Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.336

TÍNH ỔN ĐỊNH NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN HỖN HỢP

Nguyễn Hữu Danh[1*] và Phạm Thanh Dược[2]

[1]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*
[2]*Khoa Công nghệ Thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghệ Cần Thơ*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): nhdanh@tdu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 16/04/2024
Sửa bài (Revised): 17/06/2024
Duyệt đăng (Accepted): 17/07/2024

***Title:** Stability of solution maps to mixed variational inequality*

***Author(s):** Nguyen Huu Danh[1*] and Pham Thanh Duoc[2]*

***Affiliation(s):** [1]Tay Do University; [2]Can Tho University of Technology*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bài toán bất đẳng thức biến phân vector hỗn hợp được xét và tính ổn định của nghiệm được nghiên cứu trong trường hợp cả hàm mục tiêu và tập ràng buộc đều bị nhiễu. Hàm Gerstewitz được sử dụng để thiết lập các điều kiện đủ cho tính liên tục theo nghĩa Hausdorff của ánh xạ nghiệm bài toán trên. Một ví dụ áp dụng cũng được đưa ra để minh họa cho kết quả chính của bài báo.

***Từ khoá:** Bất đẳng thức biến phân hỗn hợp, điều kiện ổn định, vô hướng hóa phi tuyến, liên tục Hausdorff*

ABSTRACT

In this paper, the vector mixed variational inequality is considered, and the stability of the solution is studied in cases where both the objective function and the constraint set are perturbed. The Gerstewitz function is used to establish sufficient conditions for the Hausdorff continuity of the solution mapping of the above problem. An illustrative example is also provided to demonstrate the main results of the paper.

***Keywords:** Mixed variational inequality, stability conditions, nonlinear scalarization, Hausdorff continuity*

1. GIỚI THIỆU

Cho X là một không gian vector topo Hausdorff lồi địa phương; Y, Z là các không gian topo tuyến tính thực; $A \subset X, \Lambda \subset Y, M \subset Z$ là các tập con khác rỗng. Cho $\mathbb{R}_+$ là tập hợp các số thực không âm. $C \subset Y$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh với phần trong khác rỗng ($\text{int}C \neq \emptyset$) và cho trước $e \in \text{int}C$. Cho $K: \Lambda \rightrightarrows A$ là một ánh xạ đa trị có giá trị lồi, đóng và khác rỗng, $g: A \times M \to Y$, $h: A \times M \to L(X, Y)$ là các ánh xạ có giá trị vector, $L(X, Y)$ là tập hợp tất cả các ánh xạ tuyến tính liên tục từ X vào Y. Với mỗi $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$, ta xét bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp như sau:

(MVI) Tìm $\bar{x} \in K(\lambda)$ sao cho, với mọi $y \in K(\lambda)$,

$$\langle h(\bar{x}, \mu), y - \bar{x} \rangle + g(y, \mu) - g(\bar{x}, \mu) \in C.$$

Bài toán bất đẳng thức biến phân có ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, bao gồm tài chính, kinh tế, vận tải, khoa học kỹ thuật,..., theo Kinderlehrer and Stampacchia (2000), Goeleven (2017), Mordukhovich (2018). Chủ đề tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân đã được nghiên cứu một cách sâu rộng (Wang, 2017; Iusem & Lara, 2019; Tang & Li, 2020). Tang and Li (2020) đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp tổng quát (GMVI) trong không gian Banach phản xạ. Khi tập ràng buộc là compact yếu, các tác giả thu được hai định lý tồn tại cho GMVI. Dựa trên hai định lý tồn tại này, khi tập ràng buộc không bị chặn, các tác giả đạt được một số định lý tồn tại cho GMVI bị nhiễu bởi một ánh xạ liên tục phi tuyến trong không gian hữu hạn chiều.

Một chủ đề quan trọng khác là phân tích tính ổn định. Phân tích tính ổn định có thể được hiểu theo các hướng sau. Thứ nhất là tính nửa liên tục, liên tục (hoặc liên tục theo Hausdorff) của ánh xạ nghiệm (Cheng & Zhu, 2005; Li & Chen, 2009). Thứ hai là tính liên tục Hölder/Lipschitz của ánh xạ nghiệm (Yen, 1995, 1997). Thứ ba là sự hội tụ nghiệm, cận sai số, sự đặt chỉnh của bài toán (Tang & Huang, 2013; Boonman et al., 2021). Boonman et al. (2021) đã đề xuất các khái niệm α-đặt chỉnh Levitin-Polyak bởi các nhiễu và α-đặt chỉnh Levitin-Polyak tổng quát cho các bài toán tựa biến phân hỗn hợp kiểu Minty và Stampacchia (MQVI và SQVI). Sau đó, các tác giả đã thiết lập các điều kiện đủ cho các bài toán này đặt chỉnh theo khái niệm vừa đề xuất ở trên. Ngoài ra, các tác giả còn giới thiệu và nghiên cứu một số tính chất của hàm quãng cách cho các bài toán MQVI, SQVI, được sử dụng để nghiên cứu sự α-đặt chỉnh Levitin-Polyak bởi các nhiễu cho các bài toán nói trên.

Từ những quan sát trên, bài báo nhằm mục đích nghiên cứu tính ổn định cho nghiệm xấp xỉ của bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp. Cụ thể, thông qua việc sử dụng công cụ hàm vô hướng hóa phi tuyến Gerstewitz, các điều kiện đủ cho ánh xạ nghiệm xấp xỉ bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp liên tục theo nghĩa Hausdorff đã được xây dựng.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong phần này, ta nhắc lại một số khái niệm và kết quả mở đầu, cần thiết trong phần tiếp theo.

Cho $F: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị và $x_0 \in X$.

Định nghĩa 2.1 Theo Aubin and Frankowska (1990), F được gọi là

(a) nửa liên tục trên (usc) tại x_0 nếu với bất kỳ tập con mở U của Y thỏa mãn $F(x_0) \subset U$, tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $F(N) \subset U$;

(b) nửa liên tục dưới (lsc) tại x_0 nếu với bất kỳ tập con mở U của Y thỏa mãn $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$, tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho với mọi $x \in N, F(x) \cap U \neq \emptyset$;

(c) liên tục tại x_0 nếu nó vừa là nửa liên tục trên vừa là nửa liên tục dưới tại x_0.

Ta nói rằng F liên tục trong X nếu F liên tục tại mỗi điểm $x \in X$.

Định nghĩa 2.2 Theo Khan et al. (2015), F được gọi là

(a) nửa liên tục trên theo nghĩa Hausdorff (H-usc) tại x_0 nếu, với mỗi lân cận $\mathbb{B}_Y$ của gốc trong Y, tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $F(x) \subset F(x_0) + \mathbb{B}_Y$ với mọi $x \in N$;

(b) nửa liên tục dưới theo nghĩa Hausdorff (H-lsc) tại x_0 nếu, với mỗi lân cận $\mathbb{B}_Y$ của gốc trong Y, tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $F(x_0) \subset F(x) + \mathbb{B}_Y$ với mọi $x \in N$;

(c) liên tục theo nghĩa Hausdorff tại x_0 nếu nó vừa là H-usc vừa là H-lsc tại x_0.

Ta nói rằng F liên tục theo nghĩa Hausdorff trong X nếu F liên tục theo nghĩa Hausdorff tại mỗi điểm $x \in X$.

Định nghĩa 2.3 Theo Tanaka (1997), một ánh xạ có giá trị vector $\varphi: X \to Y$ được gọi là

(a) C-nửa liên tục dưới (C-lsc) tại $x_0 \in X$ nếu với mọi lân cận V của $\varphi(x_0)$, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho $\varphi(x) \in V + C$ với mọi $x \in U$;

(b) C-nửa liên tục trên (C-usc) tại x_0 nếu $-\varphi$ là C-nửa liên tục dưới;

(c) C-liên tục tại x_0 nếu φ vừa là C-lsc vừa là C-usc tại x_0;

(d) C-liên tục trong X nếu φ là C-liên tục tại mọi điểm $x \in X$.

Khi $Y = \mathbb{R}$ và $C = \mathbb{R}_+$, các định nghĩa trên thu về các định nghĩa cổ điển tương ứng.

Bổ đề 2.1 Cho φ_1 và φ_2 là hai ánh xạ có giá trị vector từ X vào Y. Khi đó, $\varphi_1 + \varphi_2$ là C-usc (C-lsc) nếu φ_1 và φ_2 đều là C-usc (C-lsc) (Tanaka, 1997).

Định nghĩa 2.4 Cho D là một tập con lồi của $X, \varphi: X \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector (Göpfert et al., 2003)

(a) φ được gọi là C-lõm trong D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $t \in [0,1]$,

$$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) \in t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2) + C.$$

(b) φ được gọi là affine trong D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $t \in [0,1]$,

$$\varphi(tx_1 + (1-t)x_2) = t\varphi(x_1) + (1-t)\varphi(x_2).$$

Ta nói rằng φ là C-lồi nếu $-\varphi$ là C-lõm.

Định nghĩa 2.5 Cho D là một tập con lồi của X và $f: X \to \mathbb{R}$ là một hàm số. f được gọi là lõm trong D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D$ và $t \in [0,1]$,

$$f(tx_1 + (1-t)x_2) \geq tf(x_1) + (1-t)f(x_2)$$

và lồi trong D nếu $-f$ là lõm trong D.

Định nghĩa 2.6 Một ánh xạ $g: X \to L(X, Y)$ được gọi là đơn điệu trong D nếu với mọi $x_1, x_2 \in D, \langle g(x_1) - g(x_2), x_1 - x_2 \rangle \in C$.

Định nghĩa 2.7 Một ánh xạ đa trị $G: X \rightrightarrows Y$ được gọi là có đường kính bị chặn đều trong một tập con A của X nếu và chỉ nếu tồn tại một số thực dương ρ sao cho với mọi $x \in A$, $\mathrm{diam}G(x) \leq \rho$ trong đó "diam" là đường kính (Anh et al., 2022).

Định nghĩa 2.8 Hàm phi tuyến $\xi_e: Y \to \mathbb{R}$ được xác định bởi, với mọi $y \in Y$ (Anh et al., 2023),

$$\xi_e(y) := \inf\{ t \in \mathbb{R} \mid y + te \in C \}.$$

Bổ đề 2.2 Cho $r \in \mathbb{R}$ và $y \in Y$ (Anh et al., 2023). Khi đó,

(i) $\xi_e(y) \leq r \Leftrightarrow y + re \in C$.

(ii) $\xi_e(y + re) = \xi_e(y) - r$.

(iii) ξ_e là một hàm lồi, liên tục trong Y.

(iv) ξ_e là giảm theo nghĩa với mọi $y_1, y_2 \in Y, y_1 - y_2 \in C$ suy ra $\xi_e(y_1) \leq \xi_e(y_2)$.

Bổ đề 2.3 Cho $\varphi: X \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector. Khi đó, $\xi_e \circ \varphi$ là lồi trong một tập con lồi $A \subset X$ nếu φ là C-lõm trong A.

Chứng minh. Với mọi $x, y \in A$ và $t \in [0,1]$, ta có

$$\varphi(tx + (1-t)y) \in t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) + C.$$

Vì ξ_e là giảm, nên ta có

$$\xi_e(\varphi(tx + (1-t)y)) \leq \xi_e(t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y)).$$

Do tính chất lồi của ξ_e, ta được

$$\xi_e(\varphi(tx + (1-t)y)) \leq t\xi_e(\varphi(x)) + (1-t)\xi_e(\varphi(y)),$$

nghĩa là, $\xi_e \circ \varphi$ là lồi.

Bổ đề 2.4 Cho $\varphi: X \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector. Khi đó, $\xi_e \circ \varphi$ là liên tục trong X nếu φ là C-liên tục trong X.

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh tính nửa liên tục trên của $\xi_e \circ \varphi$. Xét x_0 là một phần tử bấy kỳ trong X và $\varepsilon > 0$. Vì φ là C-lsc tại x_0, với mọi lân cận V của $\varphi(x_0)$, tồn tại một lân cận U của x_0 sao cho với mọi $x \in U, \varphi(x) \in V + C$. Khi đó, tồn tại $u \in V$ sao cho $\varphi(x) \in u + C$. Sử dụng tính C-giảm của ξ_e, ta được

$$\xi_e(\varphi(x)) - \xi_e(u) \leq 0. \quad (1)$$

Vì ξ_e là nửa liên tục trên tại $\varphi(x_0)$ và $u \in V$, ta có

$$\xi_e(u) - \xi_e(\varphi(x_0)) \leq \varepsilon. \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta được $\xi_e(\varphi(x)) - \xi_e(\varphi(x_0)) \leq \varepsilon$. Do đó, $\xi_e \circ \varphi$ là usc trong X vì x_0 là tùy ý.

Tương tự, ta cũng có tính nửa liên tục dưới của $\xi_e \circ \varphi$ trong X. Vậy, $\xi_e \circ \varphi$ là liên tục trong X.

3. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Để đơn giản trong cách trình bày, ta đặt $\psi(x, y, \mu) := \langle h(x, \mu), y - x \rangle + g(y, \mu) - g(x, \mu)$. Với mỗi $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$ và $\varepsilon \geq 0$, ta ký hiệu tập nghiệm xấp xỉ của (MVI) bởi

$$S(\varepsilon, \lambda, \mu) := \{ x \in K(\lambda) \mid \psi(x, y, \mu) + \varepsilon e \in C, \forall y \in K(\lambda) \}.$$

Bổ đề 3.1 Với mỗi $\lambda \in \Lambda, y \in K(\lambda)$ và $\mu \in M, \psi(\cdot, y, \mu)$ là C-lõm trong $K(\lambda)$ nếu $h(\cdot, \mu)$ là đơn điệu và affine, và $g(\cdot, \mu)$ là C-lồi trong $K(\lambda)$.

Chứng minh. Với $x_1, x_2 \in K(\lambda), t \in [0,1]$ và $x_t := tx_1 + (1-t)x_2$, ta có, với mọi $y \in K(\lambda)$,

$$\begin{aligned}
&\psi(x_t, y, \mu) - t\psi(x_1, y, \mu) - (1-t)\psi(x_2, y, \mu) \\
&= \langle h(x_t, \mu), y - x_t \rangle + g(y, \mu) - g(x_t, \mu) \\
&-t\big(\langle h(x_1, \mu), y - x_1 \rangle + g(y, \mu) - g(x_1, \mu)\big) \\
&-(1-t)\big(\langle h(x_2, \mu), y - x_2 \rangle + g(y, \mu) - g(x_2, \mu)\big) \\
&= \langle th(x_1, \mu) + (1-t)h(x_2, \mu), y - x_t \rangle \\
&+g(y, \mu) - g(x_t, \mu) \\
&-t\langle h(x_1, \mu), y - x_1 \rangle - tg(y, \mu) + tg(x_1, \mu)\big) \\
&-(1-t)\langle h(x_2, \mu), y - x_2 \rangle - (1-t)g(y, \mu) + (1 - t)g(x_2, \mu)\big) \\
&= t\langle h(x_1, \mu), (1-t)x_1 - (1-t)x_2 \rangle \\
&+(1-t)\langle h(x_2, \mu), -tx_1 + tx_2 \rangle \\
&+tg(x_1, \mu) + (1-t)g(x_2, \mu) - g(x_t, \mu) \\
&= t(1-t)\langle h(x_1, \mu) - h(x_2, \mu), x_1 - x_2 \rangle \\
&+tg(x_1, \mu) + (1-t)g(x_2, \mu) - g(x_t, \mu) \\
&\in C + C = C.
\end{aligned}$$

Suy ra $\psi(\cdot, y, \mu)$ là C-lõm.

Bổ đề 3.2 Với mỗi $(\varepsilon, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+ \times \Lambda \times M$, ta có khẳng định sau

$$S(\varepsilon, \lambda, \mu) := \{x \in K(\lambda) \mid -\xi_e(\psi(x, y, \mu)) + \varepsilon \geq 0, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

Chứng minh. Lấy tùy ý $x \in S(\varepsilon, \lambda, \mu)$, khi đó $x \in K(\lambda)$ và $\psi(x, y, \mu) + \varepsilon e \in C$ với mọi $y \in K(\lambda)$. Theo Bổ đề 2.2(i) ta có $\xi_e(\psi(x, y, \mu)) \leq \varepsilon$ với mọi $y \in K(\lambda)$, nghĩa là, $-\xi_e(\psi(x, y, \mu)) + \varepsilon \geq 0$ với mọi $y \in K(\lambda)$. Suy ra $x \in \{x \in K(\lambda) \mid -\xi_e(\psi(x, y, \mu)) + \varepsilon \geq 0, \forall y \in K(\lambda)\}$.

Ngược lại, lấy bất kỳ $x \in \{x \in K(\lambda) \mid -\xi_e(\psi(x, y, \mu)) + \varepsilon \geq 0, \forall y \in K(\lambda)\}$, ta có $\xi_e(\psi(x, y, \mu)) \leq \varepsilon$ với mọi $y \in K(\lambda)$. Áp dụng Bổ đề 2.2(i), ta được $\psi(x, y, \mu) + \varepsilon e \in C$ với mọi $y \in K(\lambda)$, nghĩa là, $x \in S(\varepsilon, \lambda, \mu)$.

Định lý 3.1 Xét (MVI), với mỗi $\varepsilon_0 > 0$ và $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times M$, giả sử

(i) K là compact và liên tục tại λ_0 và có đường kính bị chặn đều trong Λ;

(ii) h, g là C-liên tục trong $K(\lambda_0) \times \{\mu_0\}$;

(iii) $h(\cdot, \mu_0)$ là đơn điệu và affine trong $K(\lambda)$, $g(\cdot, \mu_0)$ là C-lồi trong $K(\lambda)$, với mọi $\lambda \in \Lambda$.

Khi đó, S là liên tục Hausdorff tại $(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0)$.

Chứng minh. Ta chia nội dung chứng minh thành ba bước.

Bước 1. Với mọi lân cận $\mathbb{B}$ của gốc trong X, ta chứng minh rằng tồn tại một lân cận $V \times N$ của (ε_0, μ_0) sao cho với mọi $\lambda \in \Lambda$ và $(\varepsilon, \mu) \in V \times N$,

$$S(\varepsilon, \lambda, \mu) \subset S(\varepsilon_0, \lambda, \mu_0) + \mathbb{B} \quad (3)$$

và $$S(\varepsilon_0, \lambda, \mu_0) \subset S(\varepsilon, \lambda, \mu) + \mathbb{B}. \quad (4)$$

Đặt $V' = [\varepsilon_0 - \delta, \varepsilon_0 + \delta]$ là một lân cận của ε_0 với $0 < \delta < \varepsilon_0$. Lấy tùy ý $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in V'$ với $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, η là một số thực thỏa mãn $0 < \eta < \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ và $\lambda \in \Lambda$. Với mỗi $x, y \in K(\lambda)$, theo Giả thiết (ii), ta được tính C-liên tục của ψ tại μ_0. Kết hợp điều này với Bổ đề 2.4, tồn tại một lân cận $M_\eta(\mu_0)$ của μ_0 sao cho, với mọi $\mu \in M_\eta(\mu_0)$,

$$|\xi_e(\psi(x, y, \mu)) - \xi_e(\psi(x, y, \mu_0))| \leq \tfrac{\eta}{2}.$$

Do đó, với mọi $\mu_1, \mu_2 \in M_\eta(\mu_0)$,

$$\begin{aligned}&|\xi_e(\psi(x, y, \mu_1)) - \xi_e(\psi(x, y, \mu_2))|\\ &\leq |\xi_e(\psi(x, y, \mu_1)) - \xi_e(\psi(x, y, \mu_0))|\\ &+|\xi_e(\psi(x, y, \mu_2)) - \xi_e(\psi(x, y, \mu_0))|\end{aligned}$$

suy ra

$$|\xi_e(\psi(x, y, \mu_1)) - \xi_e(\psi(x, y, \mu_2))| \leq \eta. \quad (5)$$

Với mỗi $(\varepsilon_1, \mu_1), (\varepsilon_2, \mu_2) \in V' \times M_\eta(\mu_0)$, ta chứng minh rằng

$$S(\varepsilon_1, \lambda, \mu_1) \subset S(\varepsilon_2, \lambda, \mu_2). \quad (6)$$

Thật vậy, theo Bổ đề 3.2, với mỗi $x \in S(\varepsilon_1, \lambda, \mu_1)$, ta có $-\xi_e(\psi(x, y, \mu_1)) + \varepsilon_1 \geq 0$ với mọi $y \in K(\lambda)$, và do đó

$$-\xi_e(\psi(x, y, \mu_1)) + \xi_e(\psi(x, y, \mu_2)) - \xi_e(\psi(x, y, \mu_2)) + \varepsilon_1 \geq 0$$

với mọi $y \in K(\lambda)$. Kết hợp điều này với (5) ta được

$$-\xi_e(\psi(x, y, \mu_2)) + \eta + \varepsilon_1 \geq 0, \forall y \in K(\lambda)$$

nghĩa là, $-\xi_e(\psi(x, y, \mu_2)) + \varepsilon_2 \geq 0$ với mọi $y \in K(\lambda)$. Vì vậy, $x \in S(\varepsilon_2, \lambda, \mu_2)$ và ta được (6). Áp dụng (6), với $(\varepsilon, \mu) \in V' \times M_\eta(\mu_0)$, ta có

$$S(\varepsilon_0 - \delta, \lambda, \mu_0) \subset S(\varepsilon, \lambda, \mu) \subset S(\varepsilon_0 + \delta, \lambda, \mu_0). \quad (7)$$

Tiếp theo ta chứng minh

$$\tfrac{1}{\theta} S(\gamma, \lambda, \mu_0) + \left(1 - \tfrac{1}{\theta}\right) S(\varepsilon_2, \lambda, \mu_0) \subset S(\varepsilon_1, \lambda, \mu_0) \quad (8)$$

trong đó $1 < \theta < \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$ và $\gamma = \varepsilon_2 + \theta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$. Thật vậy, lấy tùy ý $x \in S(\gamma, \lambda, \mu_0)$ và $x' \in S(\varepsilon_2, \lambda, \mu_0)$. Suy ra $-\xi_e(\psi(x, y, \mu_0)) + \gamma \geq 0$ và $\xi_e(\psi(x', y, \mu_0)) + \varepsilon_2 \geq 0$, với mọi $y \in K(\lambda)$. Vì $K(\lambda)$ là tập lồi, ta có $\frac{1}{\theta} x + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) x' \in K(\lambda)$. Do đó

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\theta} \xi_e(\psi(x, y, \mu_0)) + \frac{1}{\theta}\gamma \\ - \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \xi_e(\psi(x', y, \mu_0)) \\ + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) \varepsilon_2 \geq 0.\end{aligned}$$

Sử dụng Giả thiết (iii) và các Bổ đề 3.1 và 2.3, ta được tính lồi của $\xi_e \circ \psi$, và do đó, $-\xi_e \circ \psi$ là lõm. Suy ra

$$-\xi_e \circ \psi\left(\tfrac{1}{\theta} x + \left(1 - \tfrac{1}{\theta}\right) x', y, \mu_0\right) + \left(\tfrac{1}{\theta}\gamma + \left(1 - \tfrac{1}{\theta}\right) \varepsilon_2\right) \geq 0,$$

hay, $-\xi_e \circ \psi\left(\frac{1}{\theta} x + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) x', y, \mu_0\right) + \varepsilon_1 \geq 0$, nghĩa là,

$$\frac{1}{\theta} x + \left(1 - \frac{1}{\theta}\right) x' \in S(\varepsilon_1, \lambda, \mu_0)$$

và do đó (8) được chứng minh.

Bao hàm thức (8) được viết lại như sau

$$\left(1-\frac{1}{\theta}\right)S(\varepsilon_2,\lambda,\mu_0)\subset S(\varepsilon_1,\lambda,\mu_0)-\frac{1}{\theta}S(\gamma,\lambda,\mu_0)$$

suy ra

$$\begin{aligned}S(\varepsilon_2,\lambda,\mu_0)&\subset S(\varepsilon_1,\lambda,\mu_0)\\&+\frac{1}{\theta-1}[S(\varepsilon_1,\lambda,\mu_0)-S(\gamma,\lambda,\mu_0)]\\&\subset S(\varepsilon_1,\lambda,\mu_0)+\frac{1}{\theta-1}[K(\lambda)-K(\lambda)].\end{aligned}$$

Kết hợp điều này với tính đường kính bị chặn đều của K, tồn tại $\rho>0$,

$$S(\varepsilon_2,\lambda,\mu_0)\subset S(\varepsilon_1,\lambda,\mu_0)+\tfrac{\rho}{\theta-1}\mathbb{B},\forall\lambda\in\Lambda. \quad (9)$$

Lấy $0<\delta_0<\frac{\varepsilon_0}{\rho+1}$ và $V=[\varepsilon_0-\delta_0,\varepsilon_0+\delta_0]$. Từ (9), lấy $\varepsilon_2=\varepsilon_0$, $\varepsilon_1=\varepsilon_0-\delta_0$ và chọn $\theta=\rho+1$, khi đó $1<\theta<\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_2-\varepsilon_1}$, kết hợp điều này với (7) ta được

$$\begin{aligned}S(\varepsilon_0,\lambda,\mu_0)&\subset S(\varepsilon_0-\delta_0,\lambda,\mu_0)+\mathbb{B}\\&\subset S(\varepsilon,\lambda,\mu)+\mathbb{B}.\end{aligned}$$

Tương tự, lấy $\varepsilon_2=\varepsilon_0+\delta_0,\varepsilon_1=\varepsilon_0$ trong (9) và chọn $\theta=\rho+1$, ta có

$$S(\varepsilon_0+\delta_0,\lambda,\mu_0)\subset S(\varepsilon_0,\lambda,\mu_0)+\mathbb{B}.$$

Kết hợp bao hàm thức trên với (7) suy ra $S(\varepsilon,\lambda,\mu)\subset S(\varepsilon_0,\lambda,\mu_0)+\mathbb{B}$ với mọi $\lambda\in\Lambda$. Vì vậy, (3) và (4) được chứng minh.

Bước 2. Ta chứng minh rằng, với mọi $(\varepsilon,\mu)\in V\times M_\eta(\mu_0), S(\varepsilon,\cdot,\mu)$ là liên tục Hausdorff tại λ_0.

Trước hết ta chứng minh $S(\varepsilon,\cdot,\mu)$ là usc tại λ_0. Giả sử $S(\varepsilon,\cdot,\mu)$ không usc tại λ_0, nghĩa là, tồn tại một tập mở U với $S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)\subset U$, một lưới $\lambda_\alpha\to\lambda_0$ và $x_\alpha\in S(\varepsilon,\lambda_\alpha,\mu), x_\alpha\notin U$ với mọi α. Do tính nửa liên tục trên của K tại λ_0 và tính compact của $K(\lambda_0)$, ta có thể giả sử $x_\alpha\to x_0$ với $x_0\in K(\lambda_0)$. Nếu $x_0\notin S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$, thì tồn tại $y_0\in K(\lambda_0)$ sao cho

$$-\xi_e\big(\psi(x_0,y_0,\mu)\big)+\varepsilon<0.$$

Vì $K(\lambda_0)$ là nửa liên tục dưới, nên tồn tại $y_\alpha\in K(\lambda_\alpha)$ sao cho $y_\alpha\to y_0$. Do $x_\alpha\in S(\varepsilon,\lambda_\alpha,\mu)$, ta có $-\xi_e\big(\psi(x_\alpha,y_\alpha,\mu)\big)+\varepsilon\geq 0$, điều này là không thể vì theo Giả thiết (ii) và Bổ đề 2.4 suy ra $\xi_e\circ\psi$ là liên tục. Vậy, $x_0\in S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$, đây lại là điều mâu thuẫn vì $x_\alpha\notin U$ với mọi α.

Tiếp theo, ta chứng minh tính H-lsc của $S(\varepsilon,\cdot,\mu)$ tại λ_0, bằng cách chứng minh $S(\varepsilon,\cdot,\mu)$ là lsc tại λ_0 và $S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$ là compact.

Ta chứng minh rằng $\hat{S}(\varepsilon,\cdot,\mu)$ là lsc tại λ_0 trong đó

$\hat{S}(\varepsilon,\cdot,\mu):=\{x\in K(\lambda)\mid -\xi_e(\psi(x,y,\mu))+\varepsilon>0,\forall y\in K(\lambda)\}$

là tập nghiệm bổ trợ của tập nghiệm xấp xỉ (MVI). Giả sử $\hat{S}(\varepsilon,\cdot,\mu)$ không lsc tại λ_0, nghĩa là tồn tại $\hat{x}\in\hat{S}(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$, một lưới $\lambda_\alpha\to\lambda_0$ sao cho với mọi $x_\alpha\in\hat{S}(\varepsilon,\lambda_\alpha,\mu)$, x_α không hội tụ về $\hat{x}$. Vì K là lsc tại λ_0, nên tồn tại $\bar{x}_\alpha\in K(\lambda_\alpha)$ với $\bar{x}_\alpha\to\hat{x}$. Theo giả thiết phản chứng ở trên, tồn tại một dãy con $\{\bar{x}_\beta\}$ sao cho với mọi $\beta,\bar{x}_\beta\notin\hat{S}(\varepsilon,\lambda_\beta)$, nghĩa là với $y_\beta\in K(\lambda_\beta)$,

$$-\xi_e\left(\psi(\bar{x}_\beta,y_\beta,\mu)\right)+\varepsilon\leq 0.$$

Vì K là nửa liên tục trên và có giá trị compact tại λ_0, ta có $\hat{y}\in K(\lambda_0)$ sao cho $y_\beta\to\hat{y}$ (lấy dãy con nếu cần). Theo Giả thiết (ii) và Bổ đề 2.4, ta được tính liên tục của $\xi_e\circ\psi$, và do đó $-\xi_e(\psi(\hat{x},\hat{y},\mu))+\varepsilon\leq 0$, điều này là mâu thuẫn vì $\hat{x}\in\hat{S}(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$.

Ta tiếp tục chứng minh

$$S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)\subset \mathrm{cl}\hat{S}(\varepsilon,\lambda_0,\mu), \quad (10)$$

trong đó 'cl' ký hiệu cho bao đóng. Lấy bất kỳ $\bar{x}\in S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$ và $x_1\in\hat{S}(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$. Đặt $x_t:=(1-t)\bar{x}+tx_1$ với $t\in(0,1)$. Khi đó, $-\xi_e(\psi(\bar{x},y,\mu))+\varepsilon\geq 0$ và $-\xi_e\big(\psi(x_1,y,\mu)\big)+\varepsilon>0$, với mọi $y\in K(\lambda_0)$. Theo Bổ đề 2.3 và Giả thiết (iii), ta được tính lõm của $-\xi_e\circ\psi$. Do đó,

$$\begin{aligned}-\xi_e\big(\psi(x_t,y,\mu)\big)+\varepsilon&\geq(1-t)(-\xi_e(\psi(\bar{x},y,\mu)))\\&+t\left(-\xi_e\big(\psi(x_1,y,\mu)\big)\right)+\varepsilon\\&\geq(1-t)\big(-\xi_e\big(\psi(\bar{x},y,\mu)\big)+\varepsilon\big)\\&+t\big(-\xi_e\big(\psi(x_1,y,\mu)\big)+\varepsilon\big)>0.\end{aligned}$$

Suy ra $x_t\in\hat{S}(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$. Vì $x_t\to\bar{x}$ khi $t\to 0$, ta được $\bar{x}\in\mathrm{cl}\,\hat{S}(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$. Do đó, ta được (10). Từ tính nửa liên tục dưới của $\hat{S}(\varepsilon,\cdot,\mu)$ tại λ_0, ta có

$$\begin{aligned}S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)\subset\mathrm{cl}\,\hat{S}(\varepsilon,\lambda_0,\mu)&\subset\liminf\hat{S}(\varepsilon,\lambda_\alpha,\mu)\\&\subset\liminf S(\varepsilon,\lambda_\alpha,\mu)\end{aligned}$$

nghĩa là, $S(\varepsilon,\cdot,\mu)$ là lsc tại λ_0.

Với bấy kỳ $x_\alpha\in S(\varepsilon,\lambda_0,\mu),x_\alpha\to\tilde{x}$, thì $x_\alpha\in K(\lambda_0)$ và $\tilde{x}\in K(\lambda_0)$. Với mọi $y\in K(\lambda_0)$, ta có $-\xi_e\big(\psi(x_\alpha,y,\mu)\big)+\varepsilon\geq 0$. Theo Giả thiết (ii) và Bổ đề 2.4, ta được tính liên tục của $\xi_e\circ\psi$, và do đó $-\xi_e(\psi(\tilde{x},y,\mu))+\varepsilon\geq 0$, nghĩa là, $\tilde{x}\in S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$. Suy ra $S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$ là một tập con đóng của tập compact $K(\lambda_0)$ suy ra $S(\varepsilon,\lambda_0,\mu)$ là compact.

Bước 3. Với mỗi lân cận $\mathbb{B}$ của gốc trong X, tồn tại một lân cận $\mathbb{B}_1$ của gốc trong X sao cho

$$\mathbb{B}_1 + \mathbb{B}_1 \subset \mathbb{B}. \tag{11}$$

Theo Bước 1, với bất kỳ lân cận $\mathbb{B}_1$, tồn tại lân cận $V_1 \times M_\eta(\mu_0)$ của (ε_0, μ_0) sao cho với mọi $\lambda \in \Lambda$ và $(\varepsilon, \mu) \in V_1 \times M_\eta(\mu_0)$,

$$S(\varepsilon, \lambda, \mu) \subset S(\varepsilon_0, \lambda, \mu_0) + \mathbb{B}_1$$
$$\text{và } S(\varepsilon_0, \lambda, \mu_0) \subset S(\varepsilon, \lambda, \mu) + \mathbb{B}_1. \tag{12}$$

Theo Bước 2, với mỗi $(\varepsilon, \mu) \in V_1 \times M_\eta(\mu_0)$, $S(\varepsilon, \cdot, \mu)$ là H-liên tục tại λ_0, nên tồn tại một lân cận N_1 của λ_0 sao cho với mọi $\lambda \in N_1$,

$$S(\varepsilon_0, \lambda, \mu_0) \subset S(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0) + \mathbb{B}_1$$
$$\text{và } S(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0) \subset S(\varepsilon_0, \lambda, \mu_0) + \mathbb{B}_1. \tag{13}$$

Rõ ràng, $V_1 \times N_1 \times M_\eta(\mu_0)$ là một lân cận của $(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0)$. Kết hợp điều này với (11), (12) và (13), với mọi $(\varepsilon, \lambda, \mu) \in V_1 \times N_1 \times M_\eta(\mu_0)$, ta được

$$S(\varepsilon, \lambda, \mu) \subset S(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0) + \mathbb{B}$$
$$\text{và } S(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0) \subset S(\varepsilon, \lambda, \mu) + \mathbb{B}.$$

Vậy, S là liên tục Hausdorff tại $(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0)$.

Nhận xét 3.1 Bài toán (MVI) là một dạng đặc biệt của bài toán cân bằng (VEP). Theo Anh et al. (2019), một kết quả thú vị về tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán (VEP) với tập ràng buộc không bị nhiễu đã được nghiên cứu. Sau đó, Anh et al. (2021) đã mở rộng bài toán (VEP) cho trường hợp hàm mục tiêu nhận giá trị tập hợp và ánh xạ ràng buộc bị nhiễu. Trong đó, tính bị chặn của ánh xạ ràng buộc là một giả thiết quan trọng. Trong Định lý 3.1, giả thiết về tính bị chặn của ánh xạ ràng buộc đã được giảm nhẹ thành tính "có đường kính bị chặn đều", và do đó các kết quả trong Anh et al. (2021) khi thu về đơn trị sẽ không suy ra được kết quả của Định lý 3.1.

Để minh họa cho tính áp dụng của Định lý 3.1, ta xét một ví dụ sau.

Ví dụ 3.1 Cho $X = A = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}^2$,

$$\Lambda \equiv M = [0,1], K(\mu) = [0, \mu], C = \mathbb{R}^2_+,$$
$$e = (1,1) \in \text{int}C, h(x, \mu) = (2x - \mu, 2x - \mu),$$
$$g(x, \mu) = (2x^2 + \mu x, 2x^2 + \mu x).$$

Rõ ràng, tất cả các giả thiết của Định lý 3.1 được thỏa mãn. Với mọi $\varepsilon > 0$, tính toán trực tiếp ta được tập nghiệm

$$S(\varepsilon, \mu) = \left[0, \frac{\sqrt{\varepsilon}}{2}\right] \cap [0, \mu],$$

là liên tục Hausdorff.

Trong trường hợp $h = 0$, bài toán (MVI) thu về bài toán tối ưu vector. Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ Định lý 3.1.

Hệ quả 3.1 Với mỗi $\varepsilon_0 > 0$ và $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times M$, giả sử

(i) K là compact và liên tục tại λ_0 và có đường kính bị chặn đều trong Λ;

(ii) g là C-liên tục trong $K(\lambda_0) \times \{\mu_0\}$;

(iii) $g(\cdot, \mu_0)$ là C-lồi trong $K(\lambda)$, với mọi $\lambda \in \Lambda$.

Khi đó, ánh xạ nghiệm xấp xỉ

$$(\varepsilon, \lambda, \mu) \mapsto S^O(\varepsilon, \lambda, \mu) :=$$
$$\{x \in K(\lambda) \mid g(y, \mu) - g(x, \mu) + \varepsilon e \in C, \forall y \in K(\lambda)\}$$

là liên tục Hausdorff tại $(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0)$.

Trong trường hợp $g = 0$, bài toán (MVI) thu về bài toán bất đẳng thức biến phân vector. Áp dụng Định lý 3.1 ta cũng có kết quả sau.

Hệ quả 3.2 Với mỗi $\varepsilon_0 > 0$ và $(\lambda_0, \mu_0) \in \Lambda \times M$, giả sử

(i) K là compact và liên tục tại λ_0 và có đường kính bị chặn đều trong Λ;

(ii) h là C-liên tục trong $K(\lambda_0) \times \{\mu_0\}$;

(iii) $h(\cdot, \mu_0)$ là đơn điệu và affine trong $K(\lambda)$, với mọi $\lambda \in \Lambda$.

Khi đó, ánh xạ nghiệm xấp xỉ

$$(\varepsilon, \lambda, \mu) \mapsto S^V(\varepsilon, \lambda, \mu) :=$$
$$\{x \in K(\lambda) \mid \langle h(x, \mu), y - x\rangle + \varepsilon e \in C, \forall y \in K(\lambda)\}$$

là liên tục Hausdorff tại $(\varepsilon_0, \lambda_0, \mu_0)$.

Nhận xét 3.2 Các Hệ quả 3.1 và 3.2 là sự mở rộng của các Hệ quả 1 và 2 trong Anh et al. (2019) theo nghĩa ánh xạ ràng buộc bị nhiễu bởi tham số λ.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, các điều kiện ổn định của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán bất đẳng thức biến phân vector hỗn hợp phụ thuộc tham số đã được nghiên cứu. Dựa trên hàm Gerstewitz và các giả thiết thích hợp, các điều kiện đủ cho tính liên tục Hausdorff của ánh xạ nghiệm xấp xỉ cho bài toán này đã được thiết lập. Cách giải quyết vấn đề của chúng tôi có thể được sử dụng để nghiên cứu cho các bài toán liên quan đến tối ưu, chẳng hạn như các bài toán về quan hệ biến phân, các bài toán bao hàm biến phân, …

LỜI CẢM TẠ

Bài báo là một phần kết quả đạt được trong đề tài nghiên cứu "Tính liên tục của ánh xạ nghiệm bài toán bất đẳng thức biến phân hỗn hợp", được tài trợ bởi Trường Đại học Tây Đô, mã số: 01.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L.Q., Khanh, P.Q., & Tam, T.N. (2019). Continuity of approximate solution maps of primal and dual vector equilibrium problems. *Optimization Letters*, *13*, 201-211.

Anh, L.Q., Duoc, P.T., Tam, T.N., & Thang, N.C. (2021). Stability analysis for set-valued equilibrium problems with applications to Browder variational inclusions. *Optimization Letters*, *15*, 613-626.

Anh, L.Q., Duoc, P.T., & Tung, N.M. (2022). On Lipschitz continuity of solutions to equilibrium problems via the Hiriart-Urruty oriented distance function. *Computational and Applied Mathematics*, *41*(1),1-17.

Anh, L.Q., Tam, T.N., & Danh, N.H. (2023). On Lipschitz continuity of approximate solutions to set-valued equilibrium problems via nonlinear scalarization. *Optimization*, *72*(2), 439–461.

Aubin J., & Frankowska H. (1990). *Set-valued analysis*. Springer Science & Business Media.

Boonman, P., Anh, L.Q., & Wangkeeree, R. (2021). Levitin-Polyak well-posedness by perturbations of strong vector mixed quasivariational inequality problems. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, *22*,1327-1352.

Cheng, Y., & Zhu, D. (2005). Global stability results for the weak vector variational inequality. *Journal of Global Optimization*, *32*(4), 543–550.

Goeleven, D. (2017). *Complementarity and variational inequalities in electronics*. Academic Press.

Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C., & Zălinescu, C. (2003). *Variational methods in partially ordered spaces*. Springer Verlag, New York.

Iusem, A., & Lara, F. (2019). Existence results for noncoercive mixed variational inequalities in finite dimensional spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *183*(1), 122–138.

Khan, A., Tammer, C., & Zălinescu, C. (2015). *Set-valued optimization: An introduction with applications,* Springer, Berlin.

Kinderlehrer, D., & Stampacchia, G. (2000). *An introduction to variational inequalities and their applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Li, S., & Chen, C. (2009). Stability of weak vector variational inequality. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *70*(4), 1528–1535.

Mordukhovich, B.S. (2018). *Variational analysis and applications*. Springer.

Tanaka, T. (1997). Generalized semicontinuity and existence theorems for cone saddle points. *Applied Mathematics and Optimization*, *36*(3), 313–322.

Tang, G.J., & Huang, N.J. (2013). Gap functions and global error bounds for set-valued mixed variational inequalities. *Taiwanese Journal of Mathematics*, *17*(4), 1267-1286. DOI: 10.11650/tjm.17.2013.2247

Tang, G.J., & Li, Y.S. (2020). Existence of solutions for mixed variational inequalities with perturbation in Banach spaces. *Optimization Letters*, *14*(3), 637–651.

Wang, M. (2017). The existence results and Tykhonov regularization method for generalized mixed variational inequalities in Banach spaces. *Analysis and Mathematical Physics*, *7*(2), 151–163.

Yen, N.D. (1995). Hölder continuity of solutions to a parametric variational inequality. *Applied Mathematics and Optimization*, *31*(3), 245–255.

Yen, N.D, & Lee, G.M. (1997). Solution sensitivity of a class of variational inequalities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *215*(1), 48–55.