setminus P)) = 0$ với $i = 1,...,n.$ Vậy ta chỉ còn P_i với $i = 1,...,k$ và *s, t* không thuộc $C(P, V \setminus P).$ Trong khi đó $\mathrm{w}_s = \mathrm{w}_t = 0.$ Nên giá trị hàm mục tiêu bằng

$$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{w}_{P_i} d\left(P_i, C(P, V \setminus P)\right) = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{w}_{P_i} d\left(P_i, Q_i\right) = k.$$

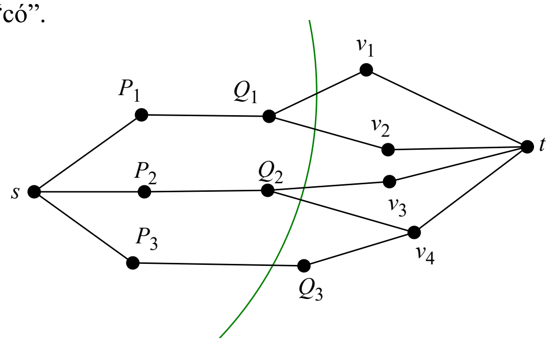
Nói cách khác câu trả lời cho *(MSC)*, với đồ thị *G* được xác định như trên, là "có".

Để minh họa cho những lập luận trên, xét ví dụ sau:

Cho $S = \{1;2;3;4\}.$

$S_1 = \{1;2\}$; $S_2 = \{3;4\}$; $S_3 = \{4\}.$

Xét $k = 2$, khi đó dễ thấy tồn tại 2 tập S_1 và S_2 để hợp của chúng chính xác bằng *S*. Bằng cách chọn lát cắt $C(P, V \setminus P)$ với $P = \{s, P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2\}$.Ta có $f(C(P, V \setminus P)) = 2$. Nghĩa là câu trả lời cho bài toán *MSC* dạng quyết định trong trường hợp này là "có".



Hình 1. Đồ thị minh họa

Ngược lại, ta giả định rằng câu trả lời cho *(MSC)* là "có", tức là tồn tại một lát cắt $C(P, V \setminus P)$ với hàm trung vị tương ứng không vượt quá *k*. Ta cần chứng minh tồn tại *k* tập con của *S* sao cho hợp của chúng chính xác bằng *S*.

Giả sử phản chứng, không tồn tại *k* tập con nào của *S* để khi hợp lại, ta được tập *S*.

Đặt $K = \{P_j : P_j \notin C(P, V \setminus P)\}$.Nói cách khác, *K* là tập hợp các đỉnh P_j không thuộc vào tập các đỉnh cắt. Xét hai trường hợp:

Trường hợp 1: Nếu $|K| = 0$, nghĩa là P_i phải là đỉnh cắt với $i = 1, \ldots, m$ (1) hay nói cách khác, lát cắt phải nằm trên các cạnh $E_1 \cup E_2$

(Vì ngược lại nếu có bất kỳ cạnh $e \in E_3 \cup E_4$ là cạnh cắt thì sẽ tồn tại P_i nằm ngoài lát cắt). Từ *(1)* suy ra

$$f(C(P,V \setminus P)) = \sum_{v \notin V_1} \mathrm{w}_v d(v, C(P, V \setminus P))$$
$$+ \sum_{v \in V_1} \mathrm{w}_v d(v, C(P, V \setminus P))$$
$$= \sum_{v \notin V_1} \mathrm{w}_v d(v, C(P, V \setminus P)) \geq \sum_{v \in V_3} \mathrm{w}_v d(v, C(P, V \setminus P))$$
$$\geq \sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}_{v_i} d(v_i, C(P, V \setminus P)) \geq kn > k$$

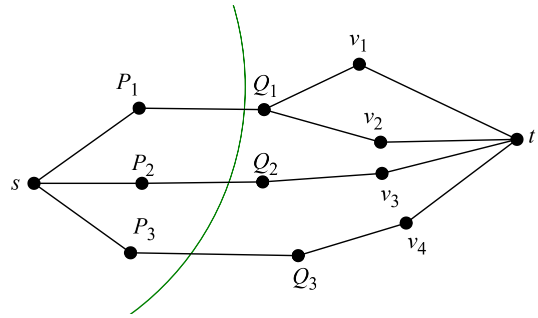
Lúc này, ta thấy rằng giá trị hàm mục tiêu vượt quá *k*, điều này mâu thuẫn với giả thiết. Vậy, tồn tại *k* tập con của *S,* mà khi ta hợp chúng lại ta được tập *S.*

Ta xét ví dụ sau:

Cho $S = \{1; 2; 3; 4\}$.

$S_1 = \{1; 2\}$; $S_2 = \{3\}$; $S_3 = \{4\}$.

Xét $k = 2$, rõ ràng không tồn tại 2 tập con nào của *S,* để khi hợp lại, ta được *S.* Đồ thị *G* trong trường hợp này được minh họa trong Hình 2. Hình 2 cũng minh họa một lát cắt trong đó $|K| = 0$.



Hình 2. Đồ thị minh họa

Nếu $1 \leq |K| \leq m$, nghĩa là tồn tại ít nhất một đỉnh P_i nằm ngoài lát cắt. Mặc khác, vì không tồn tại *k* tập con sao cho hợp chúng lại chính xác bằng *S*, nên tồn tại ít nhất một đỉnh v_j trong V_3 nhưng không nằm trong *C(P, V \ P)*. Khi đó

$$f(C(P,V \setminus P)) \geq \mathrm{w}_{P_i} d(P_i, C(P, V \setminus P))$$
$$+ \mathrm{w}_{v_j} d(v_j, C(P, V \setminus P))$$
$$= 1 + k > k. \ \blacksquare$$

Theo *Định lý 1*, không có thuật toán thời gian đa thức nào để giải bài toán tìm vị trí lát cắt tổng tối tiểu trên đồ thị tổng quát, trừ khi *P = NP*. Khó khăn này là do số lát cắt trên đồ thị tổng quát là phi đa thức. Trong mục tiếp theo, chúng ta sẽ xem xét một lớp đồ thị đơn giản hơn là đồ thị cây. Khi đó, mỗi lát cắt sẽ tương ứng với một cạnh, và do đó bài toán có thể giải được một cách hiệu quả.

2.4. Giải thuật tuyến tính trên đồ thị cây

Trong phần này, bài toán lát cắt tổng tối tiểu trên đồ thị cây được xem xét, ký hiệu cây $T = (V, E)$. Dễ thấy rằng, với một lát cắt bất kỳ trên đồ thị cây, tập các cạnh cắt chỉ gồm duy nhất một cạnh. Do tính quan trọng của tính chất này trong việc xác định lát cắt tổng tối tiểu, ta sẽ phát biểu nó như một định lý.

Định lý 2. *Trong một lát cắt trên đồ thị cây, tập cạnh cắt gồm duy nhất một cạnh.*

Từ định lý, ta thấy có một tương ứng một một giữa tập các lát cắt và tập cạnh của đồ thị cây. Như vậy, để giải bài toán *(MSC)* trên cây *T*, ta sẽ tính hàm median ứng với mọi lát cắt, nghĩa là ứng với mỗi cạnh của đồ thị cây, từ đó chọn lát cắt có giá trị hàm median nhỏ nhất. Điều này có thể thực hiện qua giải thuật quy hoạch động. Cụ thể hơn, ta sẽ tính giá trị hàm median ứng với một cạnh *e* của cây sau đó tìm cách cập nhật hàm median cho các cạnh liền kề với *e*.

Đầu tiên, ta chọn ngẫu nhiên một lá v^* làm gốc ta được cây có hướng $\vec{T}$. Ta ký hiệu *Des(v)* là tập đỉnh con cháu của *v* (không bao gồm *v*) trên $\vec{T}$. Với mỗi đỉnh *v* thuộc $\vec{T}$, ta định nghĩa $\widetilde{w}_v = \sum_{v' \in Des(v)} w_{v'} + w_v$ là tổng trọng số của cây con gốc tại *v*. Ta đặt tổng trọng số các đỉnh trên cây là $W = \sum_{v \in V} w_v$. Chú ý rằng, ta có thể tính W và $\widetilde{w}_v$ với mọi $v \in \vec{T}$ trong thời gian tuyến tính bằng thuật toán tìm kiếm theo hướng từ lá đến gốc.

Bây giờ, giả sử ta có thể tính giá trị median cho cạnh $e = (u, v)$, với *v* là con của *u*. Chúng ta cần tính giá trị median cho cạnh $e' = (v, z)$ liền kề với *e* với *z* là con của *v*.

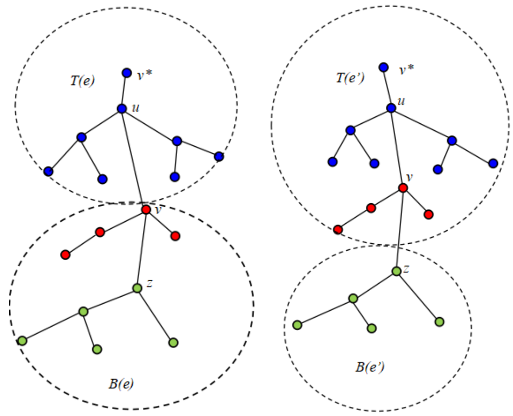
Mỗi cạnh $e^* = (r, s)$, với *s* là con của *r*, chia đồ thị thành hai phần ký hiệu là :

$T(e^*) = \{v' \in V : d(v', s) < d(v', r)\}$;

$B(e^*) = \{v' \in V : d(v', r) < d(v', s)\}$. Khi đó, ta có thể viết lại hàm mục tiêu ứng với từng cạnh *e* và e' như sau:

$$f(e) = \sum_{v' \in T(e)} w_{v'} d(v', u) + \sum_{v' \in B(e)} w_{v'} d(v', v);$$

$$f(e') = \sum_{v' \in T(e')} w_{v'} d(v', v) + \sum_{v' \in B(e')} w_{v'} d(v', z)$$



Hình 3. *T*(*e*) và *B*(*e*) ứng với cạnh *e* (bên trái) ; *T*(*e'*) và *B*(*e'*) cạnh *e'* (bên phải).

Ta thấy $T(e') \setminus T(e) = B(e) \setminus B(e')$, đặt tập này là tập *M*. Khi đó, ta có :

$$f(e) = \sum_{v' \in T(e)} w_{v'} d(v', u) + \sum_{v' \in B(e')} w_{v'} d(v', v) + \sum_{v' \in M} w_{v'} d(v', v)$$

$$= \sum_{v' \in T(e)} w_{v'} d(v', u) + \sum_{v' \in B(e')} w_{v'} \left[d(v', z) + l(z, v) \right] + \sum_{v' \in M} w_{v'} d(v', v)$$

$$f(e') = \sum_{v' \in T(e)} w_{v'} d(v', v) + \sum_{v' \in M} w_{v'} d(v', v) + \sum_{v' \in B(e')} w_{v'} d(v', z)$$

$$= \sum_{v' \in T(e)} w_{v'} \left[d(v', u) + l(u, v) \right] + \sum_{v' \in M} w_{v'} d(v', v) + \sum_{v' \in B(e')} w_{v'} d(v', z)$$

$$\Rightarrow f(e') - f(e) = \sum_{v' \in T(e)} w_{v'} l(u, v) - \sum_{v' \in B(e')} w_{v'} l(z, v)$$

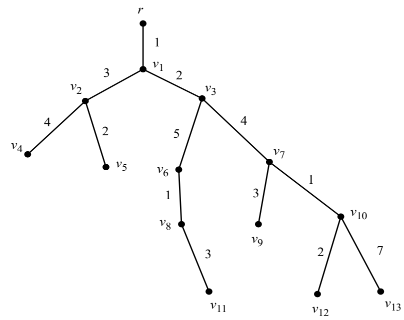
$$\Leftrightarrow f(e') = f(e) + \left(W - \widetilde{w}_v \right) l(u, v) - \widetilde{w}_v l(z, v).$$

Dễ thấy rằng giá trị mục tiêu trên với e' có thể tính theo giá trị mục tiêu trên *e* trong thời gian hằng. Bằng cách tiếp tục thực hiện quy tắc cập nhật này, ta thấy giá trị hàm mục tiêu ứng với mọi lát cắt có thể xác định trong thời gian tuyến tính. Từ đó, lát cắt tổng tối tiểu sẽ tương ứng với cạnh có giá trị mục tiêu nhỏ nhất.

Ta thu được định lý sau:

Định lý 3. *Bài toán lát cắt tổng tối tiểu trên cây có thể được giải trong thời gian tuyến tính bằng giải thuật quy hoạch động.*

Ví dụ 1. Cho cây $T=(V,E)$ với trọng số đỉnh đơn vị. Trên mỗi cạnh của cây, ta chỉ định một độ dài dương. Chúng ta sẽ đi tìm lát cắt tổng tối tiểu trên cây $\vec{T}$. Cây có hướng $\vec{T}$ được miêu tả ở Hình 4.



Hình 4. Cây có hướng với gốc tại r

Ta có $W=14$ và $f\left(\{r;v_1\}\right)=89$

Bảng 1. Trọng số của các nhánh có hướng

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}
$\widetilde{w}(v_i)$	13	3	9	1	1	3	5	2	1	3	1	1	1

Bảng 2. Giá trị hàm mục tiêu cho từng cạnh

	$\{v_1;v_2\}$	$\{v_1;v_3\}$	$\{v_2;v_4\}$	$\{v_2;v_5\}$	$\{v_3;v_6\}$	$\{v_3;v_7\}$	$\{v_6;v_8\}$	$\{v_7;v_9\}$	$\{v_7;v_{10}\}$	$\{v_8;v_{11}\}$	$\{v_{10};v_{12}\}$	$\{v_{10};v_{13}\}$
f	51	64	72	78	29	38	81	59	69	87	74	59

Vậy lát cắt tổng tối tiểu bao gồm cạnh $\{v_3;v_6\}$ với giá trị hàm mục tiêu là $f\left(\{v_3;v_6\}\right)=29$.

3. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Bài báo này đã nghiên cứu bài toán vị trí lát cắt tổng tối tiểu trên các đồ thị và đã chứng minh rằng bài toán này là *NP-khó* trên các đồ thị tổng quát. Tuy vậy, một thuật toán trong thời gian tuyến tính bằng quy hoạch động được đề xuất để giải bài toán trên lớp các đồ thị cây bằng cách khai thác tính chất rằng mỗi lát cắt trên đồ thị cây tương ứng với duy nhất một cạnh. Việc mở rộng bài toán này lên các lớp đồ thị phức tạp hơn đồ thị cây như đồ thị hai phần, khối, xương rồng, chu trình,… hứa hẹn sẽ mang lại những kết quả thú vị.

LỜI CẢM TẠ

Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, Mã số: TSV2024-95.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Brimberg, J., Juel, H., & Schöbel, A. (2009). Locating a minisum circle in the plane. *Discrete Applied Mathematics*, *157*(5), 901-912. https://doi.org/10.1016/j.dam.2008.03.017

Chen, D., Xia, B., Li, Z., & Huang, J. (2020). Application of P-median method in logistics node location. *In IOP Conference Series: Earth and Environmental Science, 526*(1). https://doi.org/10.1088/1755-1315/526/1/012175

Garey, M. R., & Johnson, D. S. (1990). *Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness*. W.H. Freeman

İbrahim Miraç, E., & Eren, Ö. (2020). P-median and maximum coverage models for optimization of distribution plans: A case of United Nations Humanitarian response depots. *Smart and Sustainable Supply Chain and Logistics–Trends, Challenges, Methods and Best Practices,* (1), 225-246. https://doi.org/10.1007/978-3-030-61947-3_15

Kariv, O., & Hakimi, S. L. (1979a). An algorithmic approach to network location problems. I: The p-centers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *37*(3), 513-538. https://doi.org/10.1137/0137040

Kariv, O., & Hakimi, S. L. (1979b). An algorithmic approach to network location problems. II: The p-medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *37*(3), 536-560. https://doi.org/10.1137/0137040

Marianov, V., & Eiselt, H. A. (2024). Fifty Years of Location Theory - A Selective Review. *European Journal of Operational Research*. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2024.01.036

Schöbel, A. (1999). *Locating lines and hyperplanes: theory and algorithms* (Vol. 25). Springer Science & Business Media.