Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.285

GIẢI THUẬT TỐI ƯU SO SÁNH HAI TẬP HỢP VÀ ỨNG DỤNG TRONG CÁC MÔ HÌNH THỰC TẾ

Trương Ngọc Hiện, Lâm Thị Vân Khánh, Thạch Tấn Phong, Trương Thị Thu Ngân và Phạm Thị Vui*
Bộ môn Sư phạm Toán, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): ptvui@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 03/01/2024
Sửa bài (Revised): 19/02/2024
Duyệt đăng (Accepted): 23/02/2024

Title: *Optimization algorithm to compare two sets and applications toreal-world models*

Author(s): *Truong Ngoc Hien, Lam Thi Van Khanh, Thach Tan Phong, Truong Thi Thu Ngan and Pham Thi Vui**

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Các quan hệ thứ tự tập dùng trong bài toán tối ưu tập đóng vai trò quan trọng trong áp dụng vào các bài toán trong thực tế. Việc xây dựng giải thuật nhằm so sánh các tập hợp theo các quan hệ thứ tự tập là thiết thực và là tiền đề cho việc đi sâu nghiên cứu về giải thuật cho lớp bài toán tối ưu tập. Nghiên cứu này tập trung vào việc xây dựng giải thuật so sánh hai tập hợp cùng với liên hệ vận dụng vào các mô hình kinh tế, xã hội trong thực tế.

Từ khoá: *Bài toán tối ưu tập, giải thuật tối ưu, mô hình thực tế, quan hệ thứ tự tập*

ABSTRACT

Set order relations used in set optimization problems play an important role in applying them to real-world problems. Building an algorithm to compare sets based on set order relations is essential and a prerequisite for further research on algorithms for solving set optimization problems. This study focuses on constructing algorithms to compare two sets and applying them to real-life economic and social models.

Keywords: *Optimization algorithm, real-world models, set order relation, set optimization problem*

1. GIỚI THIỆU

Việc so sánh hai phần tử/cá thể hay hai tập hợp/nhóm gồm nhiều cá thể theo một hoặc nhiều tiêu chí là vấn đề thường gặp trong cả lý thuyết và thực tiễn. So sánh các cá thể theo một tiêu chí cụ thể để chọn ra đối tượng phù hợp nhất chính là dạng bài toán tối ưu một mục tiêu, trong đó việc so sánh giá trị hàm mục tiêu tương ứng của các cá thể này được giải quyết triệt để nhờ tính sắp thứ tự tốt của tập số thực.

Vấn đề sẽ phức tạp hơn trong tình huống cần so sánh toàn diện các phần tử hay các tập hợp theo nhiều tiêu chí khác nhau mà không tồn tại phần tử trội hơn hẳn hoặc kém thua hẳn về tất cả các tiêu chí đang xét. Vấn đề trên giải quyết được bằng cách vận dụng các quan hệ thứ tự dùng so sánh hai tập hợp được đề xuất trong Kuroiwa et al. (1997), Jahn and Ha (2011) và được sử dụng rộng rãi trong thời gian qua.

Bài toán tối ưu được nghiên cứu trong suốt thời gian rất dài và cả chiều sâu với rất nhiều kết quả nghiên cứu quan trọng được công bố cho cả các lớp bài toán tối ưu với hàm mục tiêu nhận giá trị thực, giá trị vectơ và giá trị tập hợp. Đối với bài toán tối ưu với hàm mục tiêu nhận giá trị tập hợp (set-valued optimization problem), cách tiếp cận phổ biến là tiếp cận vectơ (vector approach). Sau đó, trong Kuroiwa et al. (1997), cách tiếp cận tập (set approach) được đề xuất và ngày càng được quan tâm nghiên cứu do nó hợp lý hơn trong các vận dụng thực tiễn (Jahn & Ha, 2011). Trong bài toán tối ưu với hàm mục tiêu nhận giá trị tập hợp theo cách tiếp cận tập được gọi vắn tắt là bài toán tối ưu tập (set optimization problem), giá trị của hàm mục tiêu được so sánh trực tiếp thông qua các quan hệ thứ tự tập được giới thiệu lần đầu bởi Kuroiwa (Kuroiwa et al., 1997) và các quan hệ thứ tự tập được mở rộng sau đó.

Đối với bài toán tối ưu tập, các chủ đề quan trọng đã và đang được tập trung nghiên cứu bao gồm: sự tồn tại nghiệm (Kuroiwa, 2003; Hernández & Rodríguez-Marín, 2007) điều kiện tối ưu (Alonso & Rodríguez-Marín, 2009; Khoshkhabar-amiranloo, 2023), sự ổn định nghiệm (Gaydu et al., 2017; Anh et al., 2024), sự đặt chỉnh (Gupta & Srivastava, 2020; Som & Vetrivel, 2022),… Tuy nhiên, cho đến nay vấn đề phương pháp số nghiên cứu thuật toán giải cho lớp bài toán này vẫn chưa được công bố dù đã có các công bố liên quan đến phương pháp vô hướng hóa, vectơ hóa (Jahn, 2009; Hamel et al., 2015; Khan et al., 2016) cho lớp bài toán này. Theo cách tiếp cận tập, ta cần so sánh trực tiếp giá trị của hàm mục tiêu. Do vậy, việc nghiên cứu phương pháp số so sánh các tập hợp theo các quan hệ thứ tự trong (Jahn & Ha, 2011) là thiết thực và là tiền đề quan trọng cho việc đi sâu vào giải thuật cho lớp bài toán tối ưu tập.

2. BÀI TOÁN TỐI ƯU

Tiếp theo, mô hình của bài toán tối ưu vô hướng, bài toán tối ưu vectơ, bài toán tối ưu tập cùng các dạng nghiệm của chúng được giới thiệu lại.

Cho X,Y là các không gian tôpô tuyến tính thực. Cho M là tập con khác rỗng, đóng của X. Tập hợp các tập con khác rỗng của Y được ký hiệu là $\mathcal{P}(Y)$. Tập $\emptyset \neq C$ là nón trong Y, tức là $\lambda y \in C$ với mọi số thực dương λ và $y \in C$.

2.1. Bài toán tối ưu vô hướng

Cho hàm giá trị thực $f: M \to \mathbb{R}$. Bài toán tối ưu vô hướng (OP) có dạng như sau

$$\min f(x) \text{ với } x \in M.$$

Định nghĩa 1. $x^* \in M$ được gọi là nghiệm của (OP) khi và chỉ khi $f(x^*) \leq f(x)\ \forall x \in M$.

Việc so sánh đánh giá giữa hai phần tử trong không gian xem xét, không gian X, được gián tiếp thực hiện thông qua việc so sánh trong không gian quyết định, không gian $\mathbb{R}$. Như ta đã biết, quan hệ thứ tự xác định trên tập số thực như sau

$$a \leq b \iff b - a \geq 0, \forall a, b \in \mathbb{R}$$

có các tính chất: phản xạ, bắc cầu, phản đối xứng, tuyến tính (để tiện theo dõi, trình bày lại ở đây rằng quan hệ thứ tự $\leq$ được gọi là có tính chất tuyến tính trên một tập hợp nếu với bất kỳ hai phần tử a, b của tập hợp, ta luôn so sánh được, tức là luôn có hoặc $a \leq b$ hoặc $b \leq a$) . Do đó, quan hệ thứ tự $\leq$ là quan hệ thứ tự toàn phần trên $\mathbb{R}$ và tập số thực là sắp thứ tự toàn phần. Vì vậy, so sánh các giá trị hàm mục tiêu trong bài toán tối ưu vô hướng được thực hiện tốt, dễ dàng.

2.2. Bài toán tối ưu vectơ

Cho hàm giá trị vectơ $f: M \to \mathbb{R}^n$, $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big)\ \forall x \in M$. Bài toán tối ưu vectơ (VOP) có dạng như sau

$$\min f(x) \text{ với } x \in M.$$

Định nghĩa 2. (Ehrgott, 2005) x^* được gọi là trội hơn x khi và chỉ khi

$$f_i(x^*) \leq f_i(x)\ \forall i = \overline{1,n}$$

và tồn tại $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ thỏa mãn

$$f_{i_0}(x^*) < f_{i_0}(x).$$

Ví dụ 1. Với $n = 2$, $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x)\big)\ \forall x \in M$, xét bài toán (VOP)

$$\min f(x) \text{ với } x \in M.$$

Khi đó, ta có ba trường hợp khi so sánh x và x' như sau:

(i) Trường hợp 1: nếu $f_1(x') \leq f_1(x)$ và $f_2(x') \leq f_2(x)$ thì x' tốt hơn x. Khi trường hợp này xảy ra, nếu các bất đẳng thức nghiêm ngặt xảy ra, tức là ta có $f_1(x') < f_1(x)$ hoặc $f_2(x') < f_2(x)$ thì x' trội hơn x.

(ii) Trường hợp 2: nếu $f_1(x') \geq f_1(x)$ và $f_2(x') \geq f_2(x)$ thì x' xấu hơn x.

(iii) Trường hợp 3: nếu $f_1(x') < f_1(x)$ và $f_2(x') > f_2(x)$ hoặc nếu $f_1(x') > f_1(x)$ và $f_2(x') < f_2(x)$ thì x' và x là không so sánh được với nhau.

Do bài toán ta đang xét là dạng bài toán tìm min nên trong Định nghĩa 2 và ví dụ ở trên, giá trị nhỏ hơn (<) được hiểu theo nghĩa mang ý nghĩa tốt hơn. Trong trường hợp bài toán ta đang xét là dạng bài toán tìm max, ta có thể chuyển đổi tương ứng, với giá trị lớn hơn (>) được hiểu theo nghĩa mang ý nghĩa tốt hơn.

Định nghĩa 3. $x^* \in M$ được gọi là nghiệm lý tưởng của (VOP) khi và chỉ khi $\forall x \in M$, x^* trội hơn x.

Không được thuận lợi như so sánh hai số thực, việc so sánh hai vectơ gặp trở ngại do tập hợp các vectơ n chiều không có tính sắp thứ tự tốt.

Trong tối ưu hóa đa mục tiêu, hàm mục tiêu $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big)$ có nhiều mục tiêu $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ cần đạt được đồng thời và ta không thể tối ưu hóa riêng lẻ một mục tiêu mà không ảnh hưởng đến mục tiêu khác. Khi đó, nhiệm vụ chính là tìm ra tập các giải pháp tối ưu, được gọi là "lời giải Pareto", trong đó không có giải pháp nào tốt hơn các giải pháp khác ở mọi mục tiêu.

Định nghĩa 4. (Jahn & Ha, 2011) $x^* \in M$ được gọi là nghiệm Pareto của (VOP) khi và chỉ khi không tồn tại $x \in M$ sao cho x trội hơn x^*.

Như vậy, $x^* \in M$ được gọi là nghiệm Pareto của (VOP) nếu

$$(f(x^*) - C) \cap f(M) = \{f(x^*)\}.$$

Thứ tự giữa các vectơ, giữa các tập hợp được xác định thông qua quan hệ thứ tự cảm sinh bởi nón. Một trong những nón hữu dụng và đã được sử dụng trong nhiều nghiên cứu gần đây là nón từ điển (lexicographic cone). Để tiện theo dõi, tiếp theo chúng tôi trình bày lại khái niệm nón từ điển trong $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 5. (Anh & Duy, 2016) Nón từ điển trong $\mathbb{R}^n$, ký hiệu C_{lex}, được xác định bởi

$$C_{lex} := \{0\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists k, 0 \le k < n \text{ thỏa } x_1 = \cdots = x_k = 0, x_{k+1} > 0\}.$$

Như vậy, nón từ điển của $\mathbb{R}^n$ là tập hợp gồm vectơ không và tất cả các vectơ $x \in \mathbb{R}^n$ mà tọa độ khác không đầu tiên của x là số dương.

Với $x, y \in \mathbb{R}^n$, thứ tự từ điển được xác định bởi

$$x \ge_{lex} y \Leftrightarrow x - y \in C_{lex}.$$

2.3. Bài toán tối ưu tập

Cho hàm đa trị $F: M \rightrightarrows Y$. Bài toán tối ưu tập (SOP) có dạng như sau

$$\min F(x) \text{ với } x \in M.$$

Định nghĩa 6. (Jahn & Ha, 2011) $x^* \in M$ được gọi là nghiệm hữu hiệu của (SOP) khi và chỉ khi $x \in M$, $F(x) \le_\alpha F(x^*)$ suy ra $F(x^*) \le_\alpha F(x)$.

Ở đây, $\le_\alpha$ là một trong các dạng quan hệ thứ tự tập dùng so sánh trực tiếp giá trị của hàm mục tiêu F trong bài toán tối ưu tập. Các dạng quan hệ thứ tự tập thông dụng được trình bày chi tiết trong phần dưới đây.

3. QUAN HỆ THỨ TỰ GIỮA HAI TẬP HỢP

Với C là nón trong Y, các quan hệ thứ tự giữa hai tập hợp theo nón C được xác định như sau:

3.1. Quan hệ thứ tự tập dạng *u*

Định nghĩa 7. (Jahn & Ha, 2011) Cho A, B là hai tập con khác rỗng của Y. Ta nói $A \preccurlyeq_u B$ khi và chỉ khi với mọi $a \in A$, tồn tại $b \in B$ sao cho $a \le_C b$. Quan hệ thứ tự tập " $\preccurlyeq_u$ " được gọi là quan hệ thứ tự trên.

Theo định nghĩa trên,

$$A \preccurlyeq_u B \iff A \subset B - C.$$

3.2. Quan hệ thứ tự tập dạng *l*

Định nghĩa 8. (Jahn and Ha, 2011) Cho A, B là hai tập con khác rỗng của Y. Ta nói $A \preccurlyeq_l B$ khi và chỉ khi với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $a \le_C b$. Quan hệ thứ tự tập " $\preccurlyeq_l$ " được gọi là quan hệ thứ tự dưới.

Theo định nghĩa trên,

$$A \preccurlyeq_l B \iff B \subset A + C.$$

3.3. Quan hệ thứ tự tập dạng *s*

Định nghĩa 9. (Jahn & Ha, 2011) Cho A, B là hai tập con khác rỗng của Y. Ta nói $A \preccurlyeq_s B$ khi và chỉ khi $A \preccurlyeq_u B$ và $A \preccurlyeq_l B$.

Theo định nghĩa trên,

$$A \preccurlyeq_s B \iff A \subset B - C \text{ và } B \subset A + C$$

$\iff (\forall a \in A, \exists b \in B, a \le_C b)$ và $(\forall b \in B, \exists a \in A, a \le_C b)$.

Mệnh đề 1. (Jahn & Ha, 2011)

Với các tập hợp $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ tùy ý, ta có:

(i) Các quan hệ thứ tự tập $\preccurlyeq_l, \preccurlyeq_u$ và $\preccurlyeq_s$ là quan hệ tiền thứ tự (tức là, $\preccurlyeq_l, \preccurlyeq_u$ và $\preccurlyeq_s$ đều có tính chất phản xạ và tính chất bắc cầu). Hơn nữa, các quan hệ thứ tự tập này là tương thích với cấu trúc cộng tuyến của $\mathcal{P}(Y)$.

(ii) Các quan hệ thứ tự tập $\preccurlyeq_l, \preccurlyeq_u$ và $\preccurlyeq_s$ không có tính phản đối xứng. Cụ thể, với các tập hợp $A, B \in \mathcal{P}(Y)$ tùy ý, khi đó ta có:

$$(A \preccurlyeq_l B \text{ và } B \preccurlyeq_l A) \Leftrightarrow A + C = B + C,$$

$$(A \preccurlyeq_u B \text{ và } B \preccurlyeq_u A) \Leftrightarrow A - C = B - C,$$

$(A \preccurlyeq_s B$ và $B \preccurlyeq_s A) \Leftrightarrow A + C = B + C$ và $A - C = B - C$.

Mệnh đề 2. Cho A, B là hai tập con compact của Y và C là nón lồi, đóng, nhọn trong Y. Ta ký hiệu $\min A = \{a \in A | (a - K) \cap A = \{a\}\}$. Khi đó,

(i) $A \preccurlyeq_l B \Leftrightarrow \min A \preccurlyeq_l \min B$

(ii) $A \preccurlyeq_u B \Leftrightarrow \min A \preccurlyeq_u \min B$

(iii) $A \preccurlyeq_s B \Leftrightarrow \min A \preccurlyeq_s \min B$

4. THUẬT TOÁN

Mục này đề xuất phương pháp số giải quyết vấn đề so sánh hai phần tử, tập hợp xuất hiện trong các bài toán đề cập ở trên. Khai thác các tính chất của các quan hệ thứ tự tập, cùng các kỹ thuật tính toán liên quan nón sắp thứ tự và kết hợp hiệu quả các gói lệnh, thư viện numpy trong Python, các giải thuật này giải quyết được vấn đề so sánh hai tập trong không gian Euclide thực. Khi số chiều và kích thước của bài toán tăng lên, các kết quả này vẫn còn hiệu quả.

4.1. Kiểm tra phần tử trội

Xét bài toán (VOP) như ở mục 2. Với $x, x' \in M$, thuật toán sau sẽ so sánh, kiểm tra xem x trội hơn x' hay không.

Thuật toán 1

Input: Hàm mục tiêu $f: M \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big);$$

hai vectơ $x, x' \in M$.

– **Tính** $y_i = f_i(x)$; $y_i' = f_i(x')$ $\forall i = \overline{1,n}$.

– Kiểm tra:

if $y_i \le y_i'$ $\forall i = \overline{1,n}$

then

if $y_i < y_i'$ với $i = \overline{1,n}$

then x trội hơn x'

else x không trội hơn x'.

Output: Kết luận x trội hơn x' hay không._

4.2. Tổng trọng số

Bằng phương pháp tổng trọng số, bài toán tối ưu đa mục tiêu được đưa về thành bài toán tối ưu một mục tiêu. Xét bài toán (VOP) như ở mục 2, với vectơ trọng số đã có, ta giải như sau:

Thuật toán 2

Input: Hàm mục tiêu $f: M \to \mathbb{R}^n$;

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big);$$

Vectơ trọng số $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$.

– **Lập** $g(x) = w^T . f(x)$.

– **Tính** $x^* = \text{argmin}_{x \in M} g(x)$.

Output: x^* là nghiệm của (VOP) theo vectơ trọng số w.

4.3. Nón từ điển

Trong trường hợp xác định được thứ tự ưu tiên của các tiêu chí, bằng cách sử dụng nón từ điển thì bài toán tối ưu đa mục tiêu có thể đưa về một dãy các bài toán tối ưu một mục tiêu với các ràng buộc được thiết lập phù hợp. Khi đó, việc so sánh đánh giá giữa hai phần tử trong không gian nhiều chiều được đưa về so sánh đánh giá trong không gian một chiều và điều này được thực hiện tốt.

Xét bài toán (VOP) như ở mục 2, ta giải bằng cách sử dụng nón từ điển như sau:

Thuật toán 3

Input: Hàm mục tiêu $f: M \to \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)\big);$$

Nón từ điển C_{lex} xác định thứ tự ưu tiên.

– **Tính** $x_1^* = \text{argmin}_{x \in M} f_1(x)$.

– **Tính** $x_2^* = \text{argmin}_{x \in M_1} f_2(x)$ với $M_1 = \{x \in M, f_1(x) \le f_1(x_1^*)\}$.

...

– **Tính** $x_n^* = \text{argmin}_{x \in M_{n-1}} f_n(x)$ với $M_{n-1} = \{x \in M, f_k(x) \le f_k(x_n^*), k = \overline{1, n-1}\}$.

Output: x^* là nghiệm của (VOP) xét theo nón từ điển C_{lex}.

4.4 So sánh hai tập theo quan hệ thứ tự tập

Với A, B là hai tập con cho trước của Y, chúng ta so sánh hai tập hợp này theo các quan hệ thứ tự tập dạng $\preccurlyeq_u, \preccurlyeq_l, \preccurlyeq_s$. Cụ thể, chúng ta kiểm tra các phát biểu sau có đúng hay không: $A \preccurlyeq_u B$; $B \preccurlyeq_u A$; $A \preccurlyeq_l B$; $B \preccurlyeq_l A$; $A \preccurlyeq_s B$; $B \preccurlyeq_s A$.

Thuật toán 4

Input: A, B là hai tập con của Y.

– **Tính** $\min A = \big\{a \in A \big| (a - K) \cap A = \{a\}\big\}$.

– **Tính** $\min B = \big\{b \in A \big| (b - K) \cap A = \{b\}\big\}$.

– **Kiểm tra** $\min A \preccurlyeq_u \min B$. Từ đó kết luận được $A \preccurlyeq_u B$.

– **Kiểm tra** $\min B \preccurlyeq_u \min A$. Từ đó kết luận được $B \preccurlyeq_u A$.

– **Kiểm tra** $\min A \preccurlyeq_l \min B$. Từ đó kết luận được $A \preccurlyeq_l B$.

– **Kiểm tra** $\min B \preccurlyeq_l \min A$. Từ đó kết luận được $B \preccurlyeq_l A$.

– **Kiểm tra** $\min A \preccurlyeq_s \min B$. Từ đó kết luận được $A \preccurlyeq_s B$.

Output: Các quan hệ thứ tự tập dạng $\preccurlyeq_u, \preccurlyeq_l, \preccurlyeq_s$ giữa hai tập A, B.

Các giải thuật ở trên trình bày cho hai dạng bài toán (VOP) và (SOP). Với bài toán (VOP), nếu nghiệm lý tưởng tồn tại thì đây là tình huống tốt đẹp nhất và đương nhiên là phần tử trội là lời giải tối ưu. Trong trường hợp nghiệm lý tưởng không tồn tại, ta có thể vô hướng hóa bài toán thông qua vectơ trọng số đã xác định được và đưa về bài toán tối ưu vô hướng (OP); hoặc ta có thể sắp thứ tự ưu tiên theo nón từ điển, và đưa bài toán (VOP) về dãy các bài toán tối ưu vô hướng (OP). Đối với bài toán (SOP) khi xét theo cách tiếp cận tập, ta sẽ so sánh trực tiếp các giá trị của hàm mục tiêu, tức là so sánh trực tiếp các tập hợp bằng các quan hệ thứ tự tập.

5. VẬN DỤNG VÀO MÔ HÌNH THỰC TẾ

Mục này trình bày các mô hình thực tế vận dụng các kết quả ở trên.

Một điều hiển nhiên được thừa nhận là, trong so sánh các yếu tố nhiều chiều, khi tồn tại phần tử trội thì tất nhiên phần tử trội chính là lời giải tối ưu. Các phân tích tiếp theo dưới đây dành cho trường hợp không tồn tại trội của mô hình và khi đó các công cụ so sánh hiệu quả cần được phân tích và vận dụng hợp lý.

Mô hình 1: So sánh kết quả của thí sinh trong kì tuyển sinh gồm nhiều môn thi.

Trong kì tuyển sinh gồm nhiều môn thi, điểm thi của thí sinh được xem như vectơ nhiều chiều. Để tuyển chọn thí sinh trúng tuyển, việc so sánh toàn diện và sắp xếp điểm thi của các thí sinh đóng vai trò rất quan trọng.

Cách so sánh để đơn giản và phổ dụng là so sánh theo điểm tổng: Phương pháp này dựa trên tổng điểm của từng thí sinh. Các thí sinh có tổng điểm cao hơn sẽ được xếp hạng cao hơn. Như vậy, bài toán tối ưu một mục tiêu được sử dụng. Hàm mục tiêu $f(x)$ xác định bằng tổng điểm thi của thí sinh x.

Một cách tính khác là sử dụng trọng số trong điểm tổng: Đôi khi, để đánh giá công bằng hơn giữa các môn thi, có thể sử dụng hệ số trọng số khác nhau cho từng môn. Các môn có trọng số cao hơn sẽ đóng góp nhiều hơn vào tổng điểm cuối cùng. Vectơ trọng số $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ thể hiện hệ số tương ứng của các môn thi. Hàm $f(x)$ thể hiện điểm thi của thí sinh x ở lần lượt các môn thi. Hàm mục tiêu $g(x) = w^T . f(x)$ xác định bằng tổng điểm thi của thí sinh x.

Như vậy, bài toán so sánh trong không gian nhiều chiều, so sánh các thí sinh, được đưa về bài toán so sánh và sắp xếp thứ tự trong không gian một chiều. So sánh giá trị của hàm mục tiêu là tổng điểm thi, từ đó so sánh và sắp xếp tốt thứ tự các thí sinh.

Mô hình 2: Lựa chọn mua hàng

Khi lựa chọn mua hàng, ta thường phải so sánh cân nhắc giữa nhiều yếu tố khác nhau để đưa ra chọn lựa phù hợp nhất. Cụ thể, ta xem xét việc mua laptop, việc so sánh các laptop với nhau về các yếu tố như giá tiền, cấu hình, thương hiệu, pin, kiểu dáng,… là rất quan trọng để đưa ra quyết định phù hợp.

Sử dụng nón từ điển C_{lex}, các tiêu chí theo chủ quan của người mua được sắp thứ tự ưu tiên theo thứ tự từ điển, có nghĩa là sắp xếp tiêu chí có ưu tiên cao hơn trước, rồi đến tiêu chí có ưu tiên thấp hơn. Cụ thể, ta xét năm tiêu chí với thứ tự ưu tiên từ cao đến thấp theo ý chủ quan của người mua lần lượt là cấu hình, thương hiệu, pin, giá tiền, kiểu dáng. Vectơ $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ thể hiện năm thông số cho một laptop cụ thể. Khi đó, lựa chọn tối ưu chính là nghiệm Pareto của bài toán (VOP).

Mô hình 3: So sánh tập thể lớp

Tập thể A gồm m cá nhân, tập thể B gồm k cá nhân, đặc điểm mỗi cá nhân được thể hiện thông qua n thông số. Để chọn lựa ra tập thể nào tốt hơn về tất cả các mặt, các quan hệ thứ tự tập được vận dụng để so sánh các tập toàn diện và hợp lý hơn.

Thông thường để đánh giá kết quả thực nghiệm trong giáo dục, người ta thường dùng thống kê và so sánh thông qua đặc trưng mẫu. Tuy nhiên, đại lượng này là giá trị đại diện cho cả tập thể, không thể hiện được đủ đặc tính của cả tập thể. Cụ thể, khi so sánh hai lớp học cùng khối trong một trường để đánh giá xem lớp nào chất lượng tốt hơn. Ta xem xét trường hợp không lớp nào trội hơn hẳn ở mọi mặt. Cách phổ biến là lấy điểm trung bình của tất cả học sinh mỗi lớp so sánh với nhau để đánh giá. Nhưng như vậy sẽ bỏ qua nhiều yếu tố: thực hiện nội quy, năng khiếu, thái độ học tập, tham gia phong trào,… Để đánh giá toàn diện, mỗi học sinh ứng với một vector. Các thành phần của vector thể hiện các đặc điểm của học sinh. Khi đó, ta so sánh hai tập hợp có hữu hạn vecto n chiều theo các quan hệ thứ tự tập s sẽ đánh giá toàn diện được hai tập hợp.

Mô hình 4: Lựa chọn nhóm để đầu tư

Việc lựa chọn hai công ty để đầu tư sao cho vừa sinh lời nhất vừa rủi ro thấp nhất. Khi đó ta phải so sánh hai công ty với nhiều tiêu chí: quy mô doanh nghiệp, khả năng sinh lời, tốc độ tăng trưởng, thị trường, lợi thế cạnh tranh, tiềm năng tăng trưởng,…

Để quyết định đầu tư vào công ty nào thì cần phải đánh giá lợi nhuận và rủi ro, so sánh và đưa ra quyết định.

Nếu ta quan tâm nhiều hơn về lợi nhuận, các yếu tố tích cực thì ta sử dụng quan hệ $\preccurlyeq_u$, thật vậy,

$$A \preccurlyeq_u B \;\Leftrightarrow A \subset B - C$$

$\Leftrightarrow$ với mọi $a \in A$, tồn tại $b \in B$ sao cho $a \leq_C b$.

Nếu ta quan tâm nhiều hơn về rủi ro, các yếu tố bất lợi thì ta sử dụng quan hệ $\preccurlyeq_l$, thật vậy,

$$A \preccurlyeq_l B \;\Leftrightarrow B \subset A + C$$

$\Leftrightarrow$ với mọi $b \in B$, tồn tại $a \in A$ sao cho $a \leq_C b$.

6. KẾT LUẬN

Bằng cách sử dụng các kết quả trong lĩnh vực tối ưu hóa cùng các tính chất của các loại quan hệ thứ tự giữa các tập hợp, giải thuật tối ưu được đề xuất để so sánh hai tập hợp theo các loại quan hệ thứ tự tập. Bên cạnh đó, việc áp dụng các kết quả này vào các mô hình kinh tế, xã hội trong thực tế cũng được trình bày. Các kết quả thu được này là nền tảng cho việc mở rộng nghiên cứu xây dựng các thuật toán cho lớp bài toán tối ưu tập mà hàm mục tiêu đa trị và nghiệm của bài toán xét theo tiêu chuẩn tập.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo được tài trợ bởi đề tài nghiên cứu của Trường Đại học Cần Thơ, mã số: TSV2024-116.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alonso, M., & Rodríguez-Marín, L., (2009). Optimality conditions for set-valued maps with set optimization. *Nonlinear Anal.*, 70, 3057–3064. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.04.027

Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Linh, H. M. (2024). Scalar representations and Hausdorff continuity of solution mappings to parametric set optimization problems via set less order relations. *Operations Research Letters*, 53, 107071. https://doi.org/10.1016/j.orl.2024.107071

Anh, L. Q., & Duy, T. Q. (2016). Tykhonov well-posedness for lexicographic equilibrium problems. *Optimization*, *65*(11), 1929-1948. https://doi.org/10.1080/02331934.2016.1209673

Ehrgott, M. (2005). *Multicriteria Optimization.* Springer, Berlin.

Gaydu, M., Geoffroy, M. H., Jean-Alexis, C., & Nedelcheva, D. (2017). Stability of minimizers of set optimization problems. *Positivity*, *21*(1), 127–141. https://doi.org/10.1007/s11117-016-0412-6

Gupta, M., & Srivastava, M. (2020). Approximate solutions and Levitin–Polyak well-posedness for set optimization using weak efficiency. *J. Optim. Theory Appl.*, 186, 191-208. https://doi.org/10.1007/s10957-020-01683-0

Hamel, A. H., Heyde, F., Lohne, A., Rudloff, B., & Schrage, C. (2015). *Set Optimization and Applications–The State of the Art.* Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-662-48670-2

Hernández, E. & Rodríguez-Marín, L. (2007). Existence theorems for set optimization problems. *Nonlinear Anal.*, 67, 1726-1736. https://doi.org/10.1016/j.na.2006.08.013

Jahn, J. (2009). *Vector optimization*. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17005-8_9

Jahn, J., & Ha, T. X. D. (2011). New order relations in set optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *148*(2), 209-236. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9752-8

Khan, A. A., Tammer, C., & Zălinescu, C. (2016). *Set-valued optimization*. Springer, Berlin. https://doi.org/10.1007/978-3-642-54265-7

Khoshkhabar-amiranloo, S. (2023). Approximate weak minimal solutions of set-valued optimization problems. *Journal of the Operations Research Society of China*, *11*(3), 673-692. https://doi.org/10.1007/s40305-022-00401-z

Kuroiwa, D. (2003). Existence theorems for set optimization with set-valued maps. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 24, 73-84. https://doi.org/10.1080/02522667.2003.10699556

Kuroiwa, D., Tanaka, T., & Ha, T. X. D. (1997). On cone convexity of set-valued maps. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications, 30*(3), 1487-1496. https://doi.org/10.1016/S0362-546X(97)00213-7

Som, K., & Vetrivel, V. (2022). A Note on Pointwise Well-Posedness of Set-Valued Optimization Problems. *J. Optim. Theory Appl., 192*(2), 628-647. https://doi.org/10.1007/s10957-021-01981-1