Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.333

ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU HÓA HÀM TÍCH PHÂN MỜ VỚI RÀNG BUỘC HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CẤP MỘT

Lê Thanh Tùng[1], Trần Thiện Khải[2] và Trịnh Tùng[3*]
[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Trung tâm Đào tạo và Hợp tác Doanh nghiệp, Trường Đại học Trà Vinh*
[3]*Trường THPT Mai Thanh Thế, Ngã Năm, Sóc Trăng*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): trinhtung.c3mtt@soctrang.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)
Nhận bài (Received): 25/04/2024
Sửa bài (Revised): 23/06/2024
Duyệt đăng (Accepted): 26/07/2024

Title: *Optimality conditions for fuzzy variational problems with nonholonomic constraints*

Author(s): *Le Thanh Tung[1], Tran Thien Khai[2] and Trinh Tung[3*]*

Affiliation(s): *[1]Can Tho University, [2]Tra Vinh University, [3]Mai Thanh The High School*

TÓM TẮT

Bài báo này nhằm mục đích nghiên cứu các bài toán tối ưu hóa hàm tích phân mờ của nhiều biến số phụ thuộc với các ràng buộc hệ phương trình vi phân cấp một. Trước hết, các điều kiện cần tối ưu cho các bài toán tối ưu hóa hàm tích phân mờ với các ràng buộc hệ phương trình vi phân được thiết lập. Sau đó, các điều kiện đủ tối ưu được khảo sát sử dụng một số giả thiết lồi.

Từ khoá: *Bài toán tối ưu hóa hàm tích phân mờ, ràng buộc hệ phương trình vi phân cấp một, điều kiện tối ưu, giả thiết lồi*

ABSTRACT

This paper is intended to investigate fuzzy variational problems of several dependent variables with nonholonomic constraints. Firstly, the necessary optimality conditions for fuzzy variational problems with nonholonomic constraints are established. Then, sufficient optimality conditions are obtained under some convexity assumptions.

Keywords: *Fuzzy variational problems, nonholonomic constraints, optimality conditions, convexity*

1. MỞ ĐẦU

Bài toán tối ưu hóa hàm tích phân hay tối ưu hóa biến phân là một bài toán quan trọng trong các bài toán tối ưu hóa. Nhiều bài toán trong toán học, vật lý, cơ học có thể mô tả dưới dạng bài toán tối ưu hóa biến phân như bài toán xác định độ võng dây xích (catenery), bài toán xác định đường trượt có thời gian ngắn nhất (brachistochrone), bài toán xác định đường trắc địa (geodesic) trên đa tạp. Các kiến thức cơ bản của bài toán tối ưu hóa biến phân có thể tham khảo trong các sách (Hestenes, 1966; Giaquinta và Hildebrandt, 1996; Torres & Malinowska, 2012; Clarke, 2013). Trong các bài toán tối ưu hóa, có nhiều yếu tố dẫn đến sự thiếu chính xác trong dữ liệu (Bellman & Zadeh, 1970) chẳng hạn như các yếu tố ảnh hưởng của môi trường bên ngoài gồm có nhiệt độ, áp suất, thời tiết, các yếu tố sai số do đo đạc, các yếu tố thiếu chính xác trong quá trình lấy ý kiến khảo sát. Để xác định nghiệm tối ưu chính xác hơn, các bài toán tối ưu hóa được mở rộng thành các bài toán tối ưu hóa với hàm giá trị khoảng (Ahmad et al., 2019; Tung và Tam, 2022; Rayanki et al., 2023), hay các bài toán tối ưu hóa với hàm giá trị mờ (Wu, 2009; Tung và Tam, 2022). Bài toán tối ưu hóa biến phân được mở rộng thành bài toán tối ưu hóa biến phân mờ được khảo sát các điều kiện cần tối ưu trong (Farhadinia, 2011) sử dụng đạo hàm dạng tập mức. Theo Soolaki et al. (2016), một số điều kiện cần tối ưu cho bài toán tối ưu hóa biến phân mờ sử dụng đạo hàm Hukuhara được trình bày. Trong thời gian gần đây, một cách biểu diễn mới cho số mờ sử dụng hàm thuộc dạng không gian được đề xuất (Piegat và Landowski, 2015; Piegat và Plucinski, 2021). Các biểu diễn này có một số lợi thế hơn so với các dạng đạo hàm theo tập mức hay đạo hàm Hukuhara trong một số trường hợp, do không phải chia bài toán thành nhiều bài toán theo các trường hợp biểu diễn của số mờ. Nhiều kết quả gần đây đã sử dụng cách biểu diễn này và thu được nhiều kết quả mới trong phương trình vi phân mờ (Son et al., 2019), bài toán tối ưu điều khiển phân số mờ (Dong et al., 2020). Điều kiện cần tối ưu cho bài toán tối ưu biến phân mờ một biến sử dụng hàm thuộc dạng không gian đã được khảo sát trong nghiên cứu của Mustafa et al. (2021). Sử dụng hàm thuộc dạng không gian, bài báo của Tung và Tam (2023) khảo sát cả điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu cho bài toán tối ưu biến phân mờ nhiều biến với các ràng buộc gồm ràng buộc đẳng chu (isoperimetric), ràng buộc vị trí (holonomic). Tuy nhiên, bài toán tối ưu biến phân mờ nhiều biến với ràng buộc hệ phương trình vi phân chưa được khảo sát trong các kết quả trước đây. Dựa trên những phân tích trên, điều kiện cần và điều kiện đủ tối ưu cho bài toán tối ưu biến phân mờ nhiều biến với ràng buộc hệ phương trình vi phân được khảo sát trong bài báo này. Một ví dụ chi tiết cũng được trình bày để minh họa cho kết quả của bài báo.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, ký hiệu K_C là lớp của tất cả các khoảng đóng và bị chặn trong $\mathbb{R}$. Tập tất cả các số mờ trên $\mathbb{R}$ được kí hiệu là $F(\mathbb{R})$. Một số mờ $\tilde{u}$ được gọi là số chuẩn tắc trong trường hợp các hàm số $\eta_1(\mu) = u_\mu^L$ và $\eta_2(\mu) = u_\mu^R$ là liên tục trên đoạn $[0,1]$, với $[u_\mu^L, u_\mu^R] = [\tilde{u}]^\mu$. Tập tất cả các số mờ chuẩn tắc trên $\mathbb{R}$ kí hiệu $F_C(\mathbb{R})$.

Định nghĩa 2.1. (Piegat và Landowski, 2015; Piegat và Plucinski, 2021) Cho $\tilde{u}: [a,b] \to [0,1]$ ở trong $F_C(\mathbb{R})$. Khi đó, hàm thuộc dạng không gian của $\tilde{u}$ được định nghĩa như sau

$$u^{gr}: [0,1] \times [0,1] \to [a,b]$$
$$(\mu, \alpha_u) \mapsto t := u^{gr}(\mu, \alpha_u) = u_\mu^L + (u_\mu^R - u_\mu^L)\alpha_u,$$

trong đó, "gr" kí hiệu cho thông tin cốt lõi (granule) được chứa trong $t \in [a,b], \mu \in [0,1]$ và $\alpha_u \in [0,1]$. Hàm thuộc dạng không gian của $\tilde{u} \in F_C(\mathbb{R})$ cũng được kí hiệu là $\mathcal{H}(\tilde{u}) := u^{gr}(\mu, \alpha_u)$.

Mệnh đề 2.1. (Piegat và Landowski, 2015; Son et al., 2019; Piegat và Plucinski, 2021) Hàm ngược $\mathcal{H}^{-1}(u^{gr}(\mu, \alpha_u))$ của $u^{gr}(\mu, \alpha_u)$ là số mờ $\tilde{u}$ với tập mức-μ là

$$[\mathcal{H}^{-1}(u^{gr}(\mu, \alpha_u))]^\mu = [\tilde{u}]^\mu =$$
$$\left[\inf_{\beta \geq \mu} \min_{\alpha_u} u^{gr}(\beta, \alpha_u), \sup_{\beta \geq \mu} \max_{\alpha_u} u^{gr}(\beta, \alpha_u)\right].$$

Định nghĩa 2.2. Cho $\tilde{u}, \tilde{v}: [a,b] \to [0,1]$ trong $F_C(\mathbb{R})$.

(i) $\tilde{u} = \tilde{v}$ nếu $\mathcal{H}(\tilde{u}) = \mathcal{H}(\tilde{v})\big(u^{gr}(\mu, \alpha_u) = v^{gr}(\mu, \alpha_v)\big)$ với mọi $\alpha_u = \alpha_v \in [0,1]$ và $\mu \in [0,1]$.

(ii) $\tilde{u} \geq \tilde{v}$ nếu $\mathcal{H}(\tilde{u}) \geq \mathcal{H}(\tilde{v})\big(u^{gr}(\mu, \alpha_u) \geq v^{gr}(\mu, \alpha_v)\big)$ với mọi $\alpha_u = \alpha_v \in [0,1]$ và $\mu \in [0,1]$.

(iii) $\tilde{u} > \tilde{v}$ nếu $\mathcal{H}(\tilde{u}) > \mathcal{H}(\tilde{v})\big(u^{gr}(\mu, \alpha_u) > v^{gr}(\mu, \alpha_v)\big)$ với mọi $\alpha_u = \alpha_v \in [0,1]$ và $\mu \in [0,1]$.

Định nghĩa 2.3. Cho $\phi: [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm giá trị thực

(i) $C([a,b])$ là không gian của tất cả các hàm liên tục trên $[a,b]$, nghĩa là

$C([a,b]) = \{\phi |\ \phi$ là liên tục trên $[a,b]\}$,

(ii) $C^1([a,b])$ là không gian của tất cả các hàm khả vi liên tục trên $[a,b]$, nghĩa là

$C^1([a,b]) = \{\phi | \exists \phi': [a,b] \to \mathbb{R}$ và ϕ' liên tục trên $[a,b]\}$.

(iii) $C^2([a,b])$ là không gian của tất cả các hàm khả vi liên tục cấp hai trên $[a,b]$, nghĩa là

$C^2([a,b]) = \{\phi | \exists \phi'': [a,b] \to \mathbb{R}$ và ϕ'' liên tục trên $[a,b]\}$.

Định nghĩa 2.4. Cho $\tilde{\phi}: [a,b] \to F_C(\mathbb{R})$ là hàm mờ bao gồm n số mờ phân biệt $\widetilde{u_1}, \widetilde{u_2}, \ldots, \widetilde{u_n}$. Hàm thuộc dạng không gian của $\tilde{\phi}(t)$ tại điểm $t \in [a,b]$ được kí hiệu $\mathcal{H}(\tilde{\phi}(t)) := \phi^{gr}(t, \mu, \alpha_u)$ trong đó:

$$\phi^{gr} := [a,b] \times [0,1] \times \ldots \times [0,1]^n \to [c,d] \subset \mathbb{R}$$

và $\alpha_\phi = (\alpha_{u_1}, \ldots, \alpha_{u_n})$.

Định nghĩa 2.5. Cho $\tilde{\phi}: [a,b] \to \mathrm{F}_C(\mathbb{R})$ là một hàm mờ.

(i) (Mazandarani et al., 2017) Hàm mờ $\tilde{\phi}$ được gọi là khả vi granular (gr-khả vi) tại $t_0 \in (a,b)$ nếu tồn tại số mờ $\frac{d_{gr}\phi(t_0)}{dt} \in \mathrm{F}_C(\mathbb{R})$ sao cho giới hạn sau tồn tại:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\tilde{\phi}(\mathrm{t}_0 + h) \ominus_{gr} \tilde{\phi}(\mathrm{t}_0)}{\mathrm{h}} = \frac{d_{gr}\phi(t_0)}{dt}$$

trong đó giới hạn được lấy trong không gian mêtric $(\mathrm{F_C}(\mathbb{R}), \mathrm{D_{gr}})$ và $\tilde{\phi}(\mathrm{t}_0 + h) \ominus_{gr} \tilde{\phi}(t_0)$ là một số mờ có hàm thuộc dạng không gian

$$\mathcal{H}\left(\tilde{\phi}(\mathrm{t}_0 + h) \ominus_{gr} \tilde{\phi}(t_0)\right) = \mathcal{H}\left(\tilde{\phi}(\mathrm{t}_0 + h)\right) - \mathcal{H}\left(\tilde{\phi}(t_0)\right).$$

Khi đó, giá trị $\frac{d_{gr}\phi(t_0)}{dt}$ được gọi là đạo hàm granular (hay gr-đạo hàm) của hàm có giá trị mờ $\tilde{\phi}$ tại t_0. Chúng ta nói rằng $\tilde{\phi}$ là gr-khả vi trên $[a, b]$ nếu đạo hàm $\frac{d_{gr}\tilde{\phi}(t)}{dt}$ tồn tại với mọi điểm $t \in [a, b]$. Khi đó, hàm có giá trị mờ $\tilde{\tilde{\phi}} \coloneqq \frac{d_{gr}\tilde{\phi}}{dt} : [a, b] \to \mathrm{F_C}(\mathbb{R})$ được gọi là gr-đạo hàm của $\tilde{\phi}$ trên $[a, b]$.

(ii) (Mazandarani et al., 2017; Son et al., 2019) Giả sử $\tilde{\phi}$ gr-khả vi trên (a, b). Hàm số $\tilde{\phi}$ được gọi là khả vi granular cấp hai tại $\mathrm{t}_0 \in [a, b]$, nếu tồn tại một số mờ $\frac{d^2_{gr}\tilde{\phi}(t_0)}{dt^2} \in \mathrm{F_C}(\mathbb{R})$, sao cho giới hạn sau tồn tại:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{d_{gr}\tilde{\phi}(t_0 + h)}{dt} \ominus_{gr} \frac{d_{gr}\tilde{\phi}(t_0)}{dt}}{h} = \frac{d^2_{gr}\tilde{\phi}(t_0)}{dt^2}$$

trong đó, giới hạn được lấy trong không gian mêtric $(\mathbf{F_c}(\mathbb{R}), \mathbf{d_{gr}})$. hàm có giá trị mờ $\tilde{\tilde{\tilde{\boldsymbol{\phi}}}} \coloneqq \frac{d^2_{gr}\tilde{\boldsymbol{\phi}}}{dt^2} : [\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] \to \boldsymbol{F_C}(\mathbb{R})$ khi đó được gọi là gr-đạo hàm cấp hai của $\tilde{\boldsymbol{\phi}}$ trên $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Mệnh đề 2.2. (Mazandarani et al., 2017; Son et al., 2019) *Cho $\tilde{\phi} : [a, b] \to F_C(\mathbb{R})$ là một hàm mờ.*

(i) *Hàm mờ $\tilde{\phi} : [a, b] \to F_C(\mathbb{R})$ khả vi granular tại $t_0 \in [a, b]$ nếu và chỉ nếu hàm thuộc dạng không gian của nó $\mathcal{H}\left(\tilde{\phi}(t)\right) = \phi^{gr}\left(t, \mu, \alpha_\phi\right)$ khả vi ứng với t tại điểm đó. Hơn nữa, $\mathcal{H}\left(\frac{d_{gr}\tilde{\phi}(t)}{dt}\right) = \frac{\partial \mathcal{H}\tilde{\phi}(t)}{\partial t}$.*

(ii) *Hàm mờ $\tilde{\phi} : [a, b] \to F_C(\mathbb{R})$ khả vi granular cấp hai tại $t_0 \in [a, b]$ nếu và chỉ nếu hàm thuộc dạng không gian của nó $\mathcal{H}\left(\tilde{\phi}(t)\right) = \phi^{gr}\left(t, \mu, \alpha_\phi\right)$ khả vi cấp hai ứng với t tại điểm đó. Hơn nữa, $\mathcal{H}\left(\frac{d^2_{gr}\tilde{\phi}(t)}{dt}\right) = \frac{\partial^2 \mathcal{H}\tilde{\phi}(t)}{\partial t^2}$.*

Định nghĩa 2.6. Cho $\tilde{\phi} : [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathrm{F_C}(\mathbb{R})$ là hàm có giá trị mờ.

(i) $\mathrm{C}([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ là không gian của tất cả các hàm mờ liên tục trên $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, nghĩa là,

$$\mathrm{C}([\mathrm{a}, \mathrm{b}]) = \{\tilde{\phi} \mid \tilde{\phi} \text{ liên tục trên } [a, b]\}$$

(ii) $\mathrm{C}^1([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ là không gian của tất cả các hàm mờ gr-khả vi liên tục trên $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, nghĩa là,

$$\mathrm{C}^1([\mathrm{a}, \mathrm{b}]) = \{\tilde{\phi} \mid \exists \tilde{\tilde{\phi}} : [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathrm{F_C}(\mathbb{R}) \text{ và } \tilde{\tilde{\phi}} \text{ liên tục trên } [a, b]\}$$

(iii) $\mathrm{C}^2([\mathrm{a}, \mathrm{b}])$ là không gian của tất cả các hàm mờ gr-khả vi liên tục cấp hai trên $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, nghĩa là,

$$\mathrm{C}^2([\mathrm{a}, \mathrm{b}]) = \{\tilde{\phi} \mid \exists \tilde{\tilde{\tilde{\phi}}} : [\mathrm{a}, \mathrm{b}] \to \mathrm{F_C}(\mathbb{R}) \text{ và } \tilde{\tilde{\tilde{\phi}}} \text{ liên tục trên } [a, b]\}$$

Nhận xét 2.1. Hàm mờ $\tilde{\phi} : [a, b] \to \mathrm{F}_C(\mathbb{R})$ khả vi liên tục (cấp hai) trên $[a, b]$ nếu và chỉ nếu hàm thuộc dạng không gian $\mathcal{H}\left(\tilde{\phi}(t)\right) = \phi^{gr}\left(t, \mu, \alpha_\phi\right)$ khả vi liên tục (cấp hai) trên $[a, b]$.

Định nghĩa 2.7. (Mazandarani et al., 2017; Son et al., 2019) Cho $\tilde{\phi} : [a, b] \to \mathrm{F}_C(\mathbb{R})$ là một hàm mờ có hàm thuộc dạng không gian $\mathcal{H}\left(\tilde{\phi}(t)\right) = \phi^{gr}\left(t, \mu, \alpha_\phi\right)$ khả tích trên $[a, b]$. Ký hiệu $\tilde{\int}_a^b \tilde{\phi}(t)dt$ biểu thị tích phân của $\tilde{\phi}$ trên $[a, b]$. Khi đó, hàm mờ $\tilde{\phi}$ được gọi là khả tích granular (gr-khả tích) trên $[a, b]$ tồn tại một số mờ $\tilde{m} = \tilde{\int}_a^b \tilde{\phi}(t)dt$ sao cho

$$\mathcal{H}\left(\tilde{\int}_a^b \tilde{\phi}(t)dt\right) = \mathcal{H}(\tilde{m}) = \int_a^b \mathcal{H}\left(\tilde{\phi}(t)\right) dt = \int_a^b \phi^{gr}\left(t, \mu, \alpha_\phi\right) dt.$$

Bổ đề 2.1. (Hestenes, 1966; Giaquinta và Hildebrandt, 1996; Torres & Malinowska, 2012)

Giả sử rằng $\phi(t)$ là hàm có giá trị thực liên tục trên $[a, b]$. Nếu xảy ra

$$\int_a^b \phi(t)\eta(t)\, dt = 0$$

với mọi $\eta(t) \in C^2[a, b]$ sao cho $\eta(a) = \eta(b) = 0$, thì $\phi(t) = 0$ với mọi $t \in [a, b]$.

Bổ đề 2.2. (Hestenes, 1966; Hestenes, 1975; Giaquinta & Hildebrandt, 1996)

Cho hệ m hàm ($n + m$ biến số) $F_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}(i = 1, \dots, m)$ thỏa

(i) $\mathrm{F_i}(\mathrm{x_1}, , \dots, \mathrm{x_n}, \mathrm{y_1}, \dots, \mathrm{y_m})(\mathrm{i} = 1, \dots, \mathrm{m})$ là các hàm liên tục cùng với các đạo hàm riêng trong lân cận Δ của điểm $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = (0,0)$;

(ii) *$F_i(0,0) = 0$ $(i = 1, \dots, m)$ và định thức Jacobi*

$$\begin{vmatrix} (F_1)'_{y_1}(0,0) & \dots & (F_1)'_{y_m}(0,0) \\ \dots & \dots & \dots \\ (F_m)'_{y_1}(0,0) & \dots & (F_m)'_{y_m}(0,0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Khi đó, tồn tại lân cận $S_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^n | \|x\| < \delta\}$ *của* 0 *và lân cận* $S_\epsilon(0) = \{y \in \mathbb{R}^m | \|y\| < \epsilon\}$ *của* 0 *sao cho*

(a) Với mọi $x \in S_\delta(0)$ *tồn tại duy nhất* $y \in S_\epsilon(0)$, *kí hiệu* $y_i = f_i(x) = f_i(x_1, , \dots, x_n)(i = 1, \dots, m)$ *sao cho*

$$\begin{cases} F_1\begin{pmatrix} x_1, , \dots, x_n, f_1(x_1, , \dots, x_n), \dots, \\ f_m(x_1, , \dots, x_n) \end{pmatrix} = 0 \\ \dots \\ F_m\begin{pmatrix} x_1, , \dots, x_n, f_1(x_1, , \dots, x_n), \dots, \\ f_m(x_1, , \dots, x_n) \end{pmatrix} = 0. \end{cases}$$

(b) Hơn nữa, các hàm $y_i = f_i(x_1, , \dots, x_n)(j = 1, \dots, m)$ *cũng có các đạo hàm riêng liên tục* $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}(j = 1, \dots, n)$ *xác định bởi*

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_m} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} (F_1)'_{y_1}(0,0) & \dots & (F_1)'_{y_m}(0,0) \\ \dots & \dots & \dots \\ (F_m)'_{y_1}(0,0) & \dots & (F_m)'_{y_m}(0,0) \end{bmatrix}^{-1}. \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_m} \end{bmatrix}.$$

3. ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

Trong bài báo này, xét bài toán tối ưu hóa biến phân mờ của nhiều biến số phụ thuộc với các ràng buộc hệ phương trình vi phân cấp một có dạng như sau:

$$(NVP): \ \widetilde{\min} \tilde{J}(\tilde{x}) = \tilde{J}(\widetilde{x_1}, \dots, \widetilde{x_n}) = \widetilde{\int}_a^b \tilde{f}(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \widetilde{\dot{x}_1}(t), \dots, \widetilde{\dot{x}_n}(t), t)dt$$

với

$$\tilde{g}_1(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \widetilde{\dot{x}_1}(t), \dots, \widetilde{\dot{x}_n}(t), t) = \tilde{0},$$

$$\tilde{g}_m(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \widetilde{\dot{x}_1}(t), \dots, \widetilde{\dot{x}_n}(t), t) = \tilde{0} \ (m < n),$$

$$\tilde{x}_1(a) = \tilde{x}_{1,a}, \dots, \tilde{x}_n(a) = \tilde{x}_{n,a}, \tilde{x}_1(b) = \tilde{x}_{1,b}, \dots, \tilde{x}_n(b) = \tilde{x}_{n,b},$$

trong đó, $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n \in C^2([a,b])$, hàm $\tilde{f}, \tilde{g}_j: F_C(\mathbb{R})^{2n} \times \mathbb{R} \to F_C(\mathbb{R})(j = 1, \dots, m)$ là các hàm thuộc lớp C^2 và $\tilde{J}: (C^2([a,b]))^n \to F_C(\mathbb{R})$. Để thuận tiện, ta kí hiệu

$$\tilde{f}[\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}](t) = \tilde{f}(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \widetilde{\dot{x}_1}(t), \dots, \widetilde{\dot{x}_n}(t), t),$$

$$\tilde{g}_j[\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}](t) = \tilde{g}_j(\tilde{x}_1(t), \dots, \tilde{x}_n(t), \widetilde{\dot{x}_1}(t), \dots, \widetilde{\dot{x}_n}(t), t), j = 1, \dots, m,$$

$$\tilde{x}(t) = (\widetilde{x_1}(t), \dots, \widetilde{x_n}(t)), \tilde{x}_a = (\tilde{x}_{1,a}, \dots, \tilde{x}_{n,a}), \tilde{x}_b = (\tilde{x}_{1,b}, \dots, \tilde{x}_{n,b}).$$

Tập các điểm chấp nhận được của (NVP) là

$$\tilde{\Omega} = \{\tilde{x} \in (C^2([a,b]))^n \,|\, \tilde{g}_j[\tilde{x}, \dot{\tilde{x}}](t) = \tilde{0}, j = 1, \dots, m, \tilde{x}(a) = \tilde{x}_a, \tilde{x}(b) = \tilde{x}_b\}.$$

Hàm $\tilde{x}^* \in (C^2([a,b]))^n$ là nghiệm tối ưu địa phương của (NVP) nếu tồn tại lân cận U của $\tilde{x}^*$ sao cho

$$\tilde{J}(\tilde{x}^*) \leq \tilde{J}(\tilde{x}), \forall \tilde{x} \in U \cap \tilde{\Omega}.$$

Nếu $U = (C^2([a,b]))^n$, thì $\tilde{x}$ là nghiệm tối ưu toàn cục của $(GNVP)$.

Bài toán tối ưu hóa biến phân dạng granular tương ứng với (NVP), kí hiệu (GNVP), có dạng như sau:

$$(GNVP): \min J^{gr}(x^{gr}) = \int_a^b f^{gr}(x_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_1}), \dots, x_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_n}), \dot{x}_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_1}), \dots, \dot{x}_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_n}), t)dt$$

với

$$g_1^{gr}(x_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_1}), \dots, x_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_n}), \dot{x}_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_1}), \dots, \dot{x}_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_n}), t) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$g_m^{gr}(x_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_1}), \dots, x_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_n}), \dot{x}_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_1}), \dots, \dot{x}_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_n}), t) = 0 \ \ (m < n),$$

$$x_i^{gr}(a,\mu,\alpha_{x_i}) = x_{i,a}^{gr}(\mu, \alpha_{x_{i,a}}),$$

$$x_i^{gr}(b,\mu,\alpha_{x_i}) = x_{i,b}^{gr}(\mu, \alpha_{x_{i,b}}),$$

$$\forall \alpha_{x_i} = \alpha_{x_{i,a}} = \alpha_{x_{i,b}}(i = 1, \dots, n).$$

Để thuận tiện, ta kí hiệu

$$f^{gr}[x^{gr},\dot{x}^{gr}](t,\mu,\alpha_f)$$
$$= f^{gr}(x_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_1}),\dots,x_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_n}),\dot{x}_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_1})$$
$$,\dots,\dot{x}_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_n}),t)$$
$$g_j^{gr}[x^{gr},\dot{x}^{gr}]\left(t,\mu,\alpha_{g_j}\right)$$
$$= g_j^{gr}(x_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_1}),\dots,x_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_n}),\dot{x}_1^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_1})$$
$$,\dots,\dot{x}_n^{gr}(t,\mu,\alpha_{\dot{x}_n}),t),$$
$$j=1,\dots,m,$$
$$x^{gr}=\left(x_1^{gr},\dots,x_{\mathrm{n}}^{gr}\right)\in\mathbb{R}^n \text{ với}$$
$$x_{\mathrm{i}}^{gr}=x_i^{gr}(t,\mu,\alpha_{x_i})\ (i=1,\dots,n),$$
$$x_a^{gr}=\left(x_{1,a}^{gr},\dots,x_{n,a}^{gr}\right), x_b^{gr}=\left(x_{1,b}^{gr},\dots,x_{n,b}^{gr}\right)$$
$$\begin{aligned}\mathcal{H}(\tilde{x}(t)) &= \left(\mathcal{H}(\widetilde{x_1}(t)),\dots,\mathcal{H}(\widetilde{x_{\mathrm{n}}}(t))\right)\\ &= x^{gr}, \mathcal{H}^{-1}(x^{gr})\\ &= \left(\mathcal{H}^{-1}(x_1^{gr}),\dots,\mathcal{H}^{-1}(x_{\mathrm{n}}^{gr})\right)\\ &= \tilde{x}(t).\end{aligned}$$

Với các hàm $\varphi:\mathbb{R}^{2n+3}\to\mathbb{R}$ dạng $\varphi(x_1,\dots,x_n,\dot{x}_1,\dots,\dot{x}_n,t,\mu,\alpha_\varphi)$ (như các hàm f, g_j) ký hiệu $\partial_i\varphi=\varphi'_{x_i}(i=1,\dots,n)$ và $\partial_i\varphi=\varphi'_{\dot{x}_i}(i=n+1,\dots,2n)$.

Tập các điểm chấp nhận được của $(GNVP)$ là

$$\Omega^{\mathrm{gr}}=\{x^{gr}\in(C^2([a,b])^n\,|g_j^{gr}[x^{gr},\dot{x}^{gr}]\left(t,\mu,\alpha_{g_j}\right)=0, j=1,\dots,m, x^{gr}(a)=x_a^{gr}, x^{gr}(b)=x_b^{gr}\}.$$

Hàm $x^{*gr}\in(C^2([a,b])^n$ là nghiệm tối ưu địa phương của (GNVP) nếu tồn tại lân cận U^{gr} của x^{*gr} sao cho

$$J(x^{*gr})\le J(x^{gr}),\forall x^{gr}\in U^{gr}\cap\Omega^{\mathrm{gr}}.$$

Nếu $U^{gr}=\left(C^2([a,b])\right)^n$, thì $x^{*gr}(t)$ là nghiệm tối ưu toàn cục của $(GNVP)$.

Mệnh đề sau được chứng minh tương tự như các dạng khác của bài toán biến phân mờ trong (Tung và Tam, 2023).

Mệnh đề 3.1 *Giả sử $\mathcal{H}:\tilde{\Omega}\subset F_C(\mathbb{R})^n\to\Omega^{gr}\subset\mathbb{R}^n$ được xác định bởi $\mathcal{H}(\tilde{x}(t))=x^{gr}$ là song ánh thì*

(i) $\mathcal{H}(\tilde{\Omega})=\Omega^{\mathrm{gr}}$ *và* $\mathcal{H}^{-1}(\Omega^{\mathrm{gr}})=\tilde{\Omega}$;

(ii) Nếu $\widetilde{x^*}$ là nghiệm tối ưu của bài toán (NVP) thì $\mathcal{H}(\widetilde{x^*})=x^{*gr}$ cũng là nghiệm cực tiểu của bài toán (GNVP);

(iii) Nếu x^{*gr} là nghiệm tối ưu của bài toán (GNVP) thì $\widetilde{x^*}=\mathcal{H}^{-1}(x^{*gr})$ cũng là nghiệm tối ưu của bài toán (NVP).

Mệnh đề 3.2. *Cho $x^{*gr}=\left(x_1^{*gr},\dots,x_n^{*gr}\right)\in(C^2[a,b])^n$ là nghiệm tối ưu của (GNVP). Nếu*

$$\frac{\partial\left(g_1^{gr},\dots,g_m^{gr}\right)}{\partial\left(\dot{x}_1^{*gr},\dots,\dot{x}_n^{*gr}\right)}=\begin{bmatrix}\partial_{n+1}g_1^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n}g_1^{gr}(x^{*gr})\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial_{n+1}g_m^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n}g_m^{gr}(x^{*gr})\end{bmatrix}$$

có hạng bằng m, nghĩa là có một định thức con cấp m khác không, chẳng hạn

$$D=det\begin{bmatrix}\partial_{2n-m+1}g_1^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n}g_1^{gr}(x^{*gr})\\ \dots & \dots & \dots\\ \partial_{2n-m+1}g_m^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n}g_m^{gr}(x^{*gr})\end{bmatrix}\neq 0$$

thì tồn tại các hàm liên tục $\lambda_j^{gr}=\lambda_j^{gr}(t,\mu,\alpha_{\lambda_j})\ (j=1,\dots,m)$ sao cho $x^{*gr}=\left(x_1^{*gr},\dots,x_1^{*gr}\right)$ thỏa các phương trình Euler-Lagrange sau

$$\partial_iL^{gr}[\,x^{*gr},\,\dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_{L^{gr}})-\frac{d}{dt}\partial_{i+n}L^{gr}[\,x^{*gr},\,\dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_{L^{gr}})=0,(i=1,\dots,n)$$

trong đó $L:\mathbb{R}^{2n+3}\to\mathbb{R}$ xác định bởi

$$\begin{aligned}L^{gr}[\,x^{*gr},\,\dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_{L^{gr}}) &= f^{gr}[x^{gr},\dot{x}^{gr}](t,\mu,\alpha_f)\\ &+\lambda_1^{gr}g_1^{gr}[x^{gr},\dot{x}^{gr}](t,\mu,\alpha_{g_1})\\ &+\cdots\\ &+\lambda_m^{gr}g_m^{gr}[x^{gr},\dot{x}^{gr}](t,\mu,\alpha_{g_1}).\end{aligned}$$

Chứng minh. Xét một biến phân của $x^{*gr}=\left(x_1^{*gr},\dots,x_n^{*gr}\right)$ dạng $x^{*gr}+\epsilon h\in\Omega^{gr}$ hay

$$\left(x_1^{*gr},\dots,x_n^{*gr},\dot{x}_1^{*gr},\dots,\dot{x}_n^{*gr}\right)+\epsilon(h_1,\dots,h_n,\dot{h}_1,\dots,\dot{h}_n)$$

với $|\epsilon|<\theta,\theta>0$ nhỏ và hàm tùy ý $h=(h_1,\dots,h_n)\in C^2([a,b])^n$ thỏa $h_i(a)=h_i(b)=0(i=1,\dots,n)$.

(i) Do x^{*gr} là nghiệm tối ưu của (GNVP), nên $x^{*gr}\in\Omega^{\mathrm{gr}}$, do đó

$$g_j[x^{gr},\dot{x}^{gr}](t,\mu,\alpha_j)=0(j=1,\dots,m).$$

Sử dụng kí hiệu $h = (h_1, \dots, h_n)$ với $h_i = h_i(t), \dot{h} = (\dot{h}_1, \dots, \dot{h}_n)$ với $\dot{h}_i = h_i(t)$ và hàm $G_j(.,.): \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} (j = 1, \dots, m)$ với

$$G(h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_m, \dot{h}_{m+1}, \dots, \dot{h}_n) = G\begin{pmatrix} h_1(t), \dots, h_n(t), \dot{h}_1(t), \dots, \\ \dot{h}_m(t), \dot{h}_{m+1}(t), \dots, \dot{h}_n(t) \end{pmatrix}$$

Xét hệ gồm m hàm với $2n = m + (2n - m)$ biến số $h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_n$ với các hàm $G_j(.,.): \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R} (j = 1, \dots, m)$ xác định bởi

$$G_1(h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_{n-m}, \dot{h}_{n-m+1}, \dots, \dot{h}_n) = g_1^{gr}\Big(x_1^{*gr} + \epsilon h_1, \dots, \bar{x}_n + \epsilon h_n, \dot{x}_1^{*gr} + \epsilon \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_{n-m}^{*gr} + \epsilon \dot{h}_{n-m}, \dot{x}_{n-m+1}^{*gr} + \epsilon \dot{h}_{n-m+1}, \dots, \dot{x}_n^{*gr} + \epsilon \dot{h}_n, t, \mu, \alpha_{g_j}\Big)$$

....

$$G_m(h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_{n-m}, \dot{h}_{n-m+1}, \dots, \dot{h}_n) = g_m^{gr}\Big(x_1^{*gr} + \epsilon h_1, \dots, \bar{x}_n + \epsilon h_n, \dot{x}_1^{*gr} + \epsilon \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_{n-m}^{*gr} + \epsilon \dot{h}_{n-m}, \dot{x}_{n-m+1}^{*gr} + \epsilon \dot{h}_{n-m+1}, \dots, \dot{x}_n^{*gr} + \epsilon \dot{h}_n, t, \mu, \alpha_{g_j}\Big).$$

Các hàm G_j liên tục cùng các đạo hàm riêng trong lân cận Δ của $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$,

$G_j(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = g_j^{gr}[x^{*gr}, \dot{x}^{*gr}]\left(t, \mu, \alpha_{g_j}\right) = 0 (j = 1, \dots, m)$ và

$$JG = \frac{\partial(G_1, \dots, G_m)}{\partial(x_1, \dots, x_n, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)}(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = \begin{bmatrix} \partial_1 G_1(0,0) & \dots & \partial_{2n} G_1(0,0) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 G_m(0,0) & \dots & \partial_{2n} G_1(0,0) \end{bmatrix} =$$

$$\varepsilon \begin{bmatrix} \partial_1 g_1^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_n g_1^{gr}(x^{*gr}) & \partial_{n+1} g_1^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n} g_1^{gr}(x^{*gr}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \partial_1 g_m^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_n g_m^{gr}(x^{*gr}) & \partial_{n+1} g_m^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n} g_m^{gr}(x^{*gr}) \end{bmatrix} (\varepsilon \neq 0)$$

có một định thức con cấp m khác không

$$D = \varepsilon . det \begin{bmatrix} \partial_{2n-m+1} g_1^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n} g_1^{gr}(x^{*gr}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{2n-m+1} g_m^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n} g_m^{gr}(x^{*gr}) \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon . det \begin{bmatrix} \partial_{2n-m+1} g_1^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n} g_1^{gr}(x^{*gr}) \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial_{2n-m+1} g_m^{gr}(x^{*gr}) & \dots & \partial_{2n} g_m^{gr}(x^{*gr}) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Áp dụng Định lý hàm ẩn trong Bổ đề 2.2, ta suy ra sự tồn tại lân cận U của $(0, \dots, 0, 0, \dots, 0)$ và các hàm $\dot{h}_{n-m+1}, \dots, \dot{h}_n: U \to \mathbb{R}$ với $\dot{h}_{n-m+1} = \dot{h}_{n-m+1}(h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_{n-m})$,

$\dots, \dot{h}_n = \dot{h}_n(h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_{n-m})$ thỏa $\dot{h}_j(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = 0$ $(j = n - m + 1, \dots, n)$ sao cho , $\forall j = 1, \dots, m$,

$$G_j(h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_{n-m}, \dot{h}_{n-m+1}(h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_{n-m}), \dots, \dot{h}_n(h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_{n-m}) = 0,$$
$$\forall (h_1, \dots, h_n, \dot{h}_1, \dots, \dot{h}_{n-m}) \in U.$$

Điều này dẫn đến sự tồn tại $\theta > 0$ đủ nhỏ sao cho

$$H_j(\epsilon) = g_j^{gr}\Big(x_1^{*gr} + \epsilon h_1, \dots, \bar{x}_n + \epsilon h_n, \dot{x}_1^{*gr} + \epsilon \dot{h}_1, \dots, \dot{x}_{n-m}^{*gr} + \epsilon \dot{h}_{n-m}, \dot{x}_{n-m+1}^{*gr} + \epsilon \dot{h}_{n-m+1}, \dots, \dot{x}_n^{*gr} + \epsilon \dot{h}_n, t, \mu, \alpha_{g_j}\Big) = 0$$

với mọi $|\epsilon| < \theta$. Nên,

$$H(0) \le H(\epsilon), \forall |\epsilon| < \theta.$$

Do đó, theo điều kiện cần cực trị hàm 1 biến $H: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ta có

$$\left.\frac{dH_j}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \partial_1 g_j^{gr} . h_1 + \dots + \partial_n g_j^{gr} . h_n + \partial_{n+1} g_j^{gr} . \dot{h}_1 + \dots + \partial_{2n} g_j^{gr} . \dot{h}_n = 0 \quad (3.1)$$

với $g_j^{gr} = g_j^{gr}[x^{*gr}, \dot{x}^{*gr}]\left(t, \mu, \alpha_{g_j}\right), (j = 1, \dots, m)$.

(ii) Do x^{*gr} là nghiệm tối ưu của (GNVP), nên phiếm hàm tích phân

$$I(\epsilon)=\int_a^b f^{gr}\big(x_1^{*gr}+\epsilon h_1,\dots,\bar{x}_n+\epsilon h_n,\dot{x}_1^{*gr}+\epsilon\dot{h}_1,\dots,\dot{x}_{n-m}^{*gr}+\epsilon\dot{h}_{n-m},\dot{x}_{n-m+1}^{*gr}+\epsilon\dot{h}_{n-m+1},\dots,\dot{x}_m^{*gr}+\epsilon\dot{h}_n,t,\mu,\alpha_f\big)dt$$

thỏa $I(\epsilon)-I(0)\geq 0,\forall\epsilon\geq 0$. Do đó, theo điều kiện tối ưu cho hàm một biến

$$\left.\frac{dI}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}=I'(0)=0.$$

Điều này dẫn đến

$$\int_a^b[\partial_1 f^{gr}.h_1+\dots+\partial_n f^{gr}.h_2+\partial_{n+1}f^{gr}.\dot{h}_1+\dots+\partial_{2n}f^{gr}.\dot{h}_2]dt=0 \qquad (3.2)$$

(iii) Nhân hai vế (3.1) với $\lambda_j^{gr}=\lambda_j^{gr}\left(t,\mu,\alpha_{\lambda_j}\right)$ rồi lấy tích phân 2 vế trên $[a,b]$ và sau đó cộng với (3.2), ta có

$$\int_a^b\{(\partial_1 f^{gr}+\lambda_1^{gr}.\partial_1 g_1^{gr}+\dots+\lambda_m^{gr}.\partial_1 g_m^{gr}).h_1+\dots+\left(\partial_n f^{gr}+\lambda_1^{gr}.\partial_1 g_1^{gr}+\dots+\lambda_m^{gr}.\partial_1 g_m^{gr}\right)h_n$$
$$+\left(\partial_1 f^{gr}+\lambda_1^{gr}.\partial_1 g_1^{gr}+\dots+\lambda_m^{gr}.\partial_1 g_m^{gr}\right).\dot{h}_1+\dots+\left(\partial_1 f^{gr}+\lambda_1^{gr}.\partial_1 g_1^{gr}+\dots+\lambda_m^{gr}.\partial_1 g_m^{gr}\right)\dot{h}_n\}dt=0$$

Đặt $L^{gr}=L^{gr}[\,x^{*gr},\,\dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_{L^{gr}})=f^{gr}+\lambda_1^{gr}g_1^{gr}+\dots+\lambda_m^{gr}g_m^{gr}$, ta có

$$\int_a^b\left(\partial_1 L^{gr}.h_1+\dots+\partial_n L^{gr}h_n+\partial_{n+1}L^{gr}\dot{h}_1+\dots+\partial_{2n}L^{gr}\dot{h}_n\right)dt=0.$$

Sử dụng công thức từng phần

$$\begin{cases}u=\partial_{i+n}L^{gr}\\ dv=\dot{h}_i dt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{d}{dt}\partial_{i+n}L^{gr}\\ v=\displaystyle\int\dot{h}_i dt=h_i\end{cases}$$

và giả thiết $h_i(a)=h_i(b)=0(i=1,\dots,n)$, ta có

$$\int_a^b\{(\partial_1 L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{n+1}L^{gr}).h_1+\dots+(\partial_{n-m}L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m}).h_{n-m}+(\partial_{n-m+1}L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}).h_{n-m+1}+\dots+(\partial_n L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}L^{gr}).h_n\}dt=0. \,(3.4)$$

Chú ý rằng do $\dot{h}_{n-m+1},\dots,\dot{h}_n$ không chọn tùy ý nên $h_{n-m+1},\dots,h_n$ cũng không tùy ý. Với $j=n-m+1,\dots,n$, xét các hệ thức sau:

$$\begin{aligned}\partial_j L^{gr}-\tfrac{d}{dt}\partial_{j+n}L^{gr}&=\partial_j\big(f^{gr}+\lambda_m^{gr}g_1^{gr}+\dots+\lambda_m^{gr}g_m^{gr}\big)-\tfrac{d}{dt}\partial_{j+n}\big(f^{gr}+\lambda_m^{gr}g_1^{gr}+\dots+\lambda_m^{gr}g_m^{gr}\big)\\
&=\partial_j f^{gr}+\lambda_1^{gr}\partial_j g_1^{gr}+\dots+\lambda_m^{gr}\partial_j g_m^{gr}-\tfrac{d}{dt}\partial_{j+n}f^{gr}-\tfrac{d}{dt}\big(\lambda_m^{gr}.\partial_{j+n}g_1^{gr}\big)-\dots-\tfrac{d}{dt}\big(\lambda_m^{gr}.\partial_{j+n}g_m^{gr}\big)\\
&=\partial_j f^{gr}+\lambda_1^{gr}\partial_j g_1^{gr}+\dots+\lambda_m^{gr}\partial_j g_m^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{j+n}f-(\dot{\lambda}_1^{gr}.\partial_{j+n}g_1^{gr}+\lambda_1^{gr}.\frac{d}{dt}\partial_{j+n}g_1^{gr})-\dots-(\dot{\lambda}_m^{gr}.\partial_{j+n}g_m^{gr}+\lambda_m^{gr}.\frac{d}{dt}\partial_{j+n}g_m^{gr})\\
&=-\big(\partial_j g_1^{gr}.\dot{\lambda}_1^{gr}+\dots+\partial_j g_m^{gr}.\dot{\lambda}_m^{gr}\big)+\left(\partial_j g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{j+n}g_1^{gr}\right).\lambda_1^{gr}+\dots+\left(\partial_j g_m^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{j+n}g_1^{gr}\right).\lambda_m^{gr}+\partial_j f^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{j+n}f^{gr}.\end{aligned}$$

Do đó, hệ phương trình vi phân $\begin{cases}\partial_{n-m+1}L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}L^{gr}=0\\ \dots\dots\dots\dots\\ \partial_n L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}L^{gr}=0\end{cases}$ tương đương

$$\partial_{2n-m+1}g_1^{gr}.\dot{\lambda}_1^{gr}+\dots+\partial_{2n-m+1}g_m^{gr}.\dot{\lambda}_m^{gr}-\left(\partial_{n-m+1}g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}g_1^{gr}\right).\lambda_1^{gr}$$

$$-\cdots-\left(\partial_{n-m+1}g_m^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}g_m^{gr}\right).\lambda_m^{gr} = \partial_{n-m+1}f^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}f^{gr}$$

…………………………………………

$$\partial_{2n}g_1^{gr}.\dot{\lambda}_1^{gr}+\cdots+\partial_{2n}g_m^{gr}.\dot{\lambda}_m^{gr} -\left(\partial_n g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}g_1^{gr}\right).\lambda_1^{gr} -\cdots-\left(\partial_n g_m^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}g_m^{gr}\right).\lambda_m^{gr} = \partial_n f^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}f^{gr}$$

hay dạng ma trận

$$\begin{bmatrix}\partial_{2n-m+1}g_1^{gr} & \cdots & \partial_{2n-m+1}g_m^{gr}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \partial_{2n}g_1^{gr} & \cdots & \partial_{2n}g_m^{gr}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1^{gr}\\ \cdots\\ \dot{\lambda}_m^{gr}\end{bmatrix} -\begin{bmatrix}\partial_{n-m+1}g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}g_1^{gr} & \cdots & \partial_{n-m+1}g_m^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}g_m^{gr}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \partial_n g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}g_1^{gr} & \cdots & \partial_n g_m^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}g_{1m}^{gr}\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}\lambda_1^{gr}\\ \cdots\\ \lambda_m^{gr}\end{bmatrix} =\begin{bmatrix}\partial_{n-m+1}f^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}f^{gr}\\ \cdots\\ \partial_n f^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}f^{gr}\end{bmatrix}.$$

Đặt

$$A(t)=\begin{bmatrix}\partial_{2n-m+1}g_1^{gr} & \cdots & \partial_{2n-m+1}g_m^{gr}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \partial_{2n}g_1^{gr} & \cdots & \partial_{2n}g_m^{gr}\end{bmatrix},$$

$$B(t)=\begin{bmatrix}\partial_{n-m+1}g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}g_1^{gr} & \cdots & \partial_{n-m+1}g_m^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}g_m^{gr}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ \partial_n g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}g_1^{gr} & \cdots & \partial_n g_m^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}g_{1m}^{gr}\end{bmatrix}$$

$$\dot{\Lambda}(t)=\begin{bmatrix}\dot{\lambda}_1^{gr}\\ \cdots\\ \dot{\lambda}_m^{gr}\end{bmatrix},\Lambda(t)=\begin{bmatrix}\lambda_1^{gr}\\ \cdots\\ \lambda_m^{gr}\end{bmatrix},$$

$$C(t)=\begin{bmatrix}\partial_{n-m+1}f^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}f^{gr}\\ \cdots\\ \partial_n f^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}f^{gr}\end{bmatrix},$$

ta có hệ phương trình vi phân dạng ma trận

$$A(t)\dot{\Lambda}(t)-B(t)\Lambda(t)=C(t).$$

Do hạng của $A(t)$ là m, nên tồn tại $\left(A(t)\right)^{-1}$, và hệ phương trình vi phân dạng ma trận tương đương với

$$\dot{\Lambda}(t)-\left(A(t)\right)^{-1}B(t)\Lambda(t)=\left(A(t)\right)^{-1}C(t).$$

Chọn điều kiện biên $\Lambda(a)=\Lambda_0$ nào đó, thì theo Định lý Picard-Linderlöf, hệ phương trình vi phân trên luôn có nghiệm $\Lambda(t)$ (Jacob & Evans, 2018). Do đó, luôn tồn tại các hàm $\lambda_{n-m+1}^{gr},\dots,\lambda_n^{gr}$ sao cho

$$\begin{cases}\partial_{n-m+1}L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n-m+1}L^{gr}=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \partial_n L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_{2n}L^{gr}=0.\end{cases}\qquad(3.5)$$

Trường hợp đặc biệt với $n=2$ và $m=1$, thì $2n-m+1=4, n-m+1=2$ và $\partial_4 g_1^{gr}\neq 0$ thì

$$\partial_2 L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_4 L^{gr}=0 \Leftrightarrow \dot{\lambda}_2^{gr}-\frac{\partial_2 g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_4 g_1^{gr}}{\partial_4 g_1^{gr}}\lambda_2^{gr}=\frac{\partial_2 f^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_4 f^{gr}}{\partial_4 g_1^{gr}}.$$

Do đó, luôn tồn tại

$$\lambda_2^{gr}(t)= e^{\int\frac{\partial_2 g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_4 g_1^{gr}}{\partial_4 g_1^{gr}}dt}\left(\int\frac{\partial_2 f^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_4 f^{gr}}{\partial_4 g_1^{gr}}.e^{\int-\frac{\partial_2 g_1^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_4 g_1^{gr}}{\partial_4 g_1^{gr}}dt}dt+C\right)$$

với C tìm từ điều kiện $\lambda_2^{gr}(a,\mu)=\lambda_0$, sao cho $\partial_2 L^{gr}-\frac{d}{dt}\partial_4 L^{gr}=0$.

Khi đó, từ (3.4) và (3.5) ta có

$$\int_a^b \{(\partial_1 L^{gr} - \frac{d}{dt}\partial_{n+1}L^{gr}).h_1 + \cdots + (\partial_{n-m}L^{gr} - \frac{d}{dt}\partial_{2n-m}L^{gr}).h_{n-m}\}dt = 0$$

Kết hợp với $h_1, \dots, h_{n-m}$ tùy ý, ta suy ra từ Bổ đề 2.1,

$$\partial_i L^{gr} - \frac{d}{dt}\partial_{i+n}L^{gr} = 0.\ (i = 1, \dots, n-m) \quad (3.6)$$

Kết hợp (3.4) và (3.6), ta có điều phải chứng minh.

Định nghĩa 3.1 (xem (Torres và Malinowska, 2012; Clarke, 2013; Tung và Tam, 2023))

Hàm giá trị thực $\phi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [a,b] \times [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ được gọi là lồi đối với $2n$-biến đầu trong tập $S \subset \mathbb{R}^{2n+3}$ nếu

$$\phi[u+p, v+p](t,\mu,\alpha_\phi) - \phi[u,v](t,\mu,\alpha_\phi) \geq \sum_{k=1}^{n}(\partial_k\phi[u,v](t,\mu,\alpha_\phi)p_k + \partial_{k+n}\phi[u,v](t,\mu,\alpha_\phi)q_k)$$

với mọi $(u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n,t,\mu,\alpha_\phi), (u_1 + p_1,\dots,u_n+p_n, v_1+p_1,\dots,v_n+p_n,t,\mu,\alpha_\phi)$ trong tập S và $\partial_k (k = 1,\dots,2n)$ là các đạo hàm riêng của hàm $\phi(.,\dots,.,t,\mu,\alpha_\phi)$ đối với biến thứ k.

Mệnh đề 3.3. *Giả sử tồn tại hàm liên tục $\lambda_j^{gr} = \lambda_j^{gr}(t,\mu,\alpha_{\lambda_j})$ sao cho x^{*gr} thỏa các phương trình Euler-Lagrange sau*

$$\partial_i L^{gr}[x^{*gr}, \dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_{L^{gr}}) - \frac{d}{dt}\partial_{i+n}L^{gr}[x^{*gr}, \dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_{L^{gr}}) = 0, (i = 1,\dots,n)$$

trong đó $L: \mathbb{R}^{2n+3} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$L^{gr}[x^{*gr}, \dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_{L^{gr}}) = f^{gr}[x^{gr},\dot{x}^{gr}](t,\mu,\alpha_f) + \lambda_1^{gr}g_1^{gr}[x^{gr},\dot{x}^{gr}](t,\mu,\alpha_{g_1}) + \cdots + \lambda_m^{gr}g_m^{gr}[x^{gr},\dot{x}^{gr}](t,\mu,\alpha_{g_m}).$$

Gọi $K^+ = \{j = 1,\dots,m | \lambda_j^{gr}(t,\mu,\alpha_{\lambda_j}) \geq 0, \forall t \in [a,b], \mu, \alpha_{\lambda_j} \in [0,1]\}$ *và* $K^- = \{j = 1,\dots,m | \lambda_j^{gr}(t,\mu,\alpha_{\lambda_j}) \leq 0, \forall t \in [a,b], \mu, \alpha_{\lambda_j} \in [0,1]\}$. *Nếu f^{gr} là hàm lồi theo $2n$-biến đầu và $g_j^{gr} (j \in K^+), -g_j^{gr} (j \in K^-)$ hàm lồi theo $2n$-biến đầu thì x^{*gr} là nghiệm tối ưu của (GNVP) và $\mathcal{H}^{-1}(x^{gr}) = \tilde{x}(t)$ là nghiệm của (NVP).*

Chứng minh.

Xét $x^{*gr} + h^{gr} \in \Omega^{gr}$ là một biến phân của x^{*gr} với $h_i^{gr}(a,\mu,\alpha_{h_i}) = 0 = h_i^{gr}(a,\mu,\alpha_{h_i})$ $(i = 1,\dots,n)$ thì ta suy ra từ tính lồi tương ứng với $2n$-biến đầu của f^{gr} đó là

$$J^{gr}(x^{*gr} + h^{gr}) - J^{gr}(x^{*gr}) = \int_a^b \left(f^{gr}[x^{*gr} + h^{gr}, \dot{x}^{*gr} + \dot{h}^{gr}](t,\mu,\alpha_f) - f^{gr}[x^{*gr},\dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_f)\right)dt$$

$$\geq \int_a^b \sum_{k=1}^{n}(\partial_k f^{gr}.h_k^{gr} + \partial_{k+n}f^{gr}.\dot{h}_k^{gr})\,dt \text{ (dùng từng phần)}$$

$$\geq \int_a^b \sum_{k=1}^{n}(\partial_k f^{gr} - \frac{d}{dt}\partial_{k+n}f^{gr})h_k^{gr}\,dt. \quad (3.7)$$

Mặt khác, với $j \in K^+$

$$0 = g_j^{gr}[x^{*gr} + h^{gr}, \dot{x}^{*gr} + \dot{h}^{gr}](t,\mu,\alpha_{g_j}) - g_j^{gr}[x^{*gr},\dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_{g_j})$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n}\partial_k g_j^{gr}.h_k^{gr} + \partial_{k+n}g_j^{gr}.\dot{h}_k^{gr}.$$

Nhân hai vế với $\lambda_j^{gr} = \lambda_j^{gr}(t,\mu,\alpha_{\lambda_j}) \geq 0 (j \in K^+)$, ta có

$$0 \geq \sum_{k=1}^{n}\lambda_j^{gr}\partial_k g_j^{gr}.h_k^{gr} + \lambda_j^{gr}\partial_{k+n}g_j^{gr}.\dot{h}_k^{gr}.$$

Với $j \in K^-$,

$$0 = (-g_j^{gr})[x^{*gr} + h^{gr}, \dot{x}^{*gr} + \dot{h}^{gr}](t,\mu,\alpha_{g_j}) - (-g_j^{gr})[x^{*gr},\dot{x}^{*gr}](t,\mu,\alpha_{g_j})$$

$$\geq \sum_{k=1}^{n}\partial_k(-g_j^{gr}).h_k^{gr} + \partial_{k+n}(-g_j^{gr}).\dot{h}_k^{gr} = -\sum_{k=1}^{n}(\partial_k g_j^{gr}.h_k^{gr} + \partial_{k+n}g_j^{gr}.\dot{h}_k^{gr}).$$

Nhân hai vế với $\lambda_j^{gr} = \lambda_j^{gr}(t,\mu,\alpha_{\lambda_j}) \leq 0 (j \in K^-)$, ta có

$$0 \geq \sum_{k=1}^{n}(\lambda_j^{gr}\partial_k g_j^{gr}.h_k^{gr} + \lambda_j^{gr}\partial_{k+n}g_j^{gr}.\dot{h}_k^{gr}).$$

Như vậy, trong cả hai trường hợp

$$0 \geq \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_j^{gr} \partial_k g_j^{gr} . h_k^{gr} + \lambda_j^{gr} \partial_{k+n} g_j^{gr} . \dot{h}_k^{gr} \right) = \sum_{k=1}^{n} \left((\lambda_j^{gr} . \partial_k g_j^{gr}) . h_k^{gr} + (\lambda_j^{gr} . \partial_{k+n} g_j^{gr}) . \dot{h}_k^{gr} \right),$$

dẫn đến

$$0 \geq \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \left((\lambda_j^{gr} . \partial_k g_j^{gr}) . h_k^{gr} + (\lambda_j^{gr} . \partial_{k+n} g_j^{gr}) . \dot{h}_k^{gr} \right) dt.$$

Sử dụng công thức từng phần ta có

$$0 \geq \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_j^{gr} . \partial_k g_j^{gr} - \frac{d}{dt} (\lambda_j^{gr} . \partial_{k+n} g_j^{gr}) \right) h_k^{gr} dt. \quad (3.8)$$

Cộng (3.7) và các bất đẳng thức trong (3.8) với $j = 1, \dots, m$, ta có

$$\begin{aligned} J(x^{*gr} + h^{gr}) - J(x^{*gr}) &\geq \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_k f^{gr} - \frac{d}{dt} (\partial_{k+n} f^{gr}) \right) h_k^{gr} dt + \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_1^{gr} . \partial_k g_1^{gr} - \frac{d}{dt} (\lambda_1^{gr} . \partial_{k+n} g_1^{gr}) \right) h_k^{gr} dt \\ &\quad + \cdots + \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \left(\lambda_m^{gr} . \partial_k g_m^{gr} - \frac{d}{dt} (\lambda_m^{gr} . \partial_{k+n} g_m^{gr}) \right) . h_k^{gr} dt \\ &\geq \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \Big(\partial_k f^{gr} + \lambda_1^{gr} . \partial_k g_1^{gr} + \cdots + \lambda_m^{gr} . \partial_k g_m^{gr} - \frac{d}{dt} (\partial_{k+n} f^{gr}) \\ &\quad - \frac{d}{dt} (\lambda_1^{gr} . \partial_{k+n} g_1^{gr}) - \cdots - \frac{d}{dt} (\lambda_m^{gr} . \partial_{k+n} g_m^{gr}) \Big) . h_k^{gr} dt \\ &\geq \int_a^b \sum_{k=1}^{n} \left(\partial_k L^{gr} - \frac{d}{dt} (\partial_{k+n} L^{gr}) \right) . h_k^{gr} dt = 0. \end{aligned}$$

Ví dụ 3.1. Giải bài toán tối ưu biến phân mờ

$$(NVP): \widetilde{\min}\, \tilde{J}(\tilde{x}) = \tilde{\int}_0^1 \left(\widetilde{\dot{x}_2}(t) \right)^2 dt$$

với $\widetilde{\dot{x}_1}(t) \ominus_{gr} 2\widetilde{x_2}(t) = (0,0,0)$,

$\widetilde{x_1}(0) = (0,0,0), \widetilde{x_2}(0) = (0,0,0),$

$\widetilde{x_1}(1) = (3,4,6), \widetilde{x_2}(0) = (0,1,2)$

với $(0,0,0), (3,4,6), (0,1,1)$ là các số mờ tam giác.

Giải. Đặt $\tilde{u}_1 = (3,4,6), \tilde{u}_2 = (0,1,2)$. Bài toán granular tương ứng với (NVP) là

$$(GNVP): \min J^{gr}(x^{gr}) = \int_0^1 \left(\dot{x}_2^{gr}(t, \mu, \alpha_{\dot{x}_2}) \right)^2 dt$$

với $g_1^{gr} = \dot{x}_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{\dot{x}_1}) - 2x_2^{gr}(t, \mu, \alpha_{x_2}) = 0, \forall \alpha_{g_1} = \alpha_0$

$$x_1^{gr}(0, \mu, \alpha_{x_1}) = x_2^{gr}(0, \mu, \alpha_{x_2}) = 0, \forall \alpha_{x_1} = \alpha_{x_2} = \alpha_0$$

$$x_1^{gr}(1, \mu, \alpha_{x_1}) = 3 + \mu + (3 - 3\mu)\alpha_{x_1}, \forall \alpha_{x_1} = \alpha_{u_1},$$

$$x_2^{gr}(1, \mu, \alpha_{x_2}) = \mu + (2 - 2\mu)\alpha_{u_2}, \forall \alpha_{x_2} = \alpha_{u_2}.$$

* Hàm $f^{gr}[x, \dot{x}](t, \mu, \alpha_f) = (\dot{x}_2^{gr})^2, g_1^{gr}[x, \dot{x}](t, \mu, \alpha_{g_1}) = \dot{x}_1^{gr} - 2x_2^{gr}$. Do $\frac{\partial g_1}{\partial(\dot{x}_1^{gr}, \dot{x}_2^{gr})} = [1 \quad 0]$ có hạng bằng 1 với định thức con $\det[\partial_3 g_1] = |1| = 1 \neq 0$ nên theo Mệnh đề 3.2 tồn tại hàm $\lambda_1^{gr} = \lambda_1^{gr}(t, \mu, \alpha_{\lambda_1})$ sao cho hàm

$$L^{gr}[x, \dot{x}](t, \mu, \alpha_L) = (\dot{x}_2^{gr})^2 + \lambda_1^{gr}(\dot{x}_1^{gr} - 2x_2^{gr})$$

thỏa các phương trình Euler-Lagrange

$$\begin{cases} \partial_1 L^{gr} - \frac{d}{dt}(\partial_3 L^{gr}) = 0 \\ \partial_2 L^{gr} - \frac{d}{dt}(\partial_4 L^{gr}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - \frac{d}{dt}(\lambda_1^{gr}) = 0 \\ -2\lambda - \frac{d}{dt}(2\dot{x}_2^{gr}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 - \dot{\lambda}_1^{gr} = 0 \\ -2\lambda - 2\ddot{x}_2^{gr} = 0. \end{cases}$$

Do đó, $\ddot{x}_2^{gr} = -\lambda_1^{gr}$, dẫn đến $\dddot{x}_2^{gr} = -\dot{\lambda}_1^{gr} = 0$. Lấy tích phân bất định 3 lần, ta có

$$x_2^{gr} = c_1 t^2 + c_2 t + c_3.$$

Thay vào điều kiện, ta có $\dot{x}_1^{gr}(t) = -c_1 t^2 - c_2 t - c_3$, và do đó,

$$x_1^{gr} = -c_1 \frac{t^3}{3} - c_2 \frac{t^2}{2} - c_3 t + c_4.$$

* Sử dụng các điều kiện biên với $\alpha_{x_1} = \alpha_{u_1} = \alpha_{x_2} = \alpha_{u_2} = \alpha,$ ta có

$$\begin{cases} x_1(0) = 0 \\ x_2(0) = 0 \\ x_1(1) = 3 + \mu + (3 - 3\mu)\alpha \\ x_2(1) = \mu + (2 - 2\mu)\alpha \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_4 = 0 \\ c_3 = 0 \\ -\frac{1}{3}c_1 - \frac{1}{2}c_2 - c_3 + c_4 = 3 + \mu + (3 - 3\mu)\alpha \\ c_1 + c_2 + c_3 = \mu + (2 - 2\mu)\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{3}c_1 - \dfrac{1}{2}c_2 = 3 + \mu + (3 - 3\mu)\alpha \\ c_1 + c_2 = \mu + (2 - 2\mu)\alpha \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 = 9\mu + 18 + (24 - 24\mu)\alpha \\ c_2 = -18 - 8\mu + (22\mu - 22)\alpha \\ c_3 = 0 \\ c_4 = 0. \end{cases}$$

Vậy, điểm dừng là

$$x_1^{gr} = \left(-6 + (2\mu - 2)\alpha_{x_1}\right)t^3 + \left(9 + \mu + (5 - 5\mu)\alpha_{x_1}\right)t^2,$$

$$x_2^{gr} = \left(-9 + (3\mu - 3)\alpha_{x_2}\right)t^2 + \left(9 + \mu + (5 - 5\mu)\alpha_{x_2}\right)t$$

tương ứng với $\lambda_1^{gr}\left(t, \mu, \alpha_{\lambda_1}\right) = -\ddot{x}_2^{gr} = 18 + (6 - 6\mu)\alpha_{\lambda_1}$.

* Điều kiện đủ

$$f^{gr}[u + p, v + q]\left(t, \mu, \alpha_f\right) - f^{gr}[u, v]\left(t, \mu, \alpha_f\right)$$
$$= (v_2 + q_2)^2 - v_2^2 = 2v_2q_2 + q_2^2 \geq 2v_2q_2$$
$$= 0.p_1 + 0.p_2 + 0.q_1 + 2v_2.q_2$$
$$= \partial_1 f^{gr}.p_1 + \partial_2 f^{gr}.p_2 + \partial_3 f^{gr}.q_1 + \partial_4 f^{gr}.q_2$$

nên f^{gr} lồi theo 4-biến đầu.

Do $\mu, \alpha_{\lambda_1} \in [0,1]$ nên $\lambda^{gr}(t) = 18 + (6 - 6\mu)\alpha_{\lambda_1} \geq 0, \forall t \in [0,1]$ nên $1 \in K^+$.

$$g_1^{gr}[u + p, v + q]\left(t, \mu, \alpha_f\right) - g^{gr}[u, v]\left(t, \mu, \alpha_f\right)$$
$$= -2(u_2 + p_2) + v_1 + q_1 - (-2u_2 + v_1)$$
$$= -2p_2 + q_1$$
$$= 0.p_1 + (-2).p_2 + 1.q_1 + 0.q_2$$
$$= \partial_1 g^{gr}.p_1 + \partial_2 g^{gr}.p_2 + \partial_3 g^{gr}.q_1 + \partial_4 g^{gr}.q_2$$

nên $g_1 (1 \in K^+)$ lồi theo 4-biến đầu.

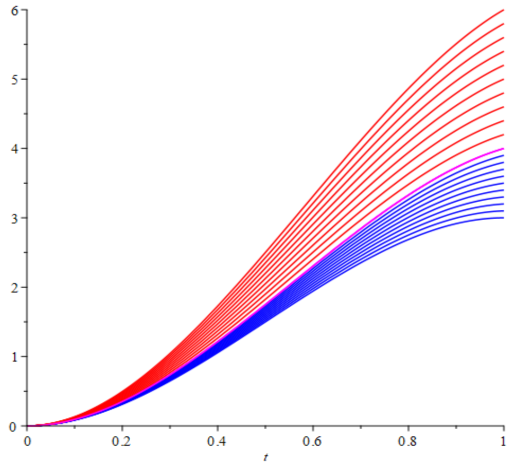
Theo Mệnh đề 3.3, $x^{gr} = \left(x_1^{gr}, x_2^{gr}\right)$ là nghiệm tối ưu của (GNVP) và

$\tilde{x} = \left(\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t)\right) = \mathcal{H}^{-1}(x^{gr})$ với các μ −tập mức xác định bởi

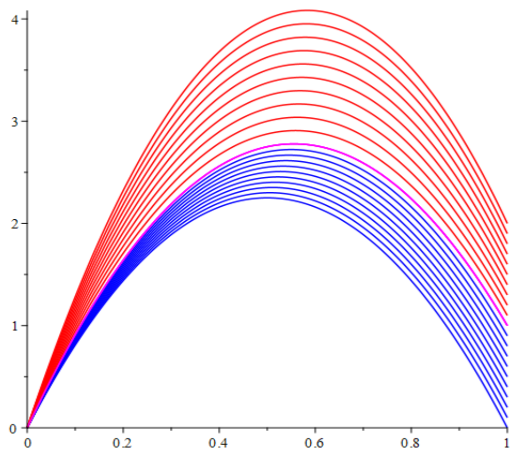
$$\tilde{x}_1(t) = [-6t^3 + (9 + \mu)t^2, (2\mu - 8)t^3 + (14 - 4\mu)t^2],$$

$$\tilde{x}_2(t) = [-9t^2 + (9 + \mu)t, (3\mu - 12)t^2 + (14 - 4\mu)t]$$

là nghiệm tối ưu của (NVP).



Đồ thị hàm $\tilde{x}_1(t)$



Đồ thị hàm $\tilde{x}_2(t)$

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, các điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu hóa hàm biến phân mờ với ràng buộc hệ phương trình vi phân đã được khảo sát. Một ví dụ chi tiết minh họa cho các kết quả trong bài báo cũng đã được trình bày. Khảo sát các điều kiện tối ưu cấp cao và khảo sát các bài toán đối ngẫu của bài toán tối ưu hóa hàm biến phân mờ là các chủ đề vẫn chưa được nghiên cứu và có thể phát triển trong các nghiên cứu tiếp theo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ahmad, I., Jayswal, A., Al-Homidan, S., & Banerjee, J. (2019). Sufficiency and duality in interval-valued variational programming, *Neural Comput Appl*, 31, 4423-4433. https://doi.org/10.1007/s00521-017-3307-y

Almeida, R., Torres, D. F. (2011). Necessary and sufficient conditions for the fractional calculus of variations with Caputo derivatives, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*, 16(3), 1490-1500. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2010.07.016

Bellman, R. E., & Zadeh, L. A. (1970). Decision-making in a fuzzy environment, *Manag. Sci*. 17, 141-164. https://doi.org/10.1287/mnsc.17.4.B141

Clarke, F. (2013). Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control, *Springer, New York*. https://doi.org/10.1007/9781-4471-4820-3

Dong, N. P., Long, H. V., & Khastan, A. (2020). Optimal control of a fractional order model for granular SEIR epidemic with uncertainty, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul*, 88, 105312. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2020.105312

Farhadinia, B. (2011). Necessary optimality conditions for fuzzy variational problems, *Inform. Sci*, 181, 1348-1357. https://doi.org/10.1016/j.ins.2010.11.027

Giaquinta, M., & Hildebrandt, S. (1996). Calculus of Variations I, *Springer, Berlin*. https://doi.org/10.1007/978-3-662-032787

Hestenes, M. R. (1966). Calculus of Variations and Optimal Control Theory, *Wiley, New York*. https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7539-4

Hestenes, M. R. (1975). Optimization Theory: The Finite Dimensional Case, *Wiley, New York*. https://doi.org/10.1137/1019126

Jacob, N., & Evans, K.P. (2018). Course In Analysis, A-Vol. IV: Fourier Analysis, Ordinary Differential Equations, Calculus Of Variations, *World Scientific*. https://doi.org/10.1142/11078

Mazandarani, M., Pariz, N., & Kamyad, A. V. (2017). Granular differentiability of fuzzy-number-valued functions, *IEEE Trans. Fuzzy Syst*, 26, 310-323. https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2017.2659731

Mustafa, A. M., Gong, Z., & Osman, M. (2021). The solution of fuzzy variational problem and fuzzy optimal control problem under granular differentiability concept, *Int. J.Comput. Math*, 98, 1495-1520. https://doi.org/10.1080/00207160.2020.1823974

Piegat, A., & Landowski, M. (2015). Horizontal membership function and examples of its applications, *Int. J. Fuzzy Syst*, 17, 22-30. https://doi.org/10.1007/s40815-015-0013-8

Piegat, A., & Plucinski, M. (2021). The differences between the horizontal membership function used in multidimensional fuzzy arithmetic and the inverse membership function used in gradual arithmetic, *Granul. Comput,* 2021, 1-10. https://doi.org/10.1007/s41066-021-00293-z

Rayanki, V., Ahmad, I., &Kummari, K. (2023). Interval-valued variational programming problem with Caputo-Fabrizio fractional derivative, *Math Methods Appl Sci,* 475 (46), 17485-17510. https://doi.org/10.1002/mma.9512

Soolaki, J., Fard, O. S., & Borzabadi, A. H. (2016). Generalized Euler-Lagrange equations for fuzzy variational problems, *SeMA J,* 73, 131-148. https://doi.org/10.1007/s40324-015-0060-y

Son, N. T. K., Long, H. V., & Dong, N. P. (2019). Fuzzy delay differential equations under granular differentiability with applications, *Comp. Appl. Math,* 38, 107. https:// doi.org/10.1007/s40314-019-0881

Torres, D. F. M., & Malinowska, A. B. (2012). Introduction to the Fractional Calculus of Variations, *World Scientic, Singapore*. https://doi.org/10.1142/p871

Tung, L. T., & Tam, D. H. (2022). Necessary and sufficient optimality conditions for semi-infinite programming with multiple fuzzy-valued objective functions, *Stat. Optim. Inf.Comput*, 10, 410-425. https://doi.org/10.19139/soic-2310-5070-1088

Tung, L.T., & Tam, D.H. (2022). Optimality conditions and duality for continuous-time programming with multiple interval-valued objective functions, *Comput Appl Math*, 41, 1–28. https://doi.org/10.1007/s40314-022-02059-y

Tung, L.T., & Tam, D. H. (2023). Necessary and sufficient optimality conditions for fuzzy variational problems of several dependent variables in terms of granular derivatives, *Int J Uncertain Fuzziness Knowlege-Based Syst*, 31, 825-857. https://doi.org/10.1142/S0218488523500381

Wu, H. C. (2009). The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for multi-objective programming problems with fuzzy-valued objective functions, *Fuzzy Optimization and Decision Making,* 8, 1-28. https://doi.org/10.1007/s10700-009-9049-2