Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.472

TÍNH NỬA LIÊN TỤC DƯỚI CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTOR VÀ ÁP DỤNG VÀO BÀI TOÁN TỐI ƯU VECTOR

Lâm Quốc Anh[1], Nguyễn Thái Anh[2] và Trần Ngọc Tâm[3*]
[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ, Việt Nam*
[2]*Trường THPT Chuyên Nguyễn Bỉnh Khiêm, Vĩnh Long, Việt Nam*
[3]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ, Việt Nam*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): tntam@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 06/04/2024
Sửa bài (Revised): 15/04/2024
Duyệt đăng (Accepted): 17/07/2024

***Title:** Lower semicontinuity of solution maps of vector equilibrium problems and applications to vector optimization problems*

***Author(s):** Lam Quoc Anh[1], Nguyen Thai Anh[2] and Tran Ngoc Tam[1*]*

***Affiliation(s):** [1]Can Tho University, Viet Nam; [2]Nguyen Binh Khiem Gifted High School, Vinh Long province, Viet Nam*

TÓM TẮT

Bài báo xem xét bài toán cân bằng vector phụ thuộc tham số trong không gian vector tô pô Hausdorff. Bằng việc sử dụng các tính chất của hàm vô hướng hoá được xây dựng dựa vào hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty cùng với các điều kiện cũng như kỹ thuật thích hợp khác, các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu bài toán đang xét đã được thiết lập. Kết quả đạt được này là mới và được áp dụng cho bài toán tối ưu vector.

***Từ khoá:** Bài toán cân bằng vector, bài toán tối ưu vector, hàm khoảng cách định hướng, tính nửa liên tục*

ABSTRACT

The paper considers the parametric vector equilibrium problem in the Hausdorff topological vector spaces. By utilizing properties of a scalarizing function constructed based on the Hiriart-Urruty oriented distance function along with appropriate conditions and techniques, sufficient conditions for the lower semicontinuity of the solution maps of the problems under consideration are established. This achieved result is novel and is applicable to vector optimization problems.

***Keywords:** Vector equilibrium problem, vector optimization problems, oriented distance function, semicontinuity*

1. GIỚI THIỆU

Mô hình bài toán cân bằng vector là một dạng thống nhất của nhiều mô hình quan trọng trong lý thuyết tối ưu như: bài toán tối ưu vector, bài toán bất đẳng thức biến phân vector, bài toán bổ trợ vector, bài toán điểm yên ngựa vector,… (Kassay & Rădulescu, 2018). Đã có rất nhiều các công trình nghiên cứu về điều kiện tồn tại nghiệm cho lớp bài toán này và các dạng mở rộng của nó (Hadjisavvas & Schaible, 1993; Ansari et al., 2001; Ding & Park, 2004; Aussel et al., 2017). Tính ổn định nghiệm là một chủ đề quan trọng khác cho lớp bài toán này. Tính chất nửa liên tục, đặc biệt là tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng vector phụ thuộc tham số cũng được nghiên cứu rộng rãi trong thời gian gần đây (Chen et al., 2009; Gong & Yao, 2008; Han & Gong, 2016). Các công trình nghiên cứu về tính nửa liên tục dưới của bài toán cân bằng vector cho thấy phương pháp vô hướng hoá tuyến tính tỏ ra hiệu quả và hữu ích. Tuy nhiên, phương pháp này luôn đòi hỏi thêm các điều kiện như tính lồi theo nón, tính đơn điệu chặt theo nón của hàm mục tiêu. Thậm chí, một số công trình còn sử dụng đến các điều kiện mà ở đó thông tin của tập nghiệm đòi hỏi phải được biết trong lân cận của điểm cần xem xét; chẳng hạn như trong công trình Li et al., (2013). Đây là điều kiện được xem là khó được thoả mãn vì khi nghiên cứu về tính ổn định nghiệm, thông thường ta không có được thông tin đầy đủ về tập nghiệm. Hơn nữa, nếu như ta biết được tập nghiệm của bài toán đang xét thì khi đó ta sẽ kiểm tra trực tiếp tính chất của nghiệm đó được thoả mãn hay không thay vì phải kiểm tra rất nhiều các điều kiện ở dữ liệu của bài toán. Do đó, vô hướng hoá phi tuyến là phương pháp mà có thể vượt qua được bất lợi này. Trong các công trình Sach and Tuan (2013) và Sach and Minh (2013), hàm vô hướng hoá phi tuyến dạng Gerstewitz được xem xét và dùng để nghiên cứu tính nửa liên tục của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng vector.

Từ các quan sát trên, tính nửa liên tục của ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng vector được nghiên cứu trong bài viết thông qua hàm vô hướng hoá dạng hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty. Một cách cụ thể, một hàm vô hướng hoá phi tuyến được xây dựng dựa vào hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty được giới thiệu. Các tính chất hữu ích của hàm vô hướng hoá này được khảo sát và được sử dụng để thiết lập các điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm hữu hiệu cho bài toán cân bằng vector. Cần chú ý thêm rằng, hầu hết các công trình đề cập đều nghiên cứu về tính ổn định nghiệm của nghiệm yếu, nghiệm mạnh của bài toàn cân bằng vector. Trong lý thuyết tối ưu, nghiệm hữu hiệu có ý nghĩa hơn so với nghiệm mạnh và nghiệm yếu vì chúng giải quyết một cách toàn diện các mục tiêu đa dạng và xung đột. Chúng cung cấp một tập hợp các lựa chọn khả thi và thực tế, giúp người ra quyết định có thể thực hiện được các lựa chọn đó mà không gặp phải những khó khăn không cần thiết (Jahn, 2009). Do đó, kết quả đạt được trong bài báo này là có ý nghĩa.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho Y là một không gian định chuẩn. Với $E \subset Y$, ta kí hiệu phần trong, bao đóng, biên và phần bù của E lần lượt là $\text{int}E$, $\text{cl}E$, ∂E và E^c. Tập hợp tất cả các tập con khác rỗng của Y được ký hiệu là $\mathcal{P}(Y)$. Cho các tập hợp $E, E_1, E_2 \in \mathcal{P}(Y)$, ta sử dụng các ký hiệu sau:

$$E_1 + E_2 := \{y_1 + y_2 \mid y_1 \in E_1, y_2 \in E_2\},$$

$$\alpha E := \{\alpha y \mid y \in E\}.$$

Qui ước: $E + \emptyset := \emptyset + E = \emptyset, \alpha\emptyset := \emptyset$ với mọi tập con $E \subset Y$.

Tập con C của Y được gọi là một nón nếu $\alpha C \subset C$ với mọi $\alpha \geq 0$. Nón C được gọi là lồi nếu $C + C \subset C$, là đặc nếu $\text{int } C \neq \emptyset$, là có đỉnh nếu $C \cap (-C) = \{0_Y\}$, là chính thường nếu $\{0_Y\} \neq \text{cl}C \neq Y$.

Trong không gian Y được trang bị nón lồi C, ta định nghĩa một tiền thứ tự $\leq_C$, tức là một quan hệ có tính phản xạ ($y \leq_C y$ với mọi $y \in Y$) và có tính bắc cầu (nếu $y_1 \leq_C y_2, y_2 \leq_C y_3$ thì $y_1 \leq_C y_3$), sinh ra bởi nón C như sau:

Với mọi $y_1, y_2 \in Y$,

$$y_1 \leq_C y_2 :\Leftrightarrow y_2 - y_1 \in C.$$

Nếu C là đặc thì ta có định nghĩa sau:

$$y_1 \leq_{\text{int } C} y_2 :\Leftrightarrow y_2 - y_1 \in \text{int}C.$$

2.1. Mô hình bài toán cân bằng vector phụ thuộc tham số

Xét X, Z là các không gian vector tô pô Hausdorff, A là một tập con compact khác rỗng của X và Λ là một tập con khác rỗng của Z. Xét Y là một không gian định chuẩn và C là một nón lồi đóng có đỉnh và đặt trong Y. Cho $f: A \times A \times \Lambda \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector và $K: \Lambda \rightrightarrows X$ là một ánh xạ đa trị có giá trị khác rỗng. Bài toán cân bằng vector phụ thuộc tham số được phát biểu như sau:

PVEP: Tìm $x_0 \in K(\lambda)$ sao cho

$$f(x_0, y, \lambda) \notin -C \setminus \{0_Y\}, \forall y \in K(\lambda).$$

Định nghĩa 2.1. Điểm $x_0 \in K(\lambda)$ được gọi là

(a) *một nghiệm hữu hiệu* của PVEP nếu:

$$f(x_0, y, \lambda) \notin -C \setminus \{0_Y\}, \forall y \in K(\lambda).$$

(b) *một nghiệm yếu* của PVEP nếu:

$$f(x_0, y, \lambda) \in Y \setminus -\text{int } C, \forall y \in K(\lambda).$$

(c) *một nghiệm mạnh* của PVEP nếu:

$$f(x_0, y, \lambda) \in Y \setminus -C, \forall y \in K(\lambda).$$

Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, ta ký hiệu bởi $S(\lambda), S^w(\lambda)$ và $S^s(\lambda)$ lần lượt là các tập nghiệm hữu hiệu, tập nghiệm yếu và tập nghiệm mạnh của bài toán PVEP.

2.2. Tính liên tục, tính lõm của ánh xạ và các dạng mở rộng

Định nghĩa 2.2. (Aubin & Frankowska, 2009) Cho $Q: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó:

(a) Q được gọi là nửa liên tục trên tại x_0 nếu với mọi lân cận U của $Q(x_0)$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $Q(x) \subset U$ với mọi $x \in N$.

(b) Q được gọi là nửa liên tục dưới tại x_0 nếu với bất kỳ tập con mở U của Y thoả mãn $Q(x_0) \cap U \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $Q(x) \cap U \neq \emptyset$ với mọi $x \in N$.

(c) Q được gọi là liên tục tại x_0 nếu nó vừa nửa liên tục trên, vừa nửa liên tục dưới tại x_0.

Bổ đề 2.1. (Hu & Papageorgiou, 1997) *Các khẳng định sau đây là tương đương:*

(i) *Q là nửa liên tục dưới tại x_0.*

(ii) *Với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và $y_0 \in Q(x_0)$, tồn tại $y_n \in Q(x_n)$ sao cho $y_n \to y_0$.*

(iii) *Với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0, ta có $Q(x_0) \subset \mathrm{liminf} Q(x_n)$, trong đó*

$$\mathrm{liminf} Q(x_n) := \{y_0 \in Y \mid \exists y_n \in Q(x_n), y_n \to y_0\}.$$

Bổ đề 2.2. (Hu & Papageorgiou, 1997) *Nếu $Q(x_0)$ là compact thì Q là nửa liên tục trên tại x_0 nếu và chỉ nếu với bất kỳ dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và với mọi $y_n \in Q(x_n)$, tồn tại một dãy con $\{y_{n_k}\}$ của $\{y_n\}$ hội tụ về $y_0 \in Q(x_0)$.*

Ta nói rằng Q có một tính chất nào đó trên tập con Ξ của X nếu nó có tính chất đó tại mọi điểm x thuộc Ξ.

Định nghĩa 2.3. (Alleche, 2014) Cho $g: X \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector và Ω là một tập con lồi của X. Ta nói rằng:

(a) g là C-lõm trên Ω nếu với mọi $x_1, x_2 \in \Omega$ và $t \in [0,1]$, thì

$$tg(x_1) + (1-t)g(x_2) \leq_C g(tx_1 + (1-t)x_2).$$

(b) g là C-lõm chặt trên Ω nếu với mọi $x_1, x_2 \in \Omega, x_1 \neq x_2$ và $t \in (0,1)$, thì

$$tg(x_1) + (1-t)g(x_2) \leq_{\mathrm{int}C} g(tx_1 + (1-t)x_2).$$

(c) g là C-tựa lõm trên Ω nếu với mọi $x_1, x_2 \in \Omega$ và $t \in [0,1]$, thì

$$g(x_1) \leq_C g(tx_1 + (1-t)x_2),$$

hoặc

$$g(x_2) \leq_C g(tx_1 + (1-t)x_2).$$

(d) g là C-tựa lõm nửa chặt trên Ω nếu với mọi $x_1, x_2 \in \Omega$ với $g(x_1) \neq g(x_2)$ và $t \in (0,1)$, thì

$$g(x_1) \leq_{\mathrm{int}C} g(tx_1 + (1-t)x_2),$$

hoặc

$$g(x_2) \leq_{\mathrm{int}C} g(tx_1 + (1-t)x_2).$$

(e) g là C-tựa lõm tường minh trên Ω nếu nó vừa C-tựa lõm vừa C-tựa lõm nửa chặt trên Ω.

Chú ý 2.1. Trong trường hợp $Y = \mathbb{R}$ và $C = \mathbb{R}_+$ thì các khái niệm ở Định nghĩa 2.3 ở trên quy về các khái niệm cổ điển tương ứng của hàm có giá trị thực (Ansari et al., 2018).

Với mỗi $y \in Y$ và tập con $D \subset Y$, khoảng cách từ y đến D là $d(y, D) := \inf_{x \in D} \| x - y \|$, ở đây ta qui ước $d(y, \emptyset) := +\infty$.

2.3. Hàm vô hướng hoá

Định nghĩa 2.4. (Hiriart-Urruty, 1979) Hàm khoảng cách định hướng $\delta_D: Y \to \overline{\mathbb{R}}$ được định nghĩa như sau:

$$\delta_D(y) := d(y, D) - d(y, Y \setminus D), \forall\, y \in Y.$$

Bổ đề 2.3. (Zaffaroni, 2003) *Các phát biểu sau đây là đúng:*

(i) *$\delta_D(y) \in \mathbb{R}$ với mọi $y \in Y$ và δ_D là liên tục Lipschitz với hằng số Lipschitz bằng 1;*

(ii) *Nếu D là lồi thì δ_D là hàm lồi;*

(iii) *$\delta_D(y) < 0 \Leftrightarrow y \in intD$;*

(iv) *$\delta_D(y) = 0 \Leftrightarrow y \in \partial D$;*

(v) *$\delta_D(y) > 0 \Leftrightarrow y \notin clD$;*

(vi) *Nếu D là nón thì δ_D là hàm thuần nhất dương, tức là, $\delta_D(\lambda y) = \lambda \delta_D(y)$ với mọi $\lambda > 0$ và mọi $y \in Y$;*

(vii) *Nếu A, B là các tập con khác rỗng của Y, và $A \subset B$ thì $\delta_B(y) \leq \delta_A(y), \forall y \in Y$;*

(viii) *Nếu C là nón lồi thì δ_{-C} là hàm C-tăng, tức là,*

$$y_1 \leq_C y_2 \Longrightarrow \delta_{-C}(y_1) \leq \delta_{-C}(y_2);$$

Hơn nữa, nếu C là nón lồi và đặc thì

$$y_1 \leq_{\mathrm{int}C} y_2 \Longrightarrow \delta_{-C}(y_1) < \delta_{-C}(y_2),$$

(ix) *$\delta_{-C}(y_1 + y_2) \leq \delta_{-C}(y_1) + \delta_{-C}(y_2), \forall y_1, y_2 \in Y$;*

(x) *Nếu C là nón lồi đặc thì $\delta_{-C}(y) = \delta_{-intC}(y)$;*

(xi) *Nếu D là tập lồi thì $\delta_{clD}(y) = \delta_D(y)$;*

(xii) *$\delta_D(-y) = \delta_{-D}(y)$.*

Ta xét hàm số $\varphi: A \times A \times \Lambda \to \overline{\mathbb{R}}$ được xác định bởi, với mọi $(x, y, \lambda) \in A \times A \times \Lambda$,

$$\varphi(x, y, \lambda) := \delta_{-C}(f(x, y, \lambda)),$$

và hàm số $\Phi: A \times \Lambda \to \overline{\mathbb{R}}$ xác định bởi, với mọi $(x, \lambda) \in A \times \Lambda$,

$$\Phi(x,\lambda) := \inf_{y\in K(\lambda)} \varphi(x,y,\lambda)$$
$$= \inf_{y\in K(\lambda)} \delta_{-C}\big(f(x,y,\lambda)\big).$$

Kết quả sau đây được suy ra trực tiếp từ định nghĩa.

Bổ đề 2.4. *Hàm số φ liên tục trên $A \times A \times \Lambda$ nếu f liên tục trên $A \times A \times \Lambda$.*

Bổ đề 2.5. *Giả sử rằng*

(i) *K liên tục và có giá trị compact khác rỗng trên Λ;*

(ii) *f liên tục trên $A \times A \times \Lambda$.*

Khi đó, hàm số Φ liên tục trên $A \times \Lambda$.

Chứng minh: Với mọi $x \in A$ và $\lambda \in \Lambda$, ta có

$$\Phi(x,\lambda) := \inf_{y\in K(\lambda)} \varphi(x,y,\lambda))$$
$$= \inf_{y\in K(\lambda)} \delta_{-C}(f(x,y,\lambda))$$
$$= -\sup_{y\in K(\lambda)} (-\delta_{-C}(f(x,y,\lambda)).$$

Áp dụng kết quả của Bổ đề 2.4. và Mệnh đề 24 trong Aubin and Ekeland (2006), ta suy ra được tính liên tục của Φ. ■

Bổ đề 2.6. *Nếu f là C-tựa lõm tường minh theo thành phần thứ nhất trên A thì Φ cũng tựa lõm tường minh theo thành phần thứ nhất trên A.*

Chứng minh:

+ Chứng minh tính tựa lõm của Φ: Với mọi $y \in A$ và $\lambda \in \Lambda$, lấy bất kì $x_1, x_2 \in A$ và $t \in [0,1]$, từ tính C-tựa lõm của $f(\cdot, y, \lambda)$ ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $f(x_1, y, \lambda) \leq_C f((1-t)x_1 + tx_2, y, \lambda)$. Sử dụng tính chất (viii) của Bổ đề 2.3. ta được:

$$\delta_{-C}\big(f(x_1,y,\lambda)\big) \leq \delta_{-C}(f((1-t)x_1 + tx_2, y, \lambda)).$$

Suy ra:

$$\inf_{y\in K(\lambda)} \delta_{-C}\big(f(x_1,y,\lambda)\big) \leq \inf_{y\in K(\lambda)} \delta_{-C}\Big(f\big((1-t)x_1 + tx_2, y, \lambda\big)\Big).$$

Điều này tương đương với

$$\Phi(x_1,\lambda) \leq \Phi((1-t)x_1 + tx_2, \lambda).$$

Trường hợp 2: $f(x_2, y, \lambda) \leq_C f((1-t)x_1 + tx_2, y, \lambda)$, bằng cách lập luận tương tự như trường hợp 1, ta cũng đạt được:

$$\Phi(x_2, y, \lambda) \leq \Phi((1-t)x_1 + tx_2, y, \lambda).$$

Do đó, tính C-tựa lõm của Φ đã được chứng minh:

+ Chứng minh tính C-tựa lõm nửa chặt của Φ: được thực hiện tương tự như chứng minh tính C-tựa lõm của Φ. ■

3. TÍNH NỬA LIÊN TỤC DƯỚI

Trong mục này, chúng ta khảo sát tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm cho bài toán (PVEP). Trước tiên, các dạng biểu diễn vô hướng của các ánh xạ nghiệm hữu hiệu mạnh và hữu hiệu yếu thông qua hàm vô hướng hóa Φ được xem xét

Bổ đề 3.1. Với mọi $\lambda \in \Lambda$, ta có:

(i) $S^s(\lambda) = \{x \in K(\lambda) \mid \Phi(x,y,\lambda) > 0, \forall y \in K(\lambda)\}$;

(ii) $S^w(\lambda) = \{x \in K(\lambda) \mid \Phi(x,y,\lambda) \geq 0,\ \forall y \in K(\lambda)\}$.

Chứng minh: (i) Ta có:

$$S^s(\lambda)$$
$$= \{x \in K(\lambda) \mid f(x,y,\lambda) \in Y \backslash -\mathrm{C}, \forall y \in K(\lambda)\}$$
$$= \{x \in K(\lambda) \mid f(x,y,\lambda) \notin -\mathrm{C}, \forall y \in K(\lambda)\}$$
$$= \{x \in K(\lambda) \mid f(x,y,\lambda) \notin \mathrm{cl}(-\mathrm{C}), \forall y \in K(\lambda)\}$$

(vì C là đóng)

$$= \{x \in K(\lambda) \mid \delta_{-C}(f(x,y,\lambda)) > 0, \forall y \in K(\lambda)\}$$
$$= \{x \in K(\lambda) \mid \Phi(x,y,\lambda) > 0, \forall y \in K(\lambda)\}.$$

(ii) Chứng minh tương tự (i). ■

Bằng việc sử dụng kết quả về sự biểu diễn vô hướng ở trên, chúng ta thu được các điều kiện cho tính nửa liên tục dưới của bài toán PVEP.

Định lý 3.1. Giả sử rằng:

(i) K liên tục và có giá trị compact khác rỗng trên Λ;

(ii) f liên tục trên $A \times A \times \Lambda$;

(iii) f là C-tựa lõm tường minh theo biến thứ nhất trên A.

Khi đó, ánh xạ nghiệm S là nửa liên tục dưới trong Λ.

Chứng minh: Ta chia chứng minh ra thành 3 bước:

Bước 1: Ta chứng minh ánh xạ S^s là nửa liên tục dưới trên Λ. Giả sử ngược lại, tồn tại $\lambda_0 \in \Lambda$ sao cho S^s là không nửa liên tục dưới tại λ_0. Theo Bổ đề 2.1 thì tồn tại một dãy $\{\lambda_n\}$ dần về λ_0 và một điểm $x_0 \in S^s(\lambda_0)$ sao cho với mọi $x_n \in S^s(\lambda_n), \{x_n\}$ không hội tụ về x_0. Vì $x_0 \in S^s(\lambda_0) \subset K(\lambda_0)$ và K là nửa liên tục dưới trên Λ nên tồn tại một dãy $\{\hat{x}_n\}$ thoả mãn $\hat{x}_n \to x_0$. Khi đó, theo giả thiết phản chứng tồn tại một dãy con $\{\hat{x}_{n_k}\}$ của $\{\hat{x}_n\}$ sao cho $\{\hat{x}_{n_k}\} \notin S^s(\lambda_{n_k})$. Áp dụng Bổ đề 3.1, ta được:

$$\Phi(\hat{x}_{n_k}, \lambda_{n_k}) \leq 0.$$

Sử dụng tính nửa liên tục dưới của Φ (được suy ra từ tính liên tục của f theo Bổ đề 2.5), ta được:

$$\Phi(x_0, \lambda_0) \leq \liminf \Phi(\hat{x}_{n_k}, \lambda_{n_k}) \leq 0.$$

Đây là điều vô lý vì $x_0 \in S^s(\lambda_0)$. Dó đó, S^s là nửa liên tục dưới trong Λ.

Bước 2: Ta chứng minh bao hàm thức sau là đúng:

(1) $S^w(\lambda) \subset \mathrm{cl}S^s(\lambda), \forall \lambda \in \Lambda$.

Lấy bất kỳ $x_0 \in S^w(\lambda)$, $x_1 \in S^s(\lambda)$ và đặt $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ với $t \in (0,1)$. Ta thấy rằng $x_t \to x_0$ khi $t \to 0$. Ta chỉ ra rằng $x_t \in S^s(\lambda)$. Thật vậy, do $x_0 \in S^w(\lambda)$ và $x_1 \in S^s(\lambda)$ nên ta có $\Phi(x_0, \lambda) \geq 0$ và $\Phi(x_1, \lambda) > 0$. Ta xét hai trường hợp.

Trường hợp thứ nhất, $\Phi(x_0, \lambda) = \Phi(x_1, \lambda)$; khi đó $\Phi(x_0, \lambda) = \Phi(x_1, \lambda) > 0$. Sử dụng tính tựa lõm theo thành phần thứ nhất của Φ (được suy ra từ tính C-tựa lõm của f theo biến thứ nhất theo Bổ đề 2.6), ta được:

$$\Phi(x_t, \lambda) \geq \min\{\Phi(x_0, \lambda), \Phi(x_1, \lambda)\} > 0.$$

Trường hợp thứ hai, $\Phi(x_0, \lambda) \neq \Phi(x_1, \lambda)$, ta lại sử dụng tính tựa lõm nửa chặt của Φ (được suy ra từ tính C-tựa lõm nửa chặt của f theo Bổ đề 2.6), ta cũng được $\Phi(x_t, \lambda) > \min\{\Phi(x_0, \lambda), \Phi(x_1, \lambda)\} \geq 0$. Cả hai trường hợp ta đều được $x_t \in S^s(\lambda)$; suy ra $x_0 \in \mathrm{cl}S^s(\lambda)$. Tức là, bao hàm thức (1) đã được chứng minh.

Bước 3: Với mỗi $\lambda_0 \in \Lambda$, ta kết luận rằng:

(2) $S(\lambda_0) \subset \mathrm{cl}S^s(\lambda_0) \subset \liminf S^s(\lambda_n)$

$\subset \liminf S(\lambda_n)$.

Thật vậy, bao hàm thức thứ nhất được suy ra từ định nghĩa các tập nghiệm và (1). Bao hàm thức thứ hai đạt được do tính nửa liên tục dưới của S^s và tính đóng của "liminf". Bao hàm thức cuối cùng được suy ra từ định nghĩa của các tập nghiệm.

Các bao hàm thức trong (2) cho phép ta kết luận được tính nửa liên tục dưới của S tại λ_0. Vì tính bất kỳ của λ_0 nên ta đạt được tính nửa liên tục dưới của S trên Λ. Chứng minh kết thúc ở đây. ■

4. ÁP DỤNG

Mục này trình bày ứng dụng các kết quả của Mục 3 vào bài toán tối ưu vector. Xét X, Y, Z, A, Λ, K giống như ở Mục 2 và $h: X \times \Lambda \to Y$ là một ánh xạ có giá trị vector. Bài toán tối ưu vector phụ thuộc tham số được phát biểu như sau:

PVOP: $\min\{ h(x, \lambda) \mid x \in K(\lambda)\}$.

Điểm $x_0 \in K(\lambda)$ được gọi là một nghiệm hữu hiệu của PVOP nếu:

$$h(y, \lambda) - h(x_0, \lambda) \notin -C\backslash\{0_Y\}, \forall y \in K(\lambda).$$

Kí hiệu tập nghiệm hữu hiệu của PVOP tại λ là $\Pi(\lambda)$.

Hệ quả 4.1. Giả sử rằng:

(i) K là liên tục và có giá trị compact;

(ii) h liên tục trên $A \times A \times \Lambda$;

(iii) h là C-tựa lồi tường minh theo biến thứ nhất trên A.

Khi đó, ánh xạ nghiệm Π là nửa liên tục dưới trong Λ.

Chứng minh: Bằng cách đặt $f(x, y, \lambda) \coloneqq h(y, \lambda) - h(x, \lambda)$, ta thấy PVOP là một trường hợp đặc biệt của PVEP. Do đó, để chứng minh hệ quả này ta chỉ cần kiểm tra tính đúng đắn của các điều kiện của Định lý 3.1. Ta thấy rằng giả thiết (i), (ii) của Định lý 3.1 hiển nhiên được thoả mãn. Đối với giả thiết (iii) của Định lý 3.1, với mỗi $y \in A, \lambda \in \Lambda$ và $t \in [0,1]$ lấy bất kì $x_1, x_2 \in A$, sử dụng tính C-tựa lồi của $h(\cdot, y)$ ta có:

$$\begin{cases} h(x_1, \lambda) \in h(x_t, \lambda) + C \\ h(x_2, \lambda) \in h(x_t, \lambda) + C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(y, \lambda) - h(x_t, \lambda) \in h(y, \lambda) - h(x_1, \lambda) + C \\ h(y, \lambda) - h(x_t, \lambda) \in h(y, \lambda) - h(x_2, \lambda) + C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x_t, y, \lambda) \in f(x_1, y, \lambda) + C \\ f(x_t, y, \lambda) \in f(x_2, y, \lambda) + C' \end{cases}$$

tức là $f(\cdot, y, \lambda)$ là C-tựa lõm. Với mỗi $y \in A, \lambda \in \Lambda$ và $t \in (0,1)$, lấy bất kì $x_1, x_2 \in A$ với $f(x_1, y, \lambda) \neq f(x_2, y, \lambda)$, xét:

$$\begin{cases} f(x_t,y,\lambda) \in f(x_1,y,\lambda) + \text{int}C \\ f(x_t,y,\lambda) \in f(x_2,y,\lambda) + \text{int}C \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(y,\lambda) - h(x_t,\lambda) \in h(y,\lambda) - h(x_1,\lambda) + \text{int}C \\ h(y,\lambda) - h(x_t,\lambda) \in h(y,\lambda) - h(x_2,\lambda) + \text{int}C \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} h(x_1,\lambda) \in h(x_t,\lambda) + \text{int}C \\ h(x_2,\lambda) \in h(x_t,\lambda) + \text{int}C \end{cases}$. Điều này đúng do tính C-tựa nửa lồi chặt của $h(\cdot,\lambda)$. Suy ra, tính C-tựa nửa lồi chặt của f được thoả mãn. Do đó, giả thiết (iii) của Định lý 3.1 cũng được thoả mãn. Hệ quả đã được chứng minh. ■

LỜI CẢM TẠ

Bài báo là sản phẩm của đề tài nghiên cứu khoa học mã số T2023-17, được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO (REFERENCES)

Alleche, B. (2014). On hemicontinuity of bifunctions for solving equilibrium problems. *Advances in Nonlinear Analysis*, *3*(2), 69-80. https://doi.org/10.1515/anona-2013-0030

Ansari, Q. H., Konnov, I. V., & Yao, J. C. (2001). Existence of a solution and variational principles for vector equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *110*(3), 481-492. https://doi.org/10.1023/A:1017581009670

Ansari, Q. H., Köbis, E., & Yao, J. C. (2018). *Vector variational inequalities and vector optimization*. Cham: Springer International Publishing AG. https://doi.org/10.1007/978-3-319-63049-6

Aubin, J. P., & Ekeland, I. (2006). *Applied nonlinear analysis*. Courier Corporation.

Aubin, J. P., & Frankowska, H. (2009). *Set-valued Analysis*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4848-0

Aussel, D., Cotrina, J., & Iusem, A. (2017). An existence result for quasi-equilibrium problems. *Journal of Convex Analysis, 24*(1), 55-66.

Blum, E., & Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Mathematics Student*, *63*,123-145.

Chen, C. R., Li, S. J., & Teo, K. L. (2009). Solution semicontinuity of parametric generalized vector equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*, *45*(2), 309-318. https://doi.org/10.1007/s10898-008-9376-9

Ding, X. P., & Park, J. Y. (2004). Generalized vector equilibrium problems in generalized convex spaces. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *120*(2), 327-353. https://doi.org/10.1023/B:JOTA.0000015687.95813.a0

Jahn, J. (Ed.). (2009). *Vector Optimization*. Berlin: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17005-8_9

Gong, X. H., & Yao, J. C. (2008). Lower semicontinuity of the set of efficient solutions for generalized systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *138*(2), 197. https://doi.org/10.1007/s10957-008-9379-1

Hadjisavvas, N., & Schaible, S. (1993). On strong pseudomonotonicity and (semi) strict quasimonotonicity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *79*, 139-155. https://doi.org/10.1007/BF00941891

Han, Y., & Gong, X. (2016). Semicontinuity of solution mappings to parametric generalized vector equilibrium problems. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *37*(11), 1420-1437. https://doi.org/10.1080/01630563.2016.1216446

Hiriart-Urruty, J. B. (1979). Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces. *Mathematics of Operations Research*, *4*(1), 79-97. https://doi.org/10.1287/moor.4.1.79

Hu, S., & Papageorgiou, N. S. (1997). *Handbook of Multivalued Analysis: Volume I: Theory*. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-6359-4

Kassay, G., & Rădulescu, V. (2018). *Equilibrium problems and Applications*. Academic Press.

Li, S. J., Liu, H. M., Zhang, Y. & Fang, Z. M. (2013). Continuity of the solution mappings to parametric generalized strong vector equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*. *55*, 597–610. https://doi.org/10.1007/s10898-012-9985-1

Sach, P. H., & Tuan, L. A. (2013). New scalarizing approach to the stability analysis in parametric generalized Ky Fan inequality problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *157*, 347-364. https://doi.org/10.1007/s10957-012-0105-7

Sach, P. H., & Minh, N. B. (2013). Continuity of solution mappings in some parametric non-weak vector Ky Fan inequalities. *Journal of Global Optimization*, *57*, 1401-1418. https://doi.org/10.1007/s10898-012-0015-0

Zaffaroni, A. (2003). Degrees of efficiency and degrees of minimality. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *42*(3), 1071-1086. https://doi.org/10.1137/S0363012902411532