Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.468

ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ CHO CẬN SAI SỐ PHI TUYẾN

Đoàn Hữu Hiệu[1], Trương Thành Trung[1], Võ Minh Tâm[2] và Nguyễn Duy Cường[1*]
[1]Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ, Việt Nam
[2]Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp, Việt Nam
*Tác giả liên hệ (Corresponding author): ndcuong@ctu.edu.vn

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 12/04/2024
Sửa bài (Revised): 24/04/2024
Duyệt đăng (Accepted): 25/08/2024

Title: *Necessary and sufficient conditions for nonlinear error bounds*

Author(s): *Doan Huu Hieu[1], Truong Thanh Trung[1], Vo Minh Tam[2] and Nguyen Duy Cuong[1*]*

Affiliation(s): *[1]Department of Mathematics, College of Natural Sciences, Can Tho University, Viet Nam; [2]Faculty of Mathematics-Information Technology Teacher Education, Dong Thap University, Viet Nam*

TÓM TẮT

Bài báo thiết lập điều kiện cần và đủ cho cận sai số phi tuyến của hàm thực suy rộng trong không gian mêtric và Asplund. Các điều kiện được trình bày dưới dạng độ dốc và dưới vi phân Fréchet riêng phần thông qua các kỹ thuật của giải tích biến phân hiện đại. Các kết quả được vận dụng để nghiên cứu cho tính chính quy mêtric phi tuyến của ánh xạ đa trị.

Từ khóa: *Cận sai số phi tuyến, độ dốc, dưới vi phân, tính chính quy mêtric*

ABSTRACT

The paper establishes necessary and sufficient conditions for nonlinear error bounds of real-extended-valued functions in metric and Asplund spaces. The conditions are presented in terms of partial slopes and Fréchet subdifferentials by employing techniques of modern variational analysis. The results are applied to study the nonlinear metric regularity of set-valued mappings.

Keywords: *Metric regularity, nonlinear error bound, slope, subdifferential*

1. GIỚI THIỆU

Lý thuyết về cận sai số được đề xuất bởi Hoffman (1952) để nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của hệ bất phương trình tuyến tính. Hoffman đã chứng minh sự tồn tại của cận sai số toàn cục cho các hàm affine trên không gian hữu hạn chiều. Các kết quả của Hoffman sau đó được mở rộng cho hàm lồi (Li, 1997), hàm đa thức (Luo & Luo, 1994), hàm liên tục Lipschitz (Ioffe, 1979) và hàm nửa liên tục dưới (Azé et al., 2002). Cận sai số có mối liên hệ chặt chẽ với các tính chất quan trọng khác của giải tích biến phân: tính chính quy mêtric (Cuong & Kruger, 2021), bất đẳng thức Kurdyka-Lojasiewicz (Bolte et al., 2017), và điểm cực tiểu yếu chặt (Burke & Deng, 2009).

Cận sai số cung cấp thông tin về cận trên của khoảng cách từ một điểm đến tập nghiệm của một bất phương trình phi tuyến tổng quát với hàm đang xét là không trơn và không lồi. Thông tin này rất hữu ích trong việc giải toán, vì việc đánh giá các cận trên thì hoàn toàn có thể, trong khi việc tìm chính xác tập nghiệm là rất phức tạp. Lý thuyết này được vận dụng trong bài toán phân tích độ nhạy (Jourani, 2000), bài toán đánh giá tốc độ hội tụ của các thuật toán (Dao & Phan, 2019) và các vấn đề có liên quan.

Việc nghiên cứu cận sai số tuyến tính có chứa tham số được đề xuất bởi Jourani (2000). Jourani đã thiết lập các điều kiện đủ trên không gian đối ngẫu bằng cách vận dụng nguyên lý biến phân Ekeland và quy tắc tổng chính xác cho các dưới vi phân trong không gian Banach. Gần đây, Cuong et al. (2022) đã phát triển các kết quả của Jourani cho trường hợp phi tuyến Hölder thông qua việc thiết lập điều kiện đủ dưới dạng độ dốc và dưới vi phân Fréchet riêng phần. Trong bài báo này, các kết quả trên được mở rộng cho trường hợp phi tuyến tổng quát trong không gian mêtric và Asplund. Bên cạnh điều kiện đủ, các điều kiện cần cho cận sai số phi tuyến chứa tham số cũng được thiết lập.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, X là một không gian mêtric hoặc định chuẩn, và Y là một tập khác rỗng. Không gian đối ngẫu của X được kí hiệu là X^*. Ta kí hiệu $B_\delta(x)$ cho hình cầu mở tâm x với bán kính $\delta > 0$. Hình cầu đơn vị trong không gian nền và không gian đối ngẫu được ký hiệu lần lượt là B và B^*. Tập hợp các số thực, số thực không âm và số thực suy rộng được kí hiệu lần lượt là $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, $\mathbb{R}_\infty := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Với $\alpha \in \mathbb{R}$, ta kí hiệu $\alpha_+ := \max\{0, \alpha\}$.

Ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ giữa hai tập hợp X, Y là một ánh xạ mà trong đó với mỗi $x \in X$, ta xác định $F(x)$ là một tập con của Y. Miền hữu hiệu và đồ thị của F được kí hiệu là $\mathrm{dom}F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ và $\mathrm{gph}F := \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$. Ánh xạ ngược của F được xác định bởi $F^{-1}(y) := \{x \in X \mid y \in F(x)\}$ với mọi $y \in Y$. Dễ thấy $\mathrm{dom}F^{-1} = F(X)$.

Cho tập hợp $\Omega \subset X$, khoảng cách từ x đến Ω được định nghĩa là $d(x, \Omega) := \inf_{u \in \Omega} d(u, x)$, và ta quy ước $d(x, \emptyset) := +\infty$. Cho hàm thực suy rộng $f : X \to \mathbb{R}_\infty$, khi đó miền hữu hiệu của f được kí hiệu là $\mathrm{dom}f := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$.

Tính chất phi tuyến của cận sai số được xác định bởi hàm số $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ thỏa $\varphi(0) = 0$, và khả vi liên tục với $\varphi'(t) > 0$ với mọi $t > 0$. Họ tất cả các hàm số như vậy được kí hiệu là $\mathcal{C}$.

Bổ đề 2.1 (Ekeland, 1974)

Cho X là không gian mêtric đủ, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$ là hàm nửa liên tục dưới trên X, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, và $\lambda > 0$. Nếu $f(x) < \inf_X f + \varepsilon$, thì tồn tại $\hat{x} \in X$ thoả:

(i) $d(\hat{x}, x) < \lambda$;

(ii) $f(\hat{x}) \le f(x)$;

(iii) $f(u) + (\varepsilon/\lambda) d(u, \hat{x}) \ge f(\hat{x}), \forall u \in X$.

Định nghĩa 2.1 (Kruger, 2003)

Cho X là không gian định chuẩn, $f : X \to \mathbb{R}_\infty$, và $x \in \mathrm{dom}f$. Dưới vi phân Fréchet của f tại x, được kí hiệu là $\partial^F f(x)$, là tập hợp tất cả các phần tử $x^* \in X^*$ thoả

$$\liminf_{u \to x} \frac{f(u) - f(x) - \langle x^*, u - x\rangle}{\| u - x \|} \ge 0.$$

Bổ đề 2.2 (Kruger, 2003)

Cho X là không gian định chuẩn, $f : X \to \mathbb{R}_\infty$, $x \in \mathrm{dom}f$. Nếu x là một điểm cực tiểu địa phương của f thì $0 \in \partial^F f(x)$.

Bổ đề 2.3 (Fabian, 1989)

Cho X là không gian Asplund, $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}_\infty$, và $x \in \mathrm{dom}f_1 \cap \mathrm{dom}f_2$. Giả sử f_1 liên tục Lipschitz, và f_2 nửa liên tục dưới trên một lân cận của x. Khi đó với mọi $x^* \in \partial^F(f_1 + f_2)(x)$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_1, x_2 \in X$ thỏa $||x_i - x|| < \varepsilon$, $|f_i(x_i) - f_i(x)| < \varepsilon$ $(i = 1,2)$, và

$$x^* \in \partial^F f_1(x_1) + \partial^F f_2(x_2) + \varepsilon B^*.$$

Bổ đề 2.4 (Cuong et al., 2022)

Cho $(X, \|\cdot\|)$ là không gian định chuẩn.

(i) $\partial^F \|\cdot\| (0) = \{x^* \in X^* \mid \|x^*\| \le 1\}$.

(ii) $\partial^F \|\cdot\| (x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle = \| x \|, \|x^*\| = 1\}$ nếu $x \neq 0$.

Định nghĩa 2.2 (Cuong et al., 2022)

Cho X là không gian mêtric, Y là tập khác rỗng, $f : X \times Y \to \mathbb{R}_\infty$, và $(x, y) \in \mathrm{dom}f$. Độ dốc và độ dốc toàn cục riêng phần của f tại (x, y) là

$$|\nabla_x f|(x, y) := \limsup_{u \to x, u \neq x} \frac{[f(x, y) - f(u, y)]_+}{d(u, x)},$$

và

$$|\nabla_x f|^\circ(x, y) := \sup_{u \neq x} \frac{[f(x, y) - f_+(u, y)]_+}{d(u, x)}.$$

Nhận xét 2.1

(i) Nếu f là hàm khả vi Fréchet trong không gian định chuẩn X thì độ dốc của hàm số bằng chuẩn của toán tử đạo hàm.

(ii) Nếu x là điểm cực tiểu địa phương của f thì độ dốc của f tại x bằng 0.

Định nghĩa 2.3 (Cuong et al., 2022)

Cho X là không gian định chuẩn, Y là tập khác rỗng, $f : X \times Y \to \mathbb{R}_\infty$, $(x, y) \in \mathrm{dom}f$. Dưới vi phân Fréchet riêng phần của f tại (x, y), được kí hiệu là $\partial_x^F f(x, y)$, là tập hợp tất cả các phần tử $x^* \in X^*$ thoả

$$\liminf_{u \to x} \frac{f(u, y) - f(x, y) - \langle x^*, u - x\rangle}{\| u - x \|} \ge 0.$$

Nhận xét 2.2

Nếu $g(\cdot) := f(\cdot, y)$, thì $|\nabla g|(x) = |\nabla_x f|(x, y)$, $|\nabla g|^\circ(x) = |\nabla_x f|^\circ(x, y)$, và $\partial^F g(x) = \partial_x^F f(x, y)$.

Do đó, các độ dốc và dưới vi phân Fréchet riêng phần thoả tất cả các tính chất của độ dốc và dưới vi phân thông thường.

Bổ đề 2.5 (Cuong & Kruger, 2022)

Cho X là không gian định chuẩn, Y là tập khác rỗng, $f : X \times Y \to \mathbb{R}_\infty$, $(x,y) \in \mathrm{dom} f$ với $f(x,y) > 0$.

(i) $|\nabla_x f|(x,y) \leq |\nabla_x f|^\circ(x,y)$.

(ii) $|\nabla_x f|(x,y) \leq d\big(0, \partial_x^F f(x,y)\big)$.

(iii) Nếu $f(\cdot,y)$ là lồi, thì $|\nabla_x f|(x,y) = |\nabla_x f|^\circ(x,y) = d\big(0, \partial_x f(x,y)\big)$.

Bổ đề 2.6

Cho X là không gian định chuẩn, Y là tập khác rỗng, $f : X \times Y \to \mathbb{R}_\infty$, $\varphi \in \mathcal{C}$, $(x,y) \in \mathrm{dom} f$ với $f(x,y) > 0$.

(i) $|\nabla_x(\varphi \circ f)|(x,y) = \varphi'\big(f(x,y)\big)|\nabla_x f|(x,y)$.

(ii) $\partial_x^F(\varphi \circ f)(x,y) = \varphi'\big(f(x,y)\big)\partial_x^F f(x,y)$.

Chứng minh

(i) Nếu x là điểm cực tiểu địa phương của $f(\cdot,y)$, thì x cũng là điểm cực tiểu địa phương của hàm hợp $(\varphi \circ f)(\cdot,y)$. Khi đó $|\nabla_x(\varphi \circ f)|(x,y) = |\nabla_x f|(x,y) = 0$. Giả sử x không là điểm cực tiểu địa phương của $f(\cdot,y)$. Nếu $f(\cdot,y)$ không nửa liên tục dưới tại x, thì $\alpha := \lim_{k\to+\infty} f(x_k,y) < f(x,y)$ với $x_k \to x$. Dưới giả thiết của φ, ta suy ra φ là tăng chặt xung quanh $f(x,y)$ và do đó $\liminf_{k\to+\infty} \varphi\big(f(x_k,y)\big) \leq \varphi(\alpha) < \varphi\big(f(x,y)\big)$. Do đó $(\varphi \circ f)(\cdot,y)$ cũng không nửa liên tục dưới tại x. Khi đó

$$|\nabla_x(\varphi \circ f)|(x,y) = |\nabla_x f|(x,y) = +\infty.$$

Giả sử $f(\cdot,y)$ là nửa liên tục dưới tại x, tức là $\liminf_{u\to x, u\neq x} f(u,y) = f(x,y)$. Khi đó,

$$\begin{aligned}
&|\nabla_x(\varphi \circ f)|(x,y)\\
&= \limsup_{u\to x, u\neq x} \frac{\varphi\big(f(x,y)\big) - \varphi\big(f(u,y)\big)}{d(u,x)}\\
&= \limsup_{\substack{u\to x, u\neq x\\ f(u,y)<f(x,y)}} \frac{\varphi\big(f(x,y)\big) - \varphi\big(f(u,y)\big)}{d(u,x)}\\
&= \limsup_{\substack{u\to x, u\neq x\\ f(u,y)\uparrow f(x,y)}} \frac{\varphi\big(f(x,y)\big) - \varphi\big(f(u,y)\big)}{d(u,x)}\\
&= \limsup_{\substack{u\to x, u\neq x\\ f(u,y)\uparrow f(x,y)}} \frac{\varphi\big(f(x,y)\big) - \varphi\big(f(u,y)\big)}{f(x,y) - f(u,y)}.\\
&\quad .\frac{f(x,y) - f(u,y)}{d(u,x)}\\
&= \varphi'\big(f(x,y)\big).\limsup_{u\to x, u\neq x} \frac{f(x,y) - f(u,y)}{d(u,x)}\\
&= \varphi'\big(f(x,y)\big)|\nabla_x f|(x,y).
\end{aligned}$$

(ii) Từ giả thiết của φ, ta có $\varphi(t) > \varphi\big(f(x,y)\big)$ với mọi $t > f(x,y)$, và $\varphi(t) < \varphi\big(f(x,y)\big)$ với mọi $t < f(x,y)$. Đặt $\gamma = \liminf_{u\to 0} f(x+u,y)$. Nếu $\gamma \neq f(x,y)$ thì

$$\begin{aligned}
&\liminf_{u\to 0} \frac{f(x+u,y) - f(x,y)}{\|u\|}\\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\gamma - f(x,y)}{\|u\|}\\
&= \liminf_{u\to 0} \frac{\varphi\big(f(x+u,y)\big) - \varphi\big(f(x,y)\big)}{\|u\|}\\
&= \lim_{u\to 0} \frac{\varphi(\gamma) - \varphi\big(f(x)\big)}{\|u\|}.
\end{aligned}$$

Nếu $\gamma < f(x,y)$ thì cả hai giới hạn trên đều bằng $-\infty$ và $\partial_x^F(\varphi \circ f)(x,y) = \partial_x^F f(x,y) = \emptyset$. Nếu $\gamma > f(x,y)$ thì cả hai giới hạn trên đều bằng $+\infty$ và $\partial_x^F(\varphi \circ f)(x,y) = \partial_x^F f(x,y) = X^*$. Giả sử $\gamma = f(x,y)$ và $x^* \in X^*$. Do $\varphi'\big(f(x,y)\big) > 0$, nên

$$\begin{aligned}
&\liminf_{u\to 0} \frac{\varphi\big(f(x+u,y)\big) - \varphi\big(f(x,y)\big) - \varphi'\big(f(x,y)\big)\langle x^*, u\rangle}{\|u\|}\\
&= \liminf_{\substack{u\to 0\\ f(x+u,y)\to f(x,y)}}\\
&\frac{\varphi\big(f(x+u,y)\big) - \varphi\big(f(x,y)\big) - \varphi'\big(f(x,y)\big)\langle x^*, u\rangle}{\|u\|}\\
&= \varphi'\big(f(x,y)\big) \liminf_{u\to 0} \frac{f(x+u,y) - f(x,y) - \langle x^*, u\rangle}{\|u\|}.
\end{aligned}$$

Do đó, $x^* \in \partial_x^F f(x,y)$ khi và chỉ khi $\varphi'\big(f(x,y)\big)x^* \in \partial_x^F(\varphi \circ f)(x,y)$. ■

Nhận xét 2.3

Bổ đề 2.7 và 2.8 trong Cuong et al. (2022) là trường hợp đặc biệt của Bổ đề 2.6 khi $\varphi(t) = t^q$ $(q > 0)$.

Định nghĩa 2.4

Cho X là không gian mêtric, Y là tập khác rỗng, $f : X \times Y \to \mathbb{R}_\infty$ và $\varphi \in \mathcal{C}$. Hàm số f được gọi là có φ-cận sai số tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$d(x, [f_y \le 0]) \le \varphi(f_+(x,y))$$

với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$ và $y \in Y$, trong đó $[f_y \le 0] \coloneqq \{x \in X \mid f(x,y) \le 0\}$.

Nhận xét 2.4

Định nghĩa 2.7 trong Cuong et al. (2022) là trường hợp đặc biệt của Định nghĩa 2.4 với $\varphi(t) \coloneqq \tau^{-1} t^q$ $(\tau > 0, q > 0)$.

3. ĐIỀU KIỆN ĐỦ CHO CẬN SAI SỐ

Mệnh đề 3.1

Cho X là không gian mêtric đủ, $\tau > 0$, và $x \in [f_y > 0]$. Giả sử $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục dưới tại x. Nếu $|\nabla_u f|(u,y) \ge \tau$ với mọi $u \in X$ thỏa $f(u,y) < \tau d(u, [f_y \le 0]), f(u,y) \le f(x,y)$, và $d(u,x) < d(x, [f_y \le 0])$, thì $[f_y \le 0] \ne \emptyset$ và

$$\tau d(x, [f_y \le 0]) \le f(x,y).$$

Chứng minh

Ta chứng minh bằng phản chứng. Giả sử $f(x,y) < \tau d(x, [f_y \le 0])$. Chọn $\hat{\tau} \in (0, \tau)$ sao cho $f(x,y) < \hat{\tau} d(x, [f_y \le 0])$. Áp dụng Bổ đề 2.1 cho hàm nửa liên tục dưới $f_+(\cdot, y)$ với $\varepsilon := \hat{\tau} d(x, [f_y \le 0])$ và $\lambda = d(x, [f_y \le 0])$, suy ra tồn tại $\hat{u} \in X$ thoả:

(i) $f_+(\hat{u}, y) \le f_+(x,y)$;

(ii) $d(\hat{u}, x) < d(x, [f_y \le 0])$;

(iii) $f_+(\hat{u}, y) \le f_+(u,y) + \hat{\tau} d(\hat{u}, u), \forall u \in X$.

Từ (ii) ta được $\hat{u} \notin [f_y \le 0]$ hay $f(\hat{u}, y) > 0$. Kết hợp với (i) ta có $0 < f(\hat{u}, y) \le f(x,y)$. Trong (iii), lấy infimum hai vế của bất đẳng thức trên tập $[f_y \le 0]$, ta được $f(\hat{u}, y) \le \hat{\tau} d(\hat{u}, [f_y \le 0])$. Do đó $f(\hat{u}, y) < \tau d(\hat{u}, [f_y \le 0])$, và

$$\sup_{u \ne \hat{u}} \frac{f(\hat{u}, y) - f(u,y)}{d(\hat{u}, u)} \le \hat{\tau}.$$

Từ đó suy ra $|\nabla_{\hat{u}} f|(\hat{u}, y) \le \hat{\tau} < \tau$. ∎

Hệ quả 3.1

Cho X là không gian mêtric đủ, và $\tau > 0$. Giả sử $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục dưới, và $\bar{x} \in [f_y \le 0]$ với mỗi $y \in Y$. Nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho $|\nabla_x f|(x,y) \ge \tau$ với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$, $y \in Y$ với $f(x,y) < \tau d(x, [f_y \le 0])$, thì

$$\tau d(x, [f_y \le 0]) \le f_+(x,y)$$

với mọi $x \in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y \in Y$.

Chứng minh

Giả sử tồn tại $x \in B_{\delta/2}(\bar{x})$ thỏa $f_+(x,y) < \tau d(x, [f_y \le 0])$. Khi đó theo Mệnh đề 3.1, tồn tại $\hat{u}$ sao cho $f(\hat{u}, y) < \tau d(\hat{u}, [f_y \le 0])$, $f(\hat{u}, y) \le f(x,y)$, $d(\hat{u}, x) < d(x, [f_y \le 0])$, $|\nabla_{\hat{u}} f|(\hat{u}, y) < \tau$. Điều này mâu thuẫn vì $d(\hat{u}, \bar{x}) \le d(\hat{u}, x) + d(x, \bar{x}) < \delta$. ∎

Định lý 3.1

Cho X là không gian mêtric đủ, và $\varphi \in \mathcal{C}$. Giả sử $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục dưới, và $\bar{x} \in [f_y \le 0]$ với mỗi $y \in Y$. Nếu tồn tại $\delta > 0$ thoả $\varphi'(f(x,y)) |\nabla_x f|(x,y) \ge 1$ với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$ và $y \in Y$ thoả $\varphi(f(x,y)) < d(x, [f_y \le 0])$, thì

$$d(x, [f_y \le 0]) \le \varphi(f_+(x,y))$$

với mọi $x \in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y \in Y$.

Chứng minh

Áp dụng Bổ đề 2.6 (i) và Hệ quả 3.1 với $\varphi \circ f$ thay cho f và $\tau = 1$. ∎

Mệnh đề 3.2

Cho X là không gian Asplund, $x \in [f_y > 0]$, và $\tau > 0$. Giả sử $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục dưới tại x. Nếu $\|x^*\| \ge \tau$ với mọi $u \in X$ thỏa $f(u,y) < \mu$, $f(u,y) < \tau d(u, [f_y \le 0])$, $\|u - x\| d(x, [f_y \le 0])$, và $x^* \in \partial_u^F f(u,y)$, thì $[f_y \le 0] \ne \emptyset$ và

$$\tau d(x, [f_y \le 0]) \le f_+(x,y).$$

Chứng minh

Giả sử $f_+(x,y) < \tau d(x, [f_y \le 0])$. Theo Mệnh đề 3.1, tồn tại $\hat{u} \in X$ thỏa $f(\hat{u}, y) < \mu, \|\hat{u} - x\| < d(x, [f_y \le 0])$, $f(\hat{u}, y) < \tau d(\hat{u}, [f_y \le 0])$, và $|\nabla_{\hat{u}} f|(\hat{u}, y) < \tau$. Chọn $\hat{\tau} \in (0, \tau)$ sao cho $f(\hat{u}, y) < \hat{\tau} d(\hat{u}, [f_y \le 0])$ và $|\nabla_{\hat{u}} f|(\hat{u}, y) < \hat{\tau}$. Khi đó $f(\hat{u}, y) \le f(u,y) + \|u - \hat{u}\|$ với mọi u gần $\hat{u}$. Nói cách khác, $\hat{u}$ là điểm cực tiểu địa phương của hàm: $f(\cdot, y) + \hat{\tau} \|\cdot - \hat{u}\|$. Theo Bổ đề 2.2, dưới vi phân Fréchet của hàm số này tại $\hat{u}$ nó tại điểm này chứa 0. Chọn $\varepsilon > 0$ sao cho

$$\varepsilon < \min\left\{\begin{matrix} \mu - f(\hat{u}, y), d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right) - \|\hat{u} - x\|, \\ \tau - \hat{\tau}, \dfrac{\tau - \hat{\tau}}{1 + \tau} d\left(\hat{u}, \left[f_y \leq 0\right]\right) \end{matrix}\right\}$$

Áp dụng Bổ đề 2.3 và 2.4, ta tìm được $\hat{x}, x' \in B_\varepsilon(\hat{u})$, và $x^* \in \partial_x^F f(\cdot, y)(\hat{x})$, $x'^* \in \hat{\tau}\,\partial \parallel \hat{u} - \cdot \parallel (\hat{x}')$ thoả $|f(\hat{x}, y) - f(\hat{u}, y)| < \varepsilon$ và $\|x^* + x'^*\| < \varepsilon$. Khi đó, $\|x'^*\| \leq \hat{\tau}$, $\|\hat{x} - x\| < d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right)$, $f(\hat{x}, y) < \mu$, và $\|x^*\| < \hat{\tau} + \varepsilon < \tau$, điều này mâu thuẫn với giả thiết vì

$$\begin{aligned} f(\hat{x}, y) &< f(\hat{u}, y) + \varepsilon < \hat{\tau} d\left(\hat{u}, \left[f_y \leq 0\right]\right) + \varepsilon \\ &< (\hat{\tau} - \tau) d\left(\hat{u}, \left[f_y \leq 0\right]\right) + \varepsilon(1 + \tau) \\ &\quad + \tau d\left(\hat{x}, \left[f_y \leq 0\right]\right) \\ &< \tau d\left(\hat{x}, \left[f_y \leq 0\right]\right). \end{aligned}$$ ■

Hệ quả 3.2

Cho X là không gian Asplund, và $\tau > 0$. Giả sử $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục dưới, và $\bar{x} \in \left[f_y \leq 0\right]$ với mỗi $y \in Y$. Nếu tồn tại $\delta > 0$, $\mu > 0$ sao cho $\|x^*\| \geq \tau$ với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$, $y \in Y$ thỏa $f(x, y) < \tau d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right)$ và $x^* \in \partial_x^F f(x, y)$ thì

$$\tau d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right) \leq f_+(x, y)$$

với mọi $x \in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y \in Y$.

Chứng minh

Giả sử tồn tại $x \in B_{\frac{\delta}{2}}(\bar{x})$ sao cho $f_+(x, y) < \tau d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right)$. Theo Mệnh đề 3.2, tồn tại $\hat{u} \in X$ sao cho $f(\hat{u}, y) < \tau d\left(\hat{u}, \left[f_y \leq 0\right]\right)$, $f(\hat{u}, y) < \mu$, $d(\hat{u}, x) \leq d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right)$, $\|x^*\| < \mu$ với mọi $x^* \in \partial_{\hat{u}}^F f(\hat{u}, y)$. Điều này mâu thuẫn vì $\hat{u} \in [0 < f_y < \mu]$ và $\|\hat{u} - \bar{x}\| \leq \|\hat{u} - x\| + \|x - \bar{x}\| \leq \delta$. ■

Định lý 3.2

Cho X là không gian Asplund, và $\varphi \in \mathcal{C}$. Giả sử $f(\cdot, y)$ là nửa liên tục dưới, và $\bar{x} \in \left[f_y \leq 0\right]$ với mỗi $y \in Y$. Nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\varphi'\left(f(x, y)\right)\|x^*\| \geq 1$ với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$, $y \in Y$, $\varphi\left(f(x, y)\right) < d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right)$, và $x^* \in \partial_x^F f(x, y)$ thì

$$d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right) \leq \varphi\left(f_+(x, y)\right)$$

với mọi $x \in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y \in Y$.

Chứng minh

Áp dụng Bổ đề 2.6 (ii) và Hệ quả 3.2 với $\varphi \circ f$ thay cho f và $\tau = 1$. ■

4. ĐIỀU KIỆN CẦN CHO CẬN SAI SỐ

Mệnh đề 4.1

Cho X là không gian mêtric, $x \in \left[f_y > 0\right]$, và $\tau > 0$. Giả sử $\tau d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right) \leq f(x, y)$.

(i) $|\nabla_x f|^\circ(x, y) \geq \tau$.

(ii) Nếu X là không gian định chuẩn, và $f(\cdot, y)$ là lồi với mọi $y \in Y$, thì $d\left(0, \partial_x f(x, y)\right) \geq \tau$.

Chứng minh

(i) Lấy bất kỳ $\tau' \in (0, \tau)$. Ta có

$$\tau' d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right) < \tau d\left(x, \left[f_y \leq 0\right]\right) \leq f(x, y).$$

Khi đó, tồn tại $x' \in [f_y \leq 0]$ thỏa $\tau' d(x, x') < f(x, y)$, điều này kéo theo

$$\tau' < \frac{f(x, y)}{d(x, x')} \leq \frac{f(x, y) - f(x', y)}{d(x, x')} \leq |\nabla_x f|^\circ(x, y).$$

Cho $\tau' \to \tau$, ta được điều phải chứng minh.

(ii) được suy ra từ (i) và Bổ đề 2.5. ■

Hệ quả 4.1

Giả sử X là không gian mêtric, và $\bar{x} \in \left[f_y \leq 0\right]$ với mọi $y \in Y$.

(i) Nếu f có cận sai số tại $\bar{x}$ thì tồn tại $\delta > 0$ và $\tau > 0$ sao cho $|\nabla_x f|^\circ(x, y) \geq \tau$ với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$ và $y \in Y$ với $f(x, y) > 0$.

(ii) Nếu X là không gian định chuẩn, và $f(\cdot, y)$ là lồi trên X với mọi $y \in Y$. Nếu f có cận sai số tại $\bar{x}$ thì tồn tại $\delta > 0$ và $\tau > 0$ sao cho

$$|\nabla_x f|(x, y) = d\left(0, \partial_x f(x, y)\right) \geq \tau$$

với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$ và $y \in Y$ với $f(x, y) > 0$.

Định lý 4.1

Cho X là không gian định chuẩn, $\varphi \in \mathcal{C}$, và $\bar{x} \in \left[f_y \leq 0\right]$ với mọi $y \in Y$. Giả sử $f(\cdot, y)$ và φ là lồi. Nếu f có φ-cận sai số tại $\bar{x}$ thì tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\varphi'\left(f(x, y)\right) d\left(0, \partial_x f(x, y)\right) \geq 1$ với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$ và $y \in Y$ với $f(x, y) > 0$.

Chứng minh

Được suy ra trực tiếp từ Hệ quả 4.1 với $\varphi \circ f$ thay cho f. ■

5. TÍNH CHÍNH QUY MÊTRIC PHI TUYẾN CỦA ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Định nghĩa 5.1 (Cuong & Kruger, 2021)

Cho X, Y là các không gian mêtric, $F : X \rightrightarrows Y$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}F$, và $\varphi \in \mathcal{C}$. Ánh xạ F được gọi là có tính φ-chính quy mêtric tại $(\bar{x}, \bar{y})$ nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho

$$d\big(x, F^{-1}(y)\big) \leq \varphi(d\big(y, F(x)\big)$$

với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$ và $y \in B_\delta(\bar{y})$.

Hệ quả 5.1

Cho X là không gian mêtric đủ, Y là không gian mêtric, $F : X \rightrightarrows Y$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}F$, $\varphi \in \mathcal{C}$, và $\delta > 0$. Giả sử $d\big(y, F(\cdot)\big)$ là hàm nửa liên tục dưới, và $(\bar{x}, y) \in \mathrm{gph}F$ với mỗi $y \in B_{\delta/2}(\bar{y})$. Nếu

$$\varphi'(d\big(y, F(x)\big)\big|\nabla_x d\big(y, F(x)\big)\big|(x, y) \geq 1$$

với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$, $y \in B_{\delta/2}\,(\bar{y})$ với $\varphi((y, F(x))) < d\big(x, F^{-1}(y)\big)$ thì

$$d\big(x, F^{-1}(y)\big) \leq \varphi(d\big(y, F(x)\big)$$

với mọi $x \in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y \in B_{\delta/2}(\bar{y})$.

Chứng minh

Với mỗi $y \in Y$, xét $f(\cdot, y) = d\big(y, F(\cdot)\big)$. Ta có

$$\begin{aligned}\big[f_y \leq 0\big] &= \{x \in X | f(x, y) \leq 0\}\\ &= \{x \in X | d(y, F(x)) \leq 0\}\\ &= \big\{x \in X \big| d\big(y, F(x)\big) = 0\big\}\\ &= F^{-1}(y).\end{aligned}$$

Khi đó Hệ quả 5.1 được suy ra từ Định lý 3.1 ■

Hệ quả 5.2

Cho X là không gian Asplund, Y là không gian mêtric, $F : X \rightrightarrows Y$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}F$, $\varphi \in \mathcal{C}$, và $\delta > 0$. Giả sử $d\big(y, F(\cdot)\big)$ là hàm nửa liên tục dưới, và $(\bar{x}, y) \in \mathrm{gph}F$ với mỗi $y \in B_{\delta/2}\,(\bar{y})$. Nếu $\varphi'(d(y, F(x)))\|x^*\| \geq 1$ với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$, $y \in B_{\delta/2}\,(\bar{y})$ với $\varphi((y, F(x))) < d\big(x, F^{-1}(y)\big)$, và $x^* \in \partial_x^F d(y, F(x))$ thì

$$d\big(x, F^{-1}(y)\big) \leq \varphi(d\big(y, F(x)\big)$$

với mọi $x \in B_{\delta/2}(\bar{x})$ và $y \in B_{\delta/2}(\bar{y})$.

Chứng minh

Kết quả được suy ra từ Định lý 3.2 với $f(\cdot, y) \coloneqq d\big(y, F(\cdot)\big)$. ■

Nhận xét 5.1

Hệ quả 4.1 và 4.2 trong Cường và cộng sự (2022) là trường hợp đặc biệt của Hệ quả 5.1 và 5.2 khi $\varphi(t) \coloneqq \tau^{-1}t^q$ $(\tau > 0, q > 0)$.

Hệ quả 5.3

Cho X, Y là các không gian định chuẩn, $F : X \rightrightarrows Y$, $(\bar{x}, \bar{y}) \in \mathrm{gph}F$, $\varphi \in \mathcal{C}$, và $\delta > 0$. Giả sử $d\big(y, F(\cdot)\big)$, φ là lồi, và $(\bar{x}, y) \in \mathrm{gph}F$ với mọi $y \in B_\delta(\bar{y})$. Nếu F có tính φ-chính quy mêtric tại $(\bar{x}, \bar{y})$ với hằng số δ, thì

$$\varphi'(d\big(y, F(x)\big)d\left(0, \partial_x d\big(y, F(x)\big)\right) \geq 1$$

với mọi $x \in B_\delta(\bar{x})$ và $y \in B_\delta(\bar{y})$ thoả $d\big(y, F(x)\big) > 0$.

Chứng minh

Kết quả được suy ra từ Định lý 4.1 với $f(\cdot, y) \coloneqq d\big(y, F(\cdot)\big)$. ■

6. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày các điều cần và đủ cho cận sai số phi tuyến của hàm thực suy rộng chứa tham số dưới dạng độ dốc riêng phần trong không gian nền và dưới vi phân Fréchet riêng phần không gian đối ngẫu. Các kết quả được vận dụng để nghiên cứu điều kiện cần và đủ cho tính chính quy mêtric của ánh xạ đa trị.

LỜI CẢM TẠ

Nghiên cứu được thực hiện bởi sự tài trợ của Trường Đại học Cần Thơ cho đề tài nghiên cứu khoa học cấp cơ sở "Nghiên cứu điều kiện cần và đủ cho hàm số thực suy rộng có cận sai số phi tuyến", mã số: T2023-09.

TÀI LIỆU THAM KHẢO (REFERENCES)

Azé, D., Corvellec, J. N., & Lucchetti, R. E. (2002). Variational pairs and applications to stability in nonsmooth analysis. *Nonlinear Analysis, 49(5, Series A: Theory Methods)*, 643-670. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(01)00129-8

Burke, J. V., & Deng, S. (2009). Weak sharp minima revisited, Part III: error bounds for differentiable convex inclusions. *Mathematical Programming*, 116, 37-56. https://doi.org/10.1007/s10107-007-0130-8

Bolte, J., Nguyen, T. P., Peypouquet, J., & Suter, B. W. (2017). From error bounds to the complexity of first-order descent methods for convex functions. *Mathematical Programming*, *165*(2), 471-507. https://doi.org/10.1007/s10107-016-1091-6

Cuong, N. D., Diem, D. H., Thinh, N. T., Trong, N. M., & Duong, N. M. N. (2022). Necessary conditions for Hölder parametric error bounds. *Can Tho University Journal of Science, 58*, 145-151. 10.22144/ctu.jvn.2022.109 (in Vietnamese)

Cuong, N. D., & Kruger, A. Y. (2021). Transversality properties: primal sufficient conditions. *Set-Valued Variational Analysis*, *29*(2), 221-256. https://doi.org/10.1007/s11228-020-00545-1

Cuong, N. D., & Kruger, A. Y. (2022). Error bounds revisited. *Optimization, 71*(4), 1021-1053. https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2032695

Dao, M. N., & Phan, H. M. (2019). Linear convergence of projection algorithms. *Mathematics of Operations Research*, *44*(2), 715-738. https://doi.org/10.1287/moor.2018.0942

Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *47*, 324-353. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0

Fabian, M. (1989). Subdifferentiability and trustworthiness in the light of a new variational principle of Borwein and Preiss. *Acta Universitatis Carolinae*, *30*, 51-56.

Hoffman, A. J. (1952). On approximate solutions of systems of linear inequalities. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, *49*, 263-265. https://doi.org/10.6028/jres.049.027

Ioffe, A. D. (1979). Regular points of Lipschitz functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, *251*, 61-69. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1979-0531969-6

Jourani, A. (2000). Hoffman's error bound, local controllability, and sensitivity analysis. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *38*(3), 947-970. https://doi.org/10.1137/S0363012998339216

Kruger, A. Y. (2003). On Fréchet subdifferentials. *Journal of Mathematical Sciences*, *116*(3), 3325-3358. https://doi.org/10.1023/A:1023673105317

Luo, X. D., & Luo, Z. Q. (1994). Extension of Hoffman's error bound to polynomial systems. *SIAM Journal on Optimization*, *4*(2), 383-392. https://doi.org/10.1137/0804021.

Li, W. (1997). Abadie's constraint qualification, metric regularity, and error bounds for differential convex inequalities. *SIAM Journal on Optimization, 7*(4), 966-978. https://doi.org/10.1137/S105262349528792