Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long
ISSN **1859-2333** | e-ISSN **2815-5599**

DOI:10.22144/ctujos.2024.282

SỰ TỒN TẠI VÀ TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG TÁCH

Trần Ngọc Tâm[1*], Lâm Văn Đầy[2], Nguyễn Quốc Thanh[3] và Nguyễn Chí Thắng[2]
[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Nam Cần Thơ*
[3]*Bộ môn Toán, Trường Đại học FPT Cần Thơ*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): tntam@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 12/01/2024
Sửa bài (Revised): 17/01/2024
Duyệt đăng (Accepted): 24/01/2024

Title: *Existence and upper semicontinuity of solutions of parametric split equilibrium problems*

Author(s): *Tran Ngoc Tam[1*], Lam Van Day[2], Nguyen Quoc Thanh[3] and Nguyen Chi Thang[2]*

Affiliation(s): [1]*Can Tho University;* [2]*Nam Can Tho University;* [3]*FPT University, Can Tho*

TÓM TẮT

Bài báo xem xét bài toán cân bằng tách. Bằng cách sử dụng bổ đề KKM-Fan, các điều kiện tồn tại cho bài toán cân bằng tách được thiết lập. Khi hàm mục tiêu và ánh xạ ràng buộc của các bài toán đang xét bị nhiễu bởi tham số, các điều kiện đủ đảm bảo tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm cũng được nghiên cứu.

Từ khoá: *Bài toán cân bằng tách, bổ đề KKM-Fan, sự tồn tại nghiệm, tính nửa liên tục trên*

ABSTRACT

This paper considers split equilibrium problems. By using the well-known KKM-Fan lemma, existence conditions for the considered problems are established. When the objective functions and the constraint maps of such problems are perturbed by parameters, sufficient conditions under which the solution maps being upper semicontinuous are investigated.

Keywords: *Existence of solutions, KKM-Fan lemma, split equilibrium problems, upper semicontinuity*

1. GIỚI THIỆU

Bài toán cân bằng là một dạng tổng quát cho việc thiết lập và nghiên cứu của rất nhiều bài toán xuất hiện trong toán học lý thuyết và toán học ứng dụng như kinh tế, kỹ thuật, vật lý, y học và một số lĩnh vực khác nữa, xem Kassay and Rădulescu (2018), Bigi et al. (2019). Các chủ đề về bài toán này luôn nhận được sự quan tâm của các nhà toán học, bao gồm điều kiện tồn tại nghiệm, điều kiện ổn định nghiệm, điều kiện đặt chỉnh và các thuật toán tìm nghiệm, xem Anh et al. (2018a, 2018b, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023a, 2023b), Blum and Oettli (1994), Cotrina et al. (2020), Eslamizadeh and Naraghirad (2020), Muu and Oettli (1992), Oyewole and Mewomo (2020), Tam (2022, 2023) và các tài liệu tham khảo trong đó. Bài toán chấp nhận tách lần đầu tiên được giới thiệu trong Censor and Elfying (1994) trong việc mô hình các bài toán ngược xuất phát từ việc khôi phục pha và phục chế hình ảnh trong y học, xem Byrne (2002). Gần đây, mô hình bài toán này được dùng để mô hình hóa điều trị bức xạ có điều chỉnh cường độ và nhiều lĩnh vực khác nữa, xem Byrne (2003), Censor and Segal (2008). Bài báo này nghiên cứu bài toán cân bằng tách với mô hình được phát biểu như sau. Xét X, Y và Λ là các không gian Banach, C và Q lần lượt là các tập con không rỗng của X và Y. Cho $A: X \to Y$ là một toán tử tuyến tính bị chặn, $f: C \times C \to \mathbb{R}$ và $g: Q \times Q \to \mathbb{R}$ là các song hàm phi tuyến. Ta xét bài toán cân bằng tách:

(SEP): Tìm $\bar{x} \in C$ sao cho

$f(\bar{x}, x) \geq 0$ với mọi $x \in C$, và sao cho $\bar{y} := A\bar{x} \in Q$ thoả mãn

$$g(\bar{y}, y) \geq 0 \text{ với mọi } y \in Q.$$

Một trường hợp đặc biệt của (SEP) là bài toán bất đẳng thức biến phân tách (SVIP) được nghiên cứu trong Censor et al. (2012).

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Định nghĩa 2.1. (Xem Aubin & Frankowska, 2009, tr. 38) Cho $Q: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó:

(a) Q được gọi là nửa liên tục trên tại x_0 nếu với mọi lân cận U của $Q(x_0)$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $Q(x) \subset U$ với mọi $x \in N$.

(b) Q được gọi là nửa liên tục dưới tại x_0 nếu với bất kỳ tập con mở U của Y thoả mãn $Q(x_0) \cap U \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $Q(x) \cap U \neq \emptyset$ với mọi $x \in N$.

(c) Q được gọi là liên tục tại x_0 nếu nó vừa nửa liên tục trên, vừa nửa liên tục dưới tại x_0.

(d) Q được gọi là đóng tại x_0 nếu với mọi dãy (x_n, y_n) nằm trong đồ thị gr$Q$ của Q và dần về (x_0, y_0) thì ta có $(x_0, y_0) \in \text{gr}Q$, ở đây gr$Q$ được định nghĩa như sau:

$$\text{gr}Q := \{ (x, y) \in X \times Y \mid y \in Q(x) \}.$$

Bổ đề 2.1. (Xem Hu & Papageorgiou, 1997, tr. 37) *Các khẳng định sau đây là tương đương.*

(i) *Q là nửa liên tục dưới tại x_0.*

(ii) *Với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và $y_0 \in Q(x_0)$, tồn tại $y_n \in Q(x_n)$ sao cho $y_n \to y_0$.*

(iii) *Với mỗi dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0, ta có $Q(x_0) \subset liminf Q(x_n)$, trong đó*

$$\text{liminf} Q(x_n) := \{y_0 \in Y \mid \exists y_n \in Q(x_n), y_n \to y_0\}.$$

Bổ đề 2.2. (Xem Hu & Papageorgiou, 1997, Tr. 41) *Nếu $Q(x_0)$ là compact thì Q là nửa liên tục trên tại x_0 nếu và chỉ nếu với bất kỳ dãy $\{x_n\}$ hội tụ về x_0 và với mọi $y_n \in Q(x_n)$, tồn tại một dãy con $\{y_{n_k}\}$ của $\{y_n\}$ hội tụ về $y_0 \in Q(x_0)$.*

Ta nói rằng Q có một tính chất nào đó trên tập con E của X nếu nó có tính chất đó tại mọi điểm x_0 thuộc A.

Định nghĩa 2.2. (Xem Morgan et al., 2004) Cho $g: X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ là một hàm thực mở rộng. Ta nói rằng:

(i) g là giả liên tục trên tại $x_0 \in X$ nếu

$$[g(x) > g(x_0)] \Longrightarrow [g(x) > \text{limsup} g(x_n), \forall x_n \to x_0].$$

(ii) là giả liên tục dưới tại $x_0 \in X$ nếu

$$[g(x) < g(x_0)] \Longrightarrow [g(x) < \lim\inf g(x_n), \forall x_n \to x_0].$$

(iii) g là giả liên tục $x_0 \in X$ nếu nó vừa là giả liên tục trên vừa là giả liên tục dưới tại $x_0 \in X$.

Từ định nghĩa ta dễ dàng suy ra tính nửa liên tục trên và tính nửa liên tục dưới của một hàm thực mở rộng sẽ suy ra được tính giả liên tục trên và giả liên tục dưới, tương ứng. Ví dụ sau đây chứng tỏ rằng các tính chất giả liên tục là yếu thật sự so với tính nửa liên tục trên và tính nửa liên tục dưới.

Ví dụ 2.1. Xét hàm số $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{nếu } x > 0, \\ 0, & \text{nếu } x = 0, \\ x-1, & \text{nếu } x < 0. \end{cases}$$

Khi đói g là giả liên tục tại 0. Tuy nhiên, g không là nửa liên tục trên và cũng không là nửa dưới tại 0.

Mệnh đề 2.1. (Xem Morgan & Scalzo, 2004) Hàm thực mở rộng $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ là giả liên tục trên X khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_n\}$ và $\{y_n\}$ trong X lần lượt hội tụ về x và y thì ta có

$$[g(y) < g(x)] \Rightarrow [\lim\sup g(y_n) < \lim\inf g(x_n)].$$

Mệnh đề 2.2. (Xem Morgan & Scalzo, 2004) Cho hàm thực mở rộng $g: X \to \overline{\mathbb{R}}$ là giả liên tục trên X. Khi đó các mệnh đề sau đây tương đương với nhau.

(i) g là giả liên tục dưới trên X;

(ii) tập $L_\varepsilon := \{x \in X \mid g(x) \leq \varepsilon, \forall\, \varepsilon \in g(X)\}$ là đóng trong X.

Định nghĩa 2.3. (Xem Kassay & Kolumban , 1996) Cho A và B là các tập khác rỗng. Khi đó, hàm số $f: A \times B \to \mathbb{R}$ được gọi là giống lõm yếu theo biến thứ nhất nếu với mỗi mọi tập con hữu hạn $\{a_1, \dots, a_m\} \subset A, \{b_1, \dots, b_n\} \subset B$, và $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\} \subset \mathbb{R}_+^m$ với $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ thì bất đẳng thức sau đây được nghiệm đúng:

$$\min_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(a_i, b_j) \leq \sup_{a \in A} \min_{1 \leq j \leq n} f(a, b_j).$$

3. SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG TÁCH

Định nghĩa 3.1. (Xem Giannessi, 2013) Cho $\emptyset \neq G \subset X$ và một ánh xạ đa trị $F: G \rightrightarrows X$. Ánh xạ F được gọi là một ánh xạ KKM nếu với mọi tập con hữu hạn $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ của G thì ta có

$$\operatorname{conv}\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \bigcup_{i=1}^{n} F(y_i),$$

ở đây $\operatorname{conv}(E)$ là kí hiệu bao lồi của tập con E.

Bổ đề 3.1. (Xem Fan, 1972)

Giả sử rằng $F: X \rightrightarrows X$ là một ánh xạ KKM có giá trị đóng. Khi đó, nếu tồn tại ít nhất một $y_0 \in X$ sao cho $F(y_0)$ là tập compact thì

$$\bigcap_{y \in X} F(y) \neq \emptyset.$$

Bổ đề 3.2. *Cho C là một tập con compact lồi khác rỗng của X. Giả sử các giả thiết sau được thỏa mãn:*

(i) *với mọi $x \in C,\ f(x,x) = 0$;*

(ii) *với mọi $x \in C, f(\cdot, x)$ là giả liên tục trên trên C;*

(iii) *với mọi $x \in C$, tập $\{y \in C: f(x,y) < 0\}$ là một tập con lồi trong C.*

Khi đó, tập $S := \{x \in C \mid f(x,x') \geq 0, \forall x' \in C\}$ là compact khác rỗng.

Chứng minh Xét ánh xạ đa trị $F: C \rightrightarrows C$ được xác định như sau, với mọi $x' \in C$,

$$F(x') := \{x \in C \mid f(x,x') \geq 0\}.$$

Ta dễ dàng thấy rằng $S = \cap_{x' \in C} F(x')$. Trước hết, ta chứng minh $\cap_{x' \in C} F(x')$ là một tập compact khác rỗng. Hiển nhiên $F(x')$ là tập khác rỗng vì $x' \in F(x')$. Ta chứng minh F là một ánh xạ KKM. Giả sử ngược lại, F không là ánh xạ KKM thì khi đó tồn tại một tập con hữu hạn của $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ của C và $y \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nhưng $\bar{x} \notin F(x_i)$ với mọi i. Do đó, $f(\bar{x}, x_i) < 0$ với mọi i. Vì $\bar{x} \in \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ nên $\bar{x}$ được viết dưới dạng $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ với $t_i \geq 0$ và $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$.

Từ $f(\bar{x}, x_i) < 0$ với mọi i và giả thiết (iii), ta suy ra

$$f\left(\bar{x}, \sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) < 0.$$

Điều này tương đương với $f(\bar{x}, \bar{x}) < 0$. Đây là điều không thể vì nó mâu thuẫn với giả thiết (i). Do đó, F là một ánh xạ KKM.

Lấy $\{x_n\} \subset F(x')$ là một dãy tùy ý hội tụ đến $\bar{x} \in C$. Kết hợp các điều kiện $f(x_n, x') \geq 0$, tính giả liên tục của $f(\cdot, x')$ tại $\bar{x}$ và Mệnh đề 2.2, ta thu được $f(\bar{x}, x') \geq 0$, tức là $\bar{x} \in F(x')$. Do đó, $F(x')$ là tập đóng. Vì C là tập compact và $F(x')$ là tập đóng trong C nên $F(x')$ là tập compact. Vì F là một ánh xạ KKM và có giá compact trong C nên áp dụng bổ đề KKM-Fan, ta được $\cap_{x' \in K} F(x') \neq \emptyset$ hay S khác rỗng. □

Định lí 3.1. *Cho C và Q lần lượt là các tập con compact lồi khác rỗng của X và Y. Giả sử các giả thiết sau được thỏa mãn:*

(i) *với mọi $x \in C,\ f(x,x) = 0$;*

(ii) *với mọi $x \in C,\ f(\cdot, x)$ là giả liên tục trên trong C;*

(iii) *với mọi $x \in C$, tập $\{y \in C: f(x,y) < 0\}$ là một tập con lồi trong C;*

(iv) *Với mỗi tập con compact K của C, ta có $AK \subset Q$;*

(v) *$g(\cdot, y)$ là giả liên tục trên trong Q với mọi $y \in Q$;*

(vi) *g là giống lõm yếu theo biến thứ nhất;*

(vii) *Với mỗi $y_i \in Q, \lambda_i \geq 0, i = 1, \dots, k$ và $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, điều kiện sau được thỏa mãn:*

$$\sup_{y \in AS} \sum_{i=1}^{k} \lambda_i g(y, y_i) \geq 0.$$

Khi đó, bài toán (SEP) có nghiệm.

Chứng minh Từ các giả thiết (i), (ii) và (iii), Theo Bổ đề 3.2, ta có S là một tập compact khác rỗng. Giả sử rằng với mỗi $y \in AS$ thì tồn tại $z \in Q$ thỏa mãn $g(y,z) < 0$. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho $g(y,z) + \varepsilon < 0$. Đặt

$$N_{z,\varepsilon} := \{y \in AS \mid g(y,z) + \varepsilon < 0\}.$$

Ta có $N_{z,\varepsilon}$ là một phủ mở của AS. Vì AS là tập compact nên tồn tại $z_i \in Q$ và $\varepsilon_i > 0$ thỏa mãn

$$AS = \cup_{i=1}^{k} N_{z_i, \varepsilon_i} \qquad (3.1)$$

Chọn $\varepsilon := \min\{\varepsilon_i \mid i = 1, \dots k\}$, ta xét ánh xạ $\Phi: AS \to \mathbb{R}^k$ được xác định như sau

$$\Phi(y) := (g(y, z_1) + \varepsilon, \dots, g(y, z_k) + \varepsilon).$$

Ta khẳng định rằng bao lồi của $\Phi(AS)$ và $\mathrm{int}\mathbb{R}_+^k$ là rời nhau với $\mathrm{int}\mathbb{R}_+^k$ là phần trong của $\mathbb{R}_+^k$. Thật vậy, giả sử rằng tồn tại $y_j \in AS$ và $\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, m$ với $\sum_{j=1}^m \lambda_i = 1$ thoả mãn

$$\sum_{j=1}^m \lambda_i \Phi(y_j) \in \mathrm{int}\mathbb{R}_+^k.$$

Khi đó,

$$\sum_{j=1}^m \lambda_i\big(g(y_i, z_j) + \varepsilon\big) > 0, \forall j = 1, \dots, k.$$

Kết hợp điều này với giả thiết (vi) ta được điều sau đây:

$$\sup_{y\in AS} \min_{1\leq j\leq k} g(y, z_j) > -\varepsilon. \quad (3.2)$$

Theo (3.1), với mỗi $y \in AS$ thì tồn tại $j \in \{1, \dots, k\}$ sao cho $g(y, z_j) + \varepsilon < 0$. Do đó, với mỗi $y \in AS$ ta có $\min_{1\leq j\leq k} g(y, z_j) < -\varepsilon$. Ta có điều mâu thuẫn với (3.2). Do đó,

$$\mathrm{conv}\big(\Phi(AS)\big) \cap \mathrm{int}\mathbb{R}_+^k = \emptyset.$$

Áp dụng định lý tách tập lồi, tồn tại $\delta_j \geq 0, j = 1, \dots k$ sao cho $\sum_{j=1}^k \delta_j = 1$ và

$$\sum_{j=1}^k \delta_j\big(g(y, z_j) + \varepsilon\big) \leq 0, \forall y \in AS.$$

Do đó,

$$\sum_{j=1}^k \delta_j g(y, z_j) \leq -\varepsilon, \forall y \in AS.$$

Đây lại là điều mâu thuẫn với giả thiết (vii). Ta kết thúc chứng minh ở đây. □

4. TÍNH NỬA LIÊN TỤC TRÊN CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG TÁCH

Trong mục này, chúng ta thiết lập điều kiện đủ cho các tính chất định tính của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng tách phụ thuộc tham số bao gồm tính chất nửa liên tục và tính đóng.

Cho các ánh xạ đa trị $C: \Lambda \rightrightarrows X$ và $Q: \Lambda \rightrightarrows Y$, và các hàm số phi tuyến $f: X \times X \times \Lambda \to \mathbb{R}$, $g: Y \times Y \times \Lambda \to \mathbb{R}$. Với mỗi tham số $\lambda \in \Lambda$, ta xét bài toán cân bằng tách phụ thuộc tham số sau đây:

(SEP_λ) Tìm $\bar{x} \in C(\lambda)$ sao cho

$$f(\bar{x}, x, \lambda) \geq 0 \text{ với mọi } x \in C(\lambda)$$

và sao cho $\bar{y} = A\bar{x} \in Q(\lambda)$ thoả mãn

$$g(\bar{y}, y, \lambda) \geq 0 \text{ với mọi } y \in Q(\lambda).$$

Với mỗi $\lambda \in \Lambda$, tập nghiệm của bài toán chứa (SEP_λ) được ký hiệu là $\Omega(\lambda)$, tức là

$$\Omega(\lambda) := \{x \mid x \in S(\lambda) \text{ và } Ax \in T(\lambda)\},$$

với $S: \Lambda \rightrightarrows X$ và $T: \Lambda \rightrightarrows Y$ lần lượt là các ánh xạ đa trị.

Chúng ta giả sử rằng, với mỗi bộ $(x, \lambda) \in X \times \Lambda$ và $(y, \lambda) \in Y \times \Lambda$, lần lượt tồn tại phần tử $\hat{x} \in C(\lambda)$ và $\hat{y} \in Q(\lambda)$, sao cho $f(x, \hat{x}, \lambda) = 0$ và $g(y, \hat{y}, \lambda) = 0$.

Định lý 4.1. *Giả sử họ bài toán $(SEP_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ thỏa mãn các điều kiện sau:*

(i) C là liên tục và có giá trị compact tại $\bar{\lambda}$;

(ii) Q là nửa liên tục dưới và đóng tại $\bar{\lambda}$;

(iii) f và g là các hàm giả liên tục.

Khi đó, ánh xạ nghiệm Ω là nửa liên tục trên tại $\bar{\lambda}$.

Chứng minh Giả sử ngược lại rằng tồn tại một tập mở U chứa $\Omega(\bar{\lambda})$, dãy $\lambda_n \to \bar{\lambda}$ và $x_n \in \Omega(\lambda_n)$ sao cho $x_n \notin U$ với mọi n. Vì C là nửa liên tục trên tại $\bar{\lambda}$ và $C(\bar{\lambda})$ là tập compact, nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $\{x_n\}$ hội tụ về một phần tử x_0 trong $C(\bar{\lambda})$. Chúng ta chứng minh rằng $x_0 \in \Omega(\bar{\lambda})$. Do $x_n \in \Omega(\lambda_n)$, nên ta có

$$\begin{cases} f(x_n, x, \lambda_n) \geq 0, \forall x \in C(\lambda_n), \\ Ax_n \in Q(\lambda_n), \\ g(Ax_n, y, \lambda_n) \geq 0, \forall y \in Q(\lambda_n). \end{cases}$$

Với mỗi $\hat{x} \in C(\bar{\lambda})$, do tính nửa liên tục dưới của C tại $\bar{\lambda}$, tồn tại $\hat{x}_n \in C(\lambda_n)$ hội tụ về $\hat{x}$. Áp dụng tính chất giả liên tục trên của f và sử dụng Mệnh đề 2.2, cùng với bất đẳng thức $f(x_n, x, \lambda_n) \geq 0$ ta thu được $f(x_0, \hat{x}, \bar{\lambda}) \geq 0$. Do $Ax_n \in Q(\lambda_n)$ và Q là đóng tại $\bar{\lambda}$ nên ta có $Ax_0 \in Q(\bar{\lambda})$. Với mỗi $y \in Q(\bar{\lambda})$, tính nửa liên tục dưới của Q tại $\bar{\lambda}$ đảm bảo sự tồn tại của dãy các phần tử $y_n \in Q(\lambda_n)$ sao cho $y_n \to y$. Áp dụng Mệnh đề 2.2, tính giả liên tục trên của g và bất đẳng thức $g(Ax_n, y, \lambda_n) \geq 0$ suy ra rằng $g(Ax_0, y, \bar{\lambda}) \geq 0$. Do đó, $x_0 \in \Omega(\bar{\lambda})$ điều này mâu thuẫn với $x_n \notin U$ với mọi n. Do đó, Ω là nửa liên tục trên tại $\bar{\lambda}$. Định lý được chứng minh xong. □

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã nghiên cứu thành công các điều kiện đủ cho các tính chất định tính của bài toán cân bằng tách, cụ thể là tính khác rỗng của tập nghiệm và tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm khi dữ liệu của bài toán bị nhiễu bởi tham số. Do đó, bài báo cũng đã giải quyết được vấn đề tồn tại và ổn định nghiệm của lớp bài toán cân bằng tách. Đây là những đóng góp mới và có ý nghĩa bởi đối với mô hình đang xét vì các công trình đã có chỉ tập trung nghiên cứu các thuật toán tìm nghiệm. Điều đó chưa xứng đáng với tầm quan trọng của chủ đề về tồn tại và ổn định nghiệm cho lớp bài toán quan trọng này.

LỜI CẢM TẠ

Đây là kết quả của đề tài có mã số B2022-TCT-02, do Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam tài trợ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q., Thanh Duoc, P., & Tam, T. N. (2018a). On Hölder continuity of solution maps to parametric vector primal and dual equilibrium problems. *Optimization*, *67*(8), 1169-1182. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1466298

Anh, L. Q., & Duy, T. Q. (2018b). On penalty method for equilibrium problems in lexicographic order. *Positivity*, *22*, 39-57. https://doi.org/10.1007/s11117-017-0496-7

Anh, L. Q., Quoc, T. Q., & Hien, D. V. (2019). Stability for parametric vector quasi-equilibrium problems with variable cones. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *40*(4), 461-483. https://doi.org/10.1080/01630563.2018.1556688

Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Tam, T. N. (2020). On the stability of approximate solutions to set-valued equilibrium problems. *Optimization*, *69*(7-8), 1583-1599. https://doi.org/10.1080/02331934.2019.1646744

Anh, L. Q., Duoc, P. T., Tam, T. N., & Thang, N. C. (2021). Stability analysis for set-valued equilibrium problems with applications to Browder variational inclusions. *Optimization Letters*, *15*, 613-626. https://doi.org/10.1007/s11590-020-01604-0

Anh, L. Q., Linh, H. M., & Tam, T. N. (2022). Semicontinuity of Solutions and Well-Posedness Under Perturbations for Equilibrium Problems with Nonlinear Inequality Constraints. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, New Series, 751–763. https://doi.org/10.1007/s00574-021-00281-6

Anh, L. Q., Tam, T. N., & Danh, N. H. (2023a). On Lipschitz continuity of approximate solutions to set-valued equilibrium problems via nonlinear scalarization. *Optimization*, *72*(2), 439-461. https://doi.org/10.1080/02331934.2021.1970753

Anh, L. Q., & Duy, T. Q. (2023b). Regularization of vector equilibrium problems. *Optimization Letters*, *17*(3), 699-720. https://doi.org/10.1007/s11590-022-01899-1

Aubin, J. P., & Frankowska, H. (2009). Set-valued analysis. Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4848-0

Blum, E., & Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems, *Mathematics Student*, 63,123-145.

Bigi, G., Castellani, M., Pappalardo, M., & Passacantando, M. (2019). *Nonlinear programming techniques for equilibria*. Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-030-00205-3

Byrne, C. (2002). Iterative oblique projection onto convex sets and the split feasibility problem. Inverse problems, *18*(2), 441. https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/2/310

Byrne, C. (2003). A unified treatment of some iterative algorithms in signal processing and image reconstruction. Inverse problems, *20*(1), 103. https://doi.org/10.1088/0266-5611/20/1/006

Censor, Y., & Elfying, T. (1994). A multiprojection algorithm using Bregman projections in a product space. *Numerical Algorithms*, *8*(2), 221–239. https://doi.org/10.1007/BF02142692

Censor, Y., & Segal, A. (2008). Iterative projection methods in biomedical inverse problems. *Mathematical methods in biomedical imaging and intensity-modulated radiation therapy* (IMRT), 10, 65-96.

Censor, Y., Gibali, A., & Reich, S. (2012). Algorithms for the split variational inequality problem. *Numerical Algorithms*, 59, 301-323. https://doi.org/10.1007/s11075-011-9490-5

Cotrina, J., Théra, M., & Zúñiga, J. (2020). An existence result for quasi-equilibrium problems via Ekeland's variational principle. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *187*(2), 336-355. https://doi.org/10.1007/s10957-020-01764-0

Eslamizadeh, L., & Naraghirad, E. (2020). Existence of solutions of set-valued equilibrium problems in topological vector spaces with applications. *Optimization Letters*, *14*(1), 65-83. https://doi.org/10.1007/s11590-019-01488-9

Fan, K. (1972). A minimax inequality and applications. In Shisha, O. (Eds), *Inequalities III* (pp. 103-113). Academic Press, New York

Giannessi, F. (Ed.). (2013). Vector variational inequalities and vector equilibria: mathematical theories (Vol. 38). Springer Science & Business Media.

Hu, S., & Papageorgiou, N. S. (1997). Handbook of Multivalued Analysis. Volume I: Theory, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands. https://doi.org/10.1007/978-1-4615-6359-4

Kassay, G., & Kolumban, J. (1996). On a generalized sup-inf problem. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *91*(3), 651-670.

Kassay, G., & Rădulescu, V. (2018). *Equilibrium problems and applications*. Academic Press.

Morgan, J., & Scalzo, V. (2004). Pseudocontinuity in optimization and nonzero-sum games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *120*(1), 181-197. https://doi.org/10.1023/B:JOTA.0000012738.90889.5b

Muu, L. D., & Oettli, W. (1992). Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 18*(12), 1159-1166. https://doi.org/10.1016/0362-546X(92)90159-C

Tam, T. N. (2022). On Hölder continuity of solution maps to parametric vector Ky Fan inequalities. *TOP*, *30*(1), 77-94. https://doi.org/10.1007/s11750-021-00602-4

Tam, T. N. (2023). Hölder continuity of solution maps to parametric set-valued Ky Fan inequalities. *Optimization*, Online First. https://doi.org/10.1080/02331934.2022.2122716

Oyewole, O. K., & Mewomo, O. T. (2020). Existence results for new generalized mixed equilibrium and fixed-point problems in Banach spaces. *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, 273-301.