Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần C: Khoa học Xã hội, Nhân văn và Giáo dục
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.390

VẬN DỤNG LÝ THUYẾT KIẾN TẠO XÃ HỘI VÀO DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN LỚP 12

Bùi Anh Kiệt* và Trần Hiếu Phát
Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): bakiet@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 06/01/2024
Sửa bài (Revised): 06/03/2024
Duyệt đăng (Accepted): 11/04/2024

Title: *Using Social constructivist theory in the teaching of solving problems of conditional probability grade 12*

Author(s): *Bui Anh Kiet* and Tran Hieu Phat*

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Lý thuyết kiến tạo xã hội (LTKTXH) được hình thành từ sự tham gia vào xử lý các vấn đề và nhận lại các phản ánh từ xã hội. LTKTXH còn được hình thành thông qua sự tương tác, tranh luận và trao đổi trong cộng đồng. LTKTXH coi kiến thức là sản phẩm của một quá trình kiến tạo, nhưng sự kiến tạo này mang tính xã hội mà không mang tính cá nhân (chủ quan). "Xác suất có điều kiện" là một trong các chủ đề có mối liên hệ mật thiết với các yếu tố xã hội. Nó cũng là một chủ đề mới được Bộ Giáo dục cập nhật vào chương trình dạy học Toán 12, được giảng dạy chính thức vào năm 2024. Do công cụ giảng dạy và nội dung giảng dạy đều có liên quan đến xã hội, nên mô hình dạy học giải bài tập xác suất có điều kiện của chương trình Toán 12 được đề xuất dựa trên cơ sở lý thuyết kiến tạo xã hội. Sau khi trình bày các kiến thức và công thức cơ bản cần dùng trong việc giải các bài tập xác suất có điều kiện, một mô hình dạy học giải bài tập gồm 5 bước dựa trên LTKTXH được đề xuất trong nghiên cứu.

Từ khoá: *Dạy học giải bài tập, lớp 12, lý thuyết kiến tạo xã hội, xác suất có điều kiện*

ABSTRACT

Social constructivist theory is formed from solving problems and receiving feedback from society. Socio-economic integration is also formed through interaction, debate, and exchange winthin the community. Socio-economic integration considers knowledge to be the product of a construction process, but this construction is social and not individual (subjective). "Conditional probability" is one of the topics closely related to social factors. It is also a new topic updated by the Ministry of Education in the Grade 12 Math curriculum, officially taught in 2024. Because the teaching tools and content are related to society. A teaching model for solving conditional probability exercises of the Grade 12 Math program was proposed based on social constructivist theory. After presenting the basic knowledge and formulas needed to solve conditional probability exercises, a 5-step problem-solving teaching model based on socio-economic theory were proposed.

Keywords: *Conditional probability, grade 12, social constructivism, teaching of solving exercises*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

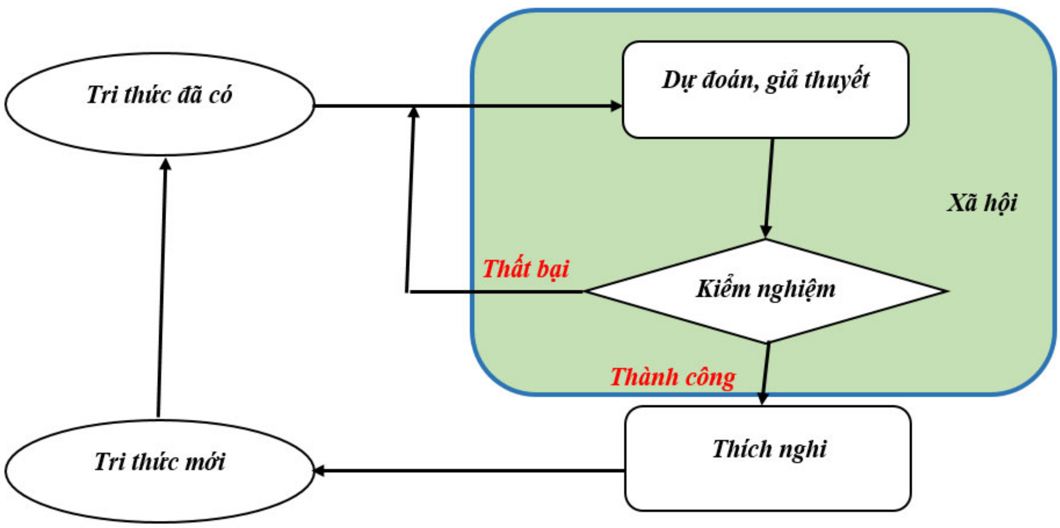
Hiện nay, Việt Nam đang thực hiện nền giáo dục 4.0, tiếp cận các phương pháp dạy học tích cực và sử dụng công nghệ thông tin để làm công cụ hỗ trợ. Bên cạnh đó, Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018) có nhiều thay đổi về nội dung so với chương trình năm 2006. Trong sự đổi mới đó, mảng kiến thức xác suất có điều kiện đã lần đầu tiên (kể từ sau 1975) bắt đầu xuất hiện ở học kỳ 2 trong chương trình môn Toán lớp 12. Xác suất có điều kiện là mảng kiến thức khá mới lạ đối với học sinh lớp 12, sẽ tạo ra một số khó khăn đối với học sinh trong việc tiếp nhận và lĩnh hội được tri thức mới này. Nó cũng gây khó khăn cho học sinh trong việc vận dụng kiến thức vào giải các bài tập và giải quyết các bài toán thực tế liên quan. Để đáp ứng hướng đổi mới phương pháp giảng dạy được thể hiện trong Chương trình Giáo dục phổ thông, Chương trình Tổng thể (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018), Lý thuyết kiến tạo xã hội (LTKTXH) được lựa chọn để làm công cụ nghiên cứu. Dựa trên lý thuyết này, một mô hình dạy học kiến tạo đối với việc tổ chức hoạt động dạy học giải bài tập xác suất có điều kiện được đề xuất trong nghiên cứu.

2. THUYẾT KIẾN TẠO XÃ HỘI

2.1. Sơ lược về thuyết kiến tạo xã hội

Lý thuyết kiến tạo (LTKT) được hình thành chủ yếu dựa vào các công trình nghiên cứu của hai nhà khoa học, những người mà vào đầu thế kỷ XX đã nghiên cứu về sự phát triển của hệ thống tư duy ở trẻ em và thanh thiếu niên. Đó là Piaget, nhà tâm lý học người Thụy sĩ và Bruner, nhà tâm lý học người Mỹ. Các công trình nghiên cứu của hai ông đã mang đến cho chúng ta một quan điểm, một cách nhìn mới về việc học và phương thức tiếp nhận tri thức. LTKT ra đời nhằm phản ứng lại các lý thuyết bẩm sinh và lý thuyết hành vi. LTKT quan tâm đồng thời đến quá trình học và khoa học luận. LTKT được chia thành hai mảng chính, đó là kiến tạo nhận thức *(cognitive constructivism)* và kiến tạo xã hội *(social constructivism)*. Bài báo này sẽ tập trung vào việc nghiên cứu và vận dụng LTKTXH.

LTKTXH hay còn gọi là kiến tạo ngoại sinh được đề xuất bởi nhà giáo dục và tâm lý học người Nga – Lev Vygotsky (1985). Ông cho rằng việc học của con người không chỉ dừng lại ở việc kiến tạo nhận thức mà đồng thời còn được kiến tạo thông qua sự tương tác, tranh luận và trao đổi trong cộng đồng. Quan điểm này không phủ nhận thuyết kiến tạo nhận thức của Piaget (1975) mà bổ sung thêm các mối quan hệ tương tác cũng góp phần tác động mạnh mẽ đến quá trình kiến tạo tri thức con người chứ không hoạt động trong trạng thái cô lập xã hội. Thật vậy, con người ta sinh sống và làm việc luôn trong môi trường có rất nhiều sự hợp tác. LTKTXH nhấn mạnh tầm quan trọng của văn hóa và bối cảnh lịch sử trong việc hiểu những gì đã và đang xảy ra trong xã hội và từ đó xây dựng kiến thức mới dựa trên những hiểu biết này (Thuần, 2017).



Hình 1. Chu trình dạy học theo quan điểm của Thuyết kiến tạo xã hội (Nguyên, 2021)

Dạy học theo LTKTXH là quá trình học sinh giải quyết vấn đề trong môi trường tương tác xã hội, học sinh hiểu được nhiệm vụ mà bản thân phải đối mặt và tin rằng bản thân có năng lực và khả năng sử dụng được công cụ trí tuệ để giải quyết vấn đề gặp phải. Bản chất của việc học là một trong những thử nghiệm và đối thoại, nơi kiến thức được nhìn thấy trong bối cảnh của vấn đề được đặt ra (gặp phải), thảo luận và giải quyết. Mô hình của LTKT nói chung được mô tả qua các bước sau: Tri thức đã có → Dự đoán, giả thuyết → Kiểm nghiệm (Thất bại) → Thích nghi → Tri thức mới → (Tri thức đã có) (Nguyên, 2021).

Nhưng đối với LTKTXH thì vai trò của xã hội sẽ tác động mạnh vào những bước "Dự đoán, giả thuyết và kiểm nghiệm". Vì vậy, chu trình dạy học theo quan điểm kiến tạo xã hội được thể hiện ở Hình 1:

Từ chu trình ở Hình 1, mô hình dạy học giải bài tập xác suất có điều kiện được đề xuất dựa trên LTKTXH. Mô hình này gồm 5 bước sau:

- Bước 1: Đặt vấn đề (giáo viên)
- Bước 2: Giao nhiệm vụ (giáo viên và học sinh)
- Bước 3: Xây dựng hướng giải (giáo viên và học sinh)
- Bước 4: Trình bày lời giải (học sinh)
- Bước 5: Chính xác hóa (giáo viên).

2.2. Xác suất có điều kiện (Kiệt, 2021)

Định nghĩa xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố *A* và *B*. Xác suất của biến cố *A* với điều kiện biến cố *B* đã xảy ra được gọi là *xác suất của A với điều kiện B,* ký hiệu là $\mathrm{P}(A \mid B)$.

Nếu $\mathrm{P}(B)>0$ thì $\mathrm{P}(A \mid B)=\dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$

hay $\mathrm{P}(A)>0$ thì $\mathrm{P}(B \mid A)=\dfrac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(A)}$.

Từ định nghĩa trên, dẫn đến một số kết quả như sau:

+) Nếu $\mathrm{P}(B)>0$ thì $\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A \mid B)$.

+) Nếu A, B là hai biến cố bất kỳ thì $\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A \mid B)$ (1)

Công thức (1) được gọi là công thức nhân xác suất.

+) Với A và B là biến cố bất kỳ với $\mathrm{P}(B)>0$. Ta có: $\mathrm{P}(A \mid B)=\dfrac{n(A \cap B)}{n(B)}$

hay $\mathrm{P}(A)>0$ thì ta có $\mathrm{P}(B \mid A)=\dfrac{n(A \cap B)}{n(A)}$

Chú ý: Mối liên hệ giữa xác suất có điều kiện và biến cố độc lập được biểu diễn qua công thức như sau:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A \mid B)=\mathrm{P}(A \mid \overline{B})$$

và $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}(B \mid \overline{A})$.

2.3. Công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes

2.3.1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A, B với $0<\mathrm{P}(B)<1$, ta có:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(A \cap B)+\mathrm{P}(A \cap \overline{B})\\&=\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A \mid B)+\mathrm{P}(\overline{B}).\mathrm{P}(A \mid \overline{B}).\end{aligned}$$

2.3.2. Công thức Bayes

Cho hai biến cố A, B mà $\mathrm{P}(A)>0, \mathrm{P}(B)>0$, ta có:

$$\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}.$$

Chú ý:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(B \mid A)&=\frac{\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(A)}\\&=\frac{\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A \mid B)}{\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A \mid B)+\mathrm{P}(\overline{B}).\mathrm{P}(A \mid \overline{B})}\end{aligned}$$

3. TỔ CHỨC HOẠT ĐỘNG DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Theo Burrill (2019), xác suất có điều kiện là một trong các chủ đề khó, một chủ đề mà hầu hết học sinh và sinh viên gặp nhiều khó khăn khi tiếp thu. Do đó, việc chuẩn bị cho học sinh và sinh viên tiếp cận chủ đề này với hiệu quả cao đòi hỏi giáo viên phải đầu tư rất nhiều công sức.

Một số tình huống dạy học giải bài tập xác suất có điều kiện được thiết kế dựa trên quy trình 5 bước nói trên (Minh, 2015). Các tình huống sau dựa trên Batanero et al. (2016), Batanero et al. (2018), Đỗ Đức Thái và ctv. (2023).

Tình huống 1

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viên đưa ra bài toán;

Bài 1. Cho hai biến cố A, B có $\mathrm{P}(A)=0,2; \mathrm{P}(B)=0,8; \mathrm{P}(A\cap B)=0,1$. Tính các xác suất sau: $\mathrm{P}(A\,|\,B); \mathrm{P}(B\,|\,A)$.

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên đề nghị học sinh đọc yêu cầu và thảo luận nhóm để đề ra hướng giải quyết bài toán;

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên đặt câu hỏi, gợi mở cho học sinh tìm ra hướng giải bài toán như công thức xác suất của *A* với điều kiện *B* được thể hiện như thế nào? Ngược lại, cho kết quả xác suất của *B* với điều kiện của *A;*

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên yêu cầu học sinh trình bày kết quả thảo luận của nhóm mình lên bảng. Các nhóm khác quan sát và đóng góp ý kiến;

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét và điều chỉnh kết quả trình bày bài giải của học sinh. Câu trả lời mong đợi như sau:

Ta có: $\mathrm{P}(A\,|\,B)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\dfrac{0,1}{0,8}=\dfrac{1}{8}$;

$$\mathrm{P}(B\,|\,A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{0,1}{0,2}=\frac{1}{2}.$$

Bình luận: Bài toán này giúp học sinh thông hiểu về công thức xác suất có điều kiện và cũng giúp học sinh biết thêm về một loại xác suất mới, xác suất của một biến cố bị ảnh hưởng tác động của một biến cố khác đã xảy ra; khác với xác suất cổ điển được học trước đây. LTKTXH thể hiện ở đây là kinh nghiệm sẵn có của học sinh trong kiến thức về xác suất của biến cố tích.

Tình huống 2

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viên đưa ra bài toán, đề bài như sau:

Bài 2. Một hộp có 6 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên lần lượt không hoàn lại hai quả bóng trong hộp. Tìm xác suất để lần lấy thứ hai được quả bóng màu đỏ, biết rằng lần thứ nhất đã lấy được quả bóng màu xanh.

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên yêu cầu học sinh đọc đề bài và thảo luận nhóm để gọi biến cố và xác định công thức để giải bài toán;

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên gợi ý cho học sinh xác định biến cố cần gọi trong bài toán và đặt câu hỏi gợi mở cho học sinh về công thức cần sử dụng.

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên yêu cầu học sinh đại diện nhóm lên bảng trình bày bài giải của nhóm đã thảo luận, các nhóm khác quan sát, đối sánh với bài làm mình và đóng góp ý kiến.

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét và điều chỉnh bài giải của học sinh.

Câu trả lời mong đợi:

Gọi A là biến cố "lần thứ hai lấy được quả bóng màu đỏ"

B là biến cố "lần thứ nhất lấy được quả bóng màu xanh"

Khi đó, xác suất để lần thứ hai lấy được quả bóng màu đỏ, biết rằng lần thứ nhất đã lấy được quả bóng màu xanh, chính là xác suất của A với điều kiện B.

$$\mathrm{P}(B)=\frac{C_6^1.C_4^1+C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{13}{15},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{C_6^1.C_4^1}{C_{10}^2}=\frac{8}{15},$$

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{8}{15}}{\frac{13}{15}}=\frac{8}{13}.$$

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A\,|\,B)=\dfrac{8}{13}$.

Bình luận: Qua bài giải của bài toán giúp học sinh cách thức gọi biến cố của một bài toán xác suất có điều kiện (khác với bài toán xác suất cổ điển như thế nào) và hình thức trình bày một bài giải của bài toán xác suất có điều kiện, xác định được xác suất của biến cố *A* trong điều kiện biến cố *B* đã xảy ra. LTKTXH thể hiện ở đây là kinh nghiệm sẵn có của học sinh trong việc gọi tên biến cố cho phù hợp và xác định được biến cố nào cần tìm xác suất.

Tình huống 3

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viên đặt ra tiếp đề bài toán:

Bài 3. Trong hộp đựng 500 chiếc thẻ cùng loại có 200 chiếc thẻ màu vàng. Mỗi chiếc thẻ màu vàng có ghi một trong năm số: 1, 2, 3, 4, 5. Có 40 chiếc thẻ màu vàng ghi số 5. Chọn ra ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp đựng thẻ. Giả sử chiếc thẻ được chọn ra có màu vàng. Tính xác suất để chiếc thẻ đó ghi số 5.

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên yêu cầu học sinh đọc đề bài toán và thảo luận nhóm để giải quyết bài toán hay là xác định biến cố cần gọi, công thức cần sử dụng.

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên đặt câu hỏi gợi mở cho học sinh xác định biến cố cần gọi và định hướng công thức cần được sử dụng.

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên gọi học sinh lên trình bày sản phẩm thảo luận của nhóm, các nhóm khác quan sát và đóng góp ý kiến.

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét bài giải của học sinh và chính xác hóa bài giải cần đạt đối với yêu cầu bài toán đã đặt ra. Câu trả lời mong đợi:

Gọi A là biến cố "chiếc thẻ được chọn ra ghi số 5"

B là biến cố "chiếc thẻ được chọn ra là màu vàng"

Khi đó, xác suất để chiếc thẻ được chọn ra ghi số 5, biết rằng chiếc thẻ được chọn ra là màu vàng, chính là xác suất của A với điều kiện B.

$$\mathrm{P}(B)=\frac{200}{500}=\frac{2}{5},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{40}{500}=\frac{2}{25},$$

$$\mathrm{P}(A\,|\,B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{2}{5}}=\frac{1}{5}.$$

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(A\,|\,B)=\dfrac{1}{5}.$

Bình luận: Qua bài giải của bài toán giúp học sinh hiểu sâu hơn về cách thức xác định lựa chọn biến cố cần tính xác suất trong điều kiện xảy ra của biến cố nào. Đồng thời cũng giúp học sinh thành thạo hơn trong việc xây dựng lời giải một bài toán xác suất có điều kiện, cũng như xác định đúng công thức cần sử dụng. LTKTXH thể hiện ở đây là kinh nghiệm sẵn có của học sinh trong việc gọi tên biến cố cho phù hợp và xác định được biến cố nào cần tìm xác suất.

Tình huống 4

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viên đặt ra đề bài toán như sau:

Bài 4. Cho hai biến cố A và B có $\mathrm{P}(A)=0,6;\mathrm{P}(B)=0,8;\mathrm{P}(A\cap B)=0,4.$ Tính các xác suất sau:

a) $\mathrm{P}(B\,|\,A);\mathrm{P}(\overline{B}\,|\,A).$

b) $\mathrm{P}(A\cap\overline{B}).$

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên yêu cầu học sinh đọc đề bài toán và thảo luận nhóm để đưa ra hướng giải quyết.

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên đặt câu hỏi gợi ý: $\mathrm{P}(B\,|\,A)$ và $\mathrm{P}(\overline{B}\,|\,A)$ có mối liên hệ gì với nhau không?; $(A\cap\overline{B})$ có bằng với $(\overline{B}\cap A)$ hay không? Từ đó, xác suất của hai biến cố này có bằng nhau không?

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên yêu cầu đại diện nhóm, cử học sinh lên bảng trình bày kết quả thảo luận của nhóm, các nhóm khác quan sát, đối sánh với bài làm của nhóm mình và đóng góp ý kiến.

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét bài làm của nhóm học sinh và chính xác hóa lại bài giải của đề bài bài toán cần đạt. Câu trả lời mong đợi:

a) $\mathrm{P}(B\,|\,A)=\dfrac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\dfrac{0,4}{0,6}=\dfrac{2}{3}$

$$\mathrm{P}(\overline{B}\,|\,A)=1-\mathrm{P}(B\,|\,A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}.$$

b) Ta có: $\mathrm{P}(A\cap\overline{B})=\mathrm{P}(\overline{B}\cap A)$

$$\mathrm{P}(\overline{B}\,|\,A)=\frac{\mathrm{P}(\overline{B}\cap A)}{\mathrm{P}(A)}\Rightarrow\mathrm{P}(\overline{B}\cap A)=\mathrm{P}(A).\mathrm{P}(\overline{B}\,|\,A)$$

$$=0,6.\frac{1}{3}$$

$$=0,2.$$

Bình luận: Qua bài toán này giúp học sinh biết $\mathrm{P}(B \mid A)+\mathrm{P}(\overline{B} \mid A)=1$ và $\mathrm{P}(A \cap \overline{B})=\mathrm{P}(\overline{B} \mid A).P(A)$. Cách thức vận dụng công thức xác suất có điều kiện để giải quyết bài toán, đặc biệt là việc sử dụng công thức vào giải quyết Bài toán 4b. LTKTXH thể hiện ở đây là kinh nghiệm sẵn có của học sinh trong việc sử dụng các công thức xác suất đã được học một cách sáng tạo để giải quyết bài toán đã cho.

Tình huống 5

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viên đặt ra đề bài toán "Bài 5" như sau:

Bài 5. Một hộp có 3 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ. Các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp. Xét các biến cố:

A: "Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ nhất";

B: "Quả bóng màu đỏ được lấy ra ở lần thứ hai". Chứng minh rằng A, B là hai biến cố độc lập.

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên yêu cầu học sinh đọc đề bài và thảo luận nhóm để đưa ra hướng giải.

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên đặt câu hỏi gợi mở cho học sinh tìm hướng giải bài toán: "Hai biến cố độc lập cần thỏa mãn điều gì?". Từ đó, học sinh rút ra và kết luận được hướng giải bài toán là cần xét $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A \mid B)=\mathrm{P}(A \mid \overline{B})$ và $\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}(B \mid \overline{A})$ khi *A, B* độc lập.

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên gọi học sinh lên bảng trình bày lời giải của nhóm đã thảo luận.

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét và chính xác hóa lại bài giải của học sinh để đạt yêu cầu cần đạt của bài toán. Câu trả lời mong đợi:

Ta cần kiểm tra:

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A \mid B)=\mathrm{P}(A \mid \overline{B})$$
$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B \mid A)=\mathrm{P}(B \mid \overline{A})$$

Ta có:

$$\mathrm{P}(A)=\frac{3}{7} ; \mathrm{P}(B)=\frac{4}{7} ;$$

$$\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7}}{\frac{4}{7}}=\frac{3}{7}$$

$$\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{\mathrm{P}(B \cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{7}}{\frac{3}{7}}=\frac{4}{7}.$$

$$\textit{Suy ra}, \mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A \mid B)=\frac{3}{7} ; \mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{4}{7}.$$

Vậy *A, B* là hai biến cố độc lập.

Bình luận: Qua việc giải quyết bài toán "Bài 5" học sinh biết và hiểu sâu hơn về hai biến cố độc lập trong xác suất có điều kiện, tính xác suất của hai biến cố đang xét, cách thức chứng minh hai biến cố đang xét, trước tiên cần xem xét hai biến cố đó có độc lập với nhau hay không? từ đó, giúp học sinh giải quyết các bài toán chính xác hơn.

Tình huống 6

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viên đưa ra đề bài toán tiếp theo, đề Bài 6 như sau:

Bài 6. Cho hai xúc xắc cân đối và đồng chất. Gieo lần lượt từng xúc xắc trong hai xúc xắc đó. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 7, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm.

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên yêu cầu học sinh quan sát, đọc đề bài và thảo luận nhóm để đề ra hướng giải.

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên đặt câu hỏi gợi mở cho học sinh xác định các biến cố cần gọi và nhận định được việc tìm xác suất của biến cố nào trong điều kiện biến cố nào đã xảy ra, từ đó học sinh sử dụng công thức cho chính xác.

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên gọi học sinh đại diện nhóm lên bảng trình bày kết quả thảo luận của nhóm, các nhóm khác quan sát và đóng góp ý.

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét bài làm của học sinh và chính xác hóa bài làm của học sinh để phù hợp với yêu cầu cần đạt của bài toán đặt ra. Câu trả lời mong đợi:

Gọi A là biến cố "để tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 7"

B là biến cố "xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm"

Khi đó, xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai xúc xắc bằng 7, biết rằng xúc xắc thứ nhất xuất hiện mặt 4 chấm, chính là xác suất của A với điều kiện của B.

$$\mathrm{P}(B)=\frac{1}{6};\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$$

$$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}.$$

Bình luận: Qua bài giải của Bài 6, học sinh sẽ thành thạo hơn về cách xác định biến cố cần tính xác suất trong điều kiện biến cố khác đã xảy ra và việc tính xác suất có điều kiện được trở nên quen thuộc. Việc tính xác suất có điều kiện trở thành tri thức của bản thân, giúp học sinh giải quyết các bài toán xác suất có điều kiện cơ bản không còn là một vấn đề khó khăn đối với bản thân.

Trong bài toán này, giáo viên có thể hướng dẫn học sinh sử dụng công thức tính xác suất có điều kiện:

$\mathrm{P}(A\mid B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{1}{6}$. Trong đó $n\left(A\cap B\right)$ là số các kết cục đồng khả năng thuận lợi cho biến cố $\left(A\cap B\right)$ và $n\left(B\right)$ là số các kết cục thuận lợi cho biến cố B.

Học sinh tiếp xúc với bài toán khá gần thực tế sau:

Tình huống 7

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viên đưa ra đề bài toán "Bài 7" như sau:

Bài 7. Một lô sản phẩm có 20 sản phẩm, trong đó có 5 sản phẩm chất lượng thấp, lấy liên tiếp không hoàn lại hai sản phẩm trong lô sản phẩm trên. Tính xác suất để cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp.

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên yêu cầu học sinh đọc đề bài toán và thảo luận nhóm để đề ra hướng giải.

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên đặt câu hỏi gợi ý cho học sinh định hướng cách giải và việc sử dụng công thức nhân của xác suất để giải Bài 7.

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên gọi học sinh lên bảng trình bày kết quả thảo luận của nhóm, các nhóm khác quan sát và đóng góp ý kiến.

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét và chính xác hóa lời giải cần đạt của yêu cầu bài toán từ bài làm của học sinh. Câu trả lời mong đợi:

Gọi A là biến cố "sản phẩm được lấy ra ở lần thứ nhất có chất lượng thấp"

B là biến cố "sản phẩm được lấy ra ở lần thứ hai có chất lượng thấp"

Suy ra, $A\cap B$ là biến cố "cả hai sản phẩm được lấy ra đều có chất lượng thấp"

$$\mathrm{P}(A)=\frac{5}{20}=\frac{1}{4};\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{4}{19}$$

$$\textit{Suy ra}, \mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{5}{20}.\frac{4}{19}=\frac{1}{19}.$$

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}=\frac{1}{19}$.

Bình luận: Thông qua bài giải của Bài 7, học sinh nhận biết được việc tính xác suất có điều kiện trong một số trường hợp có thể tính trực tiếp. Sau đó học sinh có thể sử dụng kết quả này để tính xác suất trong công thức nhân xác suất với điều kiện hai biến cố không độc lập.

Tình huống 8

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viên đặt ra câu hỏi, đề Bài 8 như sau:

Bài 8. Cho hai biến cố A, B với $\mathrm{P}(B)=0,6;\mathrm{P}(A\mid B)=0,7$ và $\mathrm{P}(A\mid \overline{B})=0,4$. Tính xác suất $\mathrm{P}(A)$.

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên yêu cầu học sinh đọc đề bài và thảo luận nhóm để đưa ra hướng giải.

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên đặt câu hỏi gợi mở và dẫn dắt học sinh tiếp cận công thức xác suất toàn phần, từ đó vận dụng nó để giải bài toán.

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên gọi học sinh lên bảng trình bày kết quả thảo luận của nhóm, các nhóm khác quan sát và đóng góp ý kiến.

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét và chính xác hóa bài giải của học sinh để đạt được yêu cầu cần đạt của bài toán đặt ra. Câu trả lời mong đợi:

Ta có: $\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap \overline{B})$, (với $\mathrm{P}(\overline{B})=1-0,6=0,4$)

$$\begin{aligned}&=\mathrm{P}(B).\mathrm{P}(A\,|\,B)+\mathrm{P}(\overline{B}).\mathrm{P}(A\,|\,\overline{B})\\&=0,6.0,7+0,4.0,4\\&=0,58.\end{aligned}$$

Bình luận: Qua bài toán này, học sinh sẽ nhận biết và hiểu về công thức xác suất toàn phần. Từ đó, vận dụng công thức đó để giải quyết bài toán. Tính xác suất của biến cố *A* không đơn thuần là tính $\mathrm{P}(A)$ như xác suất cổ điển, mà phải đặt nó vào môi trường biến cố *B* xảy ra hay không xảy ra.

Tình huống 9

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viến đặt ra một bài toán liên quan đến xác suất toàn phần nhằm giúp học sinh rèn luyện thêm, đề Bài 9 như sau:

Bài 9. Có hai chiếc hộp, hộp I có 5 bi màu trắng và 5 viên bi màu đen, hộp II có 6 viên bi màu trắng và 4 viên bi màu đen, các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời hai viên bi từ hộp I bỏ sang hộp II. Sau đó lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp II.

a) Tính xác suất để viên bi được lấy ra là viên bi màu trắng.

b) Giả sử viên bi được lấy ra là màu trắng. Tính xác suất viên bi màu trắng đó thuộc hộp I.

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên yêu cầu học sinh đọc đề bài và thảo luận nhóm để tìm ra hướng giải.

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên đặt các câu hỏi gợi mở cho học sinh gọi các biến cố cần thiết để giải bài toán. Bên cạnh đó, giáo viên giúp học sinh nhận thấy được xác suất toàn phần đang ẩn trong đề bài toán và việc vận dụng công thức Bayes trong Bài 9b.

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên gọi học sinh lên bảng trình bày kết quả thảo luận của nhóm và các nhóm khác quan sát, đối sánh và đóng góp ý kiến.

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét, bổ sung và điều chỉnh bài làm của học sinh để đạt được yêu cầu của bài toán đặt ra. Câu trả lời mong đợi:

a) Gọi *A* là biến cố "lấy được viên bi trắng từ hộp II"

B_i là biến cố "trong 2 viên bi được lấy ra từ hộp I có *i* viên bi trắng", $i=0,1,2$.

Khi đó $\{B_0;B_1;B_2\}$ là hệ đầy đủ các biến cố và ta có

$$\mathrm{P}(B_0)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9};\qquad \mathrm{P}(A\,|\,B_0)=\frac{6}{12}$$

$$\mathrm{P}(B_1)=\frac{C_5^1.C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{5}{9};\qquad \mathrm{P}(A\,|\,B_2)=\frac{7}{12}$$

$$\mathrm{P}(B_2)=\frac{C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9};\qquad \mathrm{P}(A\,|\,B_2)=\frac{8}{12}$$

Theo công thức xác suất toàn phần:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A)&=\mathrm{P}(B_0).\mathrm{P}(A\,|\,B_0)+\mathrm{P}(B_1).\mathrm{P}(A\,|\,B_1)\\&\quad+\mathrm{P}(B_2).\mathrm{P}(A\,|\,B_2)\end{aligned}$$

$$=\frac{2}{9}.\frac{6}{12}+\frac{5}{9}.\frac{7}{12}+\frac{2}{9}.\frac{8}{12}$$

$$=\frac{7}{12}.$$

Vậy xác suất lấy được viên bi trắng từ hộp thứ II.

b) Gọi *A* là biến cố "lấy viên bi trắng từ hộp II

B_i *là* biến cố "lấy được *i* viên bi trắng từ hộp I"

C là biến cố "viên bi trắng được lấy ra thuộc hộp I"

$$\mathrm{P}(C\,|\,A)=\mathrm{P}(B_1\,|\,A)+\mathrm{P}(B_2\,|\,A)$$

$$=\frac{\mathrm{P}(B_1\,|\,A)}{\mathrm{P}(A)}+\frac{\mathrm{P}(B_2\,|\,A)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\mathrm{P}(B_1).\mathrm{P}(A\,|\,B_1)}{\mathrm{P}(A)}+\frac{\mathrm{P}(B_2).\mathrm{P}(A\,|\,B_2)}{\mathrm{P}(A)}$$

$$=\frac{\frac{C_5^1.C_5^1}{C_{10}^2}.\frac{C_1^1}{C_{12}^1}}{\frac{7}{12}}+\frac{\frac{C_5^2}{C_{10}^2}.\frac{C_2^1}{C_{12}^1}}{\frac{7}{12}}$$

$$=\frac{\frac{5}{9}.\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}}+\frac{\frac{2}{9}.\frac{2}{12}}{\frac{7}{12}}$$

$$=\frac{1}{7}$$

Vậy xác suất cần tìm là $\mathrm{P}(C \mid A)=\frac{1}{7}$.

Bình luận: Thông qua bài giải của bài toán, nó giúp học sinh hiểu sâu sắc hơn về dạng bài liên quan đến công thức xác suất toàn phần, giúp học sinh chiếm lĩnh tri thức mới, biến nó thành quen thuộc đối với bản thân. Bên cạnh đó là tiếp cận được cách thức nhận dạng và sử dụng công thức Bayes trong giải toán. Lý thuyết kiến tạo xã hội thể hiện ở đây là học sinh dựa trên kinh nghiệm sẵn có về xác suất có điều kiện và công thức nhân, vận dụng các kiến thức này để giải quyết các bài toán phức tạp hơn liên quan công thức xác suất toàn phần và công thức Bayes.

Tình huống 10

Bước 1: Đặt vấn đề: Giáo viên đưa ra bài toán tiếp theo, đề Bài 10 như sau:

Bài 10. Một chiếc hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, trong đó có 2 chiếc thẻ màu xanh và 18 chiếc thẻ màu trắng. Bạn Châu rút thẻ hai lần một cách ngẫu nhiên không hoàn lại. Tính xác suất để cả hai lần bạn Châu đều rút được thẻ màu xanh.

Bước 2: Giao nhiệm vụ: Giáo viên yêu cầu học sinh đọc đề và thảo luận nhóm để đề ra hướng giải cho bài toán.

Bước 3: Xây dựng hướng giải: Giáo viên gợi ý học sinh tham khảo tình huống 7.

Bước 4: Trình bày lời giải: Giáo viên gọi học sinh lên bảng trình bày bài làm mà nhóm đã thảo luận.

Bước 5: Chính xác hóa: Giáo viên nhận xét và chính xác hóa bài làm của học sinh. Câu trả lời mong đợi:

Gọi A là biến cố "rút được thẻ màu xanh trong lần thứ nhất"

B là biến cố "rút được thẻ màu xanh trong lần thứ hai"

Suy ra, $A \cap B$ là biến cố "cả hai thẻ được rút ra đều là màu xanh"

Khi bạn Châu rút lần thứ nhất thì trong hộp có 20 chiếc thẻ và trong đó có 2 thẻ màu xanh nên, $\mathrm{P}(A)=\frac{2}{20}$

Khi biến cố A đã xảy ra thì còn lại 19 thẻ trong đó có một thẻ màu xanh.

Do đó, $\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{1}{19}$

Suy ra xác suất để cả hai thẻ được rút ra đều là màu xanh là

$$\mathrm{P}(A \cap B)=\mathrm{P}(A).\mathrm{P}(B \mid A)=\frac{2}{20}.\frac{1}{19}=\frac{1}{190}.$$

Bình luận: Thông qua bài toán, nó giúp học sinh rèn luyện và hiểu sâu sắc hơn về dạng toán của Bài 7. Bên cạnh đó, nó còn giúp học sinh củng cố về lời giải của bài toán xác suất có điều kiện trong dạng toán này. Như đã nói ở trên, tình huống này học sinh có thể tính xác suất có điều kiện trực tiếp từ đề bài.

4. KẾT LUẬN VÀ ĐỀ XUẤT

4.1. Kết luận

Bài báo đã hệ thống các công thức liên quan đến xác suất có điều kiện khi giải bài tập cần sử dụng. Lý thuyết kiến tạo và lý thuyết kiến tạo xã hội cũng được trình bày dựa trên các nền tảng này, mô hình (gồm 5 bước) dạy học giải bài tập xác suất có điều kiện cho học sinh lớp 12 đã được đề xuất. Từ đó, 10 tình huống giải 10 bài tập xác suất có điều kiện được tham khảo từ các nghiên cứu của tác giả Kiệt (2021), Minh (2015) và tài liệu Toán 12 (Thái và ctv., 2023) đã được thiết kế trong nghiên cứu. Xác suất có điều kiện là một chủ đề mới đối với giáo viên và lẫn cả học sinh ở bậc phổ thông. Chủ đề này đã được Bộ Giáo dục và Đào tạo đưa vào trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán (2018). Bên cạnh đó, việc vận dụng lý thuyết kiến tạo xã hội vào việc dạy học giải bài tập xác suất có điều kiện là một hướng nghiên cứu khá mới. Do đó, bài báo này sẽ trở thành một nguồn tài liệu tham khảo hữu ích đối với giáo viên sắp giảng dạy chủ đề xác suất có điều kiện ở chương trình lớp 12 bậc THPT và các học viên có hướng nghiên cứu về chủ đề này.

4.2. Đề xuất

Xác suất có điều kiện là một mảng kiến thức khó đối với giáo viên và học sinh ở bậc phổ thông và cũng chưa có nhiều hướng nghiên cứu về nó. Các nhà nghiên cứu có thể khai thác chủ đề xác suất có điều kiện với việc vận dụng các phương pháp dạy hiện đại, dạy học tích cực, dạy học theo hướng phát triển năng lực cho học sinh như Phương pháp dạy học khám phá, Phương pháp dạy học phát hiện và giải quyết vấn đề; Phương pháp dạy học hợp tác, …Vận dụng phương pháp dạy học tích cực vào dạy học chủ đề xác suất có điều kiện ở lớp 12 là một hướng nghiên cứu mới và cũng rất phù hợp với việc dạy học theo định hướng phát triển năng lực được đề cập trong Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán (2018).

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Batanero, C., & Chernoff, E. (2018). *Teaching and Learning Stochastics*. Springer Publisher. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and Probability in High School.* Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8

Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018). *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán (Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018 của Bộ trường Bộ Giáo dục và Đào tạo),* Hà Nội.

Burrill, G., & Ben-Zvi, D. (2019). *Topics and Trends in Current Statistics Education Research, International Perspectives.* Springer Publisher. https://doi.org/10.1007/978-3-030-03472-6

Kiệt, B. A., & Tài, V. V. (2021). *Dạy học xác suất thống kê.* Nhà xuất bản Đại học Cần Thơ.

Piaget, J. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children.* London: Routledge and Kegan Paul Ltd.

Thái, Đ. Đ., Chung, P. X., Hà, N. S., Loan, N. T. P., Nam, P. S., & Phương, P. M. (2023). *Toán 12, tập 2 (Cánh diều).* Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam.

Thuấn, N. Q. (2017). Từ lý thuyết kiến tạo đến lý thuyết kiến tạo xã hội. *Tạp chí Nghiên cứu Nước ngoài, 33*(4), 137-148. https://doi.org/10.25073/2525-2445/vnufs.4178

Vygotsky, L. S. (1985). Pensée et Langage. Coll. Terrains. Paris: Editions Sociales. (Piaget, J. (2013). *The construction of reality in the child 1*(82). London and New York: Routledge.)