Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.292

BIỂU DIỄN NÓN BISHOP-PHELPS TRONG KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU

Phạm Thanh Dược[1], Lâm Thị Vân Khánh[2], Võ Thị Mộng Thúy[3*] và Đặng Thị Mỹ Vân[4]
[1]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật Công nghệ Cần Thơ*
[2]*Bộ môn Sư phạm Toán học, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*
[3]*Khoa Cơ bản, Trường Đại học Tây Đô*
[4]*Khoa Đào tạo Giáo viên, Trường Cao đẳng Cần Thơ*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): vtmthuy@tdu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 02/01/2024
Sửa bài (Revised): 22/02/2024
Duyệt đăng (Accepted): 23/02/2024

Title: *Representations of the Bishop-Phelps cones in finite-dimensional spaces*

Author(s): *Pham Thanh Duoc[1], Lam Thi Van Khanh[2], Vo Thi Mong Thuy[3*] and Dang Thi My Van[4]*

Affiliation(s): *[1]Can Tho University of Technology, [2]Can Tho University; [3]Tay Do University, [4]Can Tho College*

TÓM TẮT

Mục tiêu của bài báo là nghiên cứu sự biểu diễn của nón Bishop-Phelps trong không gian hữu hạn chiều dưới các chuẩn khác nhau. Đầu tiên, định nghĩa về các nón trong không gian hữu hạn chiều được nhắc lại, kèm theo các ví dụ minh họa về nón Bishop-Phelps có cả phần trong bằng rỗng và khác rỗng. Tiếp theo, bài báo xem xét các tính chất của nón Bishop-Phelps. Cuối cùng, những nón này được sử dụng để biểu diễn các nón cơ bản trong không gian hữu hạn chiều như nón Orthant không âm, nón Lorentz, và các nón có liên quan khác.

Từ khoá: *Không gian hữu hạn chiều, nón, nón Bishop-Phelps, tính chất*

ABSTRACT

The aim of the article is to study representations of Bishop-Phelps cones in finite-dimensional spaces under various norms. First, the definitions of cones in finite-dimensional spaces are recalled, accompanied by examples illustrating Bishop-Phelps cones with both empty and non-empty interiors. Next, the article explores the properties of Bishop-Phelps cones. Finally, these cones are utilized to represent foundational cones in finite-dimensional spaces, including the non-negative Orthant cones, Lorentz cones, and other related cones.

Keywords: *Bishop-Phelps cone, cone, finite-dimensional space, property*

1. GIỚI THIỆU

Nón thứ tự là một công cụ cốt yếu cho các mô hình bài toán tối ưu vector trong không gian hữu hạn chiều. Nón được sử dụng nhiều nhất trong không gian $\mathbb{R}^n$ là nón Orthant không âm $\mathbb{R}^n_+$. Gần đây, một trong những nón mà có nhiều ứng dụng trong các trường hợp thực tế và dành được nhiều sự quan tâm của các nhà toán học là nón Lorentz trong không gian $\mathbb{R}^n$. Các bài toán có liên quan đến tối ưu theo nón Lorentz như Fang et al. (2009), Dong et al. (2012), Anh and Danh (2016a), Chang et al. (2018), Bueno et al. (2021). Ngoài ra, một nón khác cũng được xem xét vì mục đích ứng dụng của nó là nón từ điển với các công trình nghiên cứu về nón này như Konnov (2003), Bianchi et al. (2010), Anh et al. (2014, 2016b), Anh and Duy (2018) nhưng hầu hết các kết quả hiện có cho các loại bài toán vector tổng quát trong tối ưu hóa không thể áp dụng cho các bài toán liên quan đến nón từ điển vì nón này không đóng cũng không mở.

Một loại nón được sự quan tâm nhiều của các nhà toán học là nón Bishop-Phelps do tính chất đặc trưng là mọi nón lồi, đóng và có đỉnh trong không gian $\mathbb{R}^n$ đều có thể biểu diễn dưới dạng nón Bishop-Phelps. Nón này có thể có phần trong bằng rỗng hoặc khác rỗng và được biểu diễn dưới nhiều dạng nón khác nhau tùy thuộc vào việc chọn phiếm hàm tuyến tính ϕ và chuẩn $\|\cdot\|$ trên $\mathbb{R}^n$. Xuất phát từ những công trình nổi tiếng của Bishop and Phelps (1962), Phelps (1974), các tác giả đã định nghĩa một loại nón quan trọng trong lý thuyết tối ưu. Những nón này sau đó được gọi là nón Bishop-Phelps (viết tắt là BP). Đây là nón có ý nghĩa rất lớn bởi vì nó được biểu diễn dưới nhiều dạng nón khác nhau. Trong những năm qua, đã có rất nhiều công trình nghiên cứu về nón Bishop-Phelps. Cụ thể, Bednarczuk (1996) đã sử dụng nón Bishop-Phelps và những tính chất của nó để thiết lập điều kiện đủ cho tính nửa liên tục dưới của ánh xạ nghiệm cho bài toán tối ưu vector. Vào năm 2009, Jahn đã khảo sát những tính chất quan trọng của nón Bishop-Phelps, trong đó có thiết lập công thức tính rõ ràng cho phần trong và nón đối ngẫu của nó. Tiếp theo, Eichfelder and Ha (2013) đã dựa vào cấu trúc thứ tự chứa biến được định nghĩa bởi nón Bishop-Phelps và bằng cách sử dụng phương pháp vô hướng hóa, các tác giả đã thiết lập các điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu vector đơn trị hoặc đa trị dưới quy tắc Fermat và quy tắc nhân tử Lagrange. Sau đó, Ha and Jahn (2017) đã tiếp nối công trình của Jahn (2009b) để nghiên cứu những tính chất của nón Bishop-Phelps trong những trường hợp đặc biệt là chuẩn của phiếm hàm tuyến tính có giá trị bằng 1. Hơn nữa, Eichfelder (2018) đã xây dựng ánh xạ có cấu trúc thứ tự chứa biến trong đó không gian ảnh được biểu diễn dưới dạng nón Bishop-Phelps có minh họa ví dụ trong không gian Hilbert hữu hạn chiều. Gần đây, Ha and Jahn (2023) đã đưa ra những tính chất đặc biệt của nón Bishop-Phelps cho bởi phương trình trong không gian Banach. Qua công trình này, các tác giả biểu diễn các nón Bishop-Phelps được cho bởi phương trình trong một số không gian Banach cổ điển, áp dụng trong bài toán điều khiển tối ưu và xấp xỉ trong không gian hữu hạn chiều.

Một trong những tính chất quan trọng của nón Bishop-Phelps là mọi nón lồi, đóng, có đỉnh trong không gian $\mathbb{R}^n$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng nón Bishop-Phelps. Điều đó được chứng minh trong công trình nổi tiếng của Petschke (1990). Do đó, nón Bishop-Phelps được xem là một dạng hợp nhất của những nón cơ bản trong không gian hữu hạn chiều. Tuy nhiên, sự biểu diễn này cũng khá phức tạp vì phụ thuộc rất nhiều vào không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục và chuẩn trên $\mathbb{R}^n$. Do đó, kết quả trên thường được sử dụng ở phương diện lý thuyết và chưa tìm thấy một công trình nghiên cứu nào khảo sát đầy đủ về việc biểu diễn này mà chỉ dừng lại dưới dạng một vài ví dụ đơn giản (Eichfelder & Ha, 2013; Ha & Jahn, 2023).

Với ý nghĩa và tầm quan trọng của nón Bishop-Phelps cũng như làm nền tảng cho các ví dụ, phản ví dụ trong việc xem xét các mô hình tối ưu dựa trên nón thứ tự Bishop-Phelps, nghiên cứu được thực hiện để khảo sát sự biểu diễn cụ thể theo các chuẩn của các nón cơ bản trong không gian hữu hạn chiều thông qua nón Bishop-Phelps.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Cho $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ là không gian định chuẩn thực hữu hạn chiều, viết tắt là $\mathbb{X}$, không gian đối ngẫu của $\mathbb{X}$ là $\mathbb{X}^*$, tức là không gian các phiếm hàm tuyến tính liên tục từ X vào tập hợp số thực $\mathbb{R}$.

Với A là tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$, ta ký hiệu phần trong, bao đóng của A lần lượt là $\text{int}A, \text{cl}A$ và nón sinh ra bởi A là

$$\text{cone}(A) := \{ta : t \geq 0, a \in A\}.$$

Ký hiệu $\|\cdot\|$ và $\|\cdot\|_*$ lần lượt là chuẩn trong $\mathbb{X}$ và không gian đối ngẫu $\mathbb{X}^*$, với

$$\|\phi\|_* = \sup_{x \neq 0} \frac{|\phi(x)|}{\|x\|}, \text{ với mọi } \phi \in \mathbb{X}^*.$$

Trong bài báo này, ta xét không gian hữu hạn chiều $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ nên ngay sau đây, một số khái niệm có liên quan trong $\mathbb{R}^n$ được nhắc lại.

Định nghĩa 2.1. Cho $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Ta có một số chuẩn trong không gian $\mathbb{R}^n$ như sau:

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|;$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_E = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2};$$

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}.$$

Chuẩn $\|\cdot\|_E$ còn được gọi là *chuẩn Euclide*.

Định nghĩa 2.2. *Phần trong* của tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\text{int}(A)$ là tập mở lớn nhất (theo nghĩa tập hợp) chứa trong A.

Định nghĩa 2.3. *Bao đóng* của tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\text{cl}(A)$ là tập đóng nhỏ nhất (theo nghĩa tập hợp) chứa A.

Định nghĩa 2.4. Tập $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập lồi* nếu với mọi $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in A$ và $t \in [0,1]$, ta có:

$$t\boldsymbol{x} + (1-t)\boldsymbol{y} \in A.$$

Định nghĩa 2.5. (Jahn, 2009) Tập C được gọi là *nón* nếu với mọi $\boldsymbol{x} \in C$ và $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda \geq 0$ thì ta luôn có $\lambda \boldsymbol{x} \in C$.

Định nghĩa 2.6.

(a) Nón C được gọi là *rắn* nếu nó có phần trong khác rỗng, tức là $\text{int}C \neq \emptyset$.

(b) Nón C được gọi là *lồi* nếu nó là tập lồi.

(c) Nón C được gọi là *đóng* nếu nó là tập đóng.

(d) Nón C được gọi là *có đỉnh* nếu

$$C \cap (-C) = \{0\}.$$

Định nghĩa 2.7. (Luc, 1989) Một tập con $B \subset C$ được gọi là cơ sở của nón C nếu B không chứa phần tử 0 và với mỗi $c \in C, c \neq 0$ thì tồn tại duy nhất $b \in B$ và $t > 0$ sao cho $c = tb$.

Tiếp theo, ta nhắc lại định nghĩa các loại nón cụ thể trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Định nghĩa 2.8. *Nón Orthant không âm* trong không gian $\mathbb{R}^n$, ký hiệu là $\mathbb{R}^n_+$ được định nghĩa là:

$$\mathbb{R}^n_+ = \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = \overline{1,n}\}.$$

Định nghĩa 2.9. (Anh & Duy, 2018) *Nón từ điển* (Lexicographic Cones) trong không gian $\mathbb{R}^n$, ký hiệu là C^n_{lex} được định nghĩa như sau:

$$C^n_{lex} = \{0\} \cup \{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \exists i = \overline{1,n},\ x_i > 0, x_j = 0, j = \overline{i+1,n}\}.$$

Nón từ điển là nón không đóng cũng không mở.

Định nghĩa 2.10. (Anh & Danh, 2016) *Nón Lorentz* trong không gian $\mathbb{R}^n$ được xác định như sau:

$$C^n_{lor} = \left\{\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2}\right\}.$$

Định nghĩa 2.11. (Ha & Jahn, 2017) Cho $\phi \in \mathbb{X}^*$ bất kỳ, một tập được xác định bởi

$$C(\phi) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{X} : \phi(\boldsymbol{x}) \geq \|\boldsymbol{x}\|\}$$

được gọi là nón *Bishop-Phelps.*

Ví dụ 2.1. Cho $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$ với chuẩn $\|\cdot\|_E$, ta xét phiếm hàm tuyến liên tục $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y), \quad \forall \boldsymbol{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

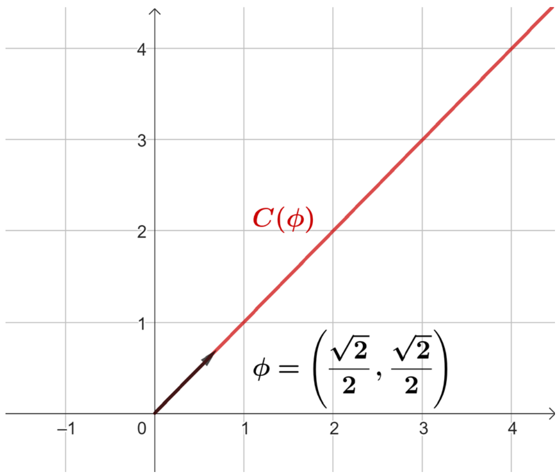
Với $\boldsymbol{x} = (x,y) \in C(\phi)$, thì

$$\phi(\boldsymbol{x}) \geq \|\boldsymbol{x}\|_E \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \geq \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow x + y \geq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 \geq 2(x^2+y^2) \\ x+y \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 \leq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y = 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Vậy nón Bishop-Phelps được xác định bởi

$$C(\phi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x \geq 0\},$$

là nón có phần trong bằng rỗng (Hình 1).



Hình 1. Nón $C(\boldsymbol{\phi}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2 : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \geq 0\}$

Ví dụ 2.2. Cho $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2$ với chuẩn $\|\cdot\|_E$, ta xét phiếm hàm tuyến liên tục $\phi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x,y) = x + y, \quad \forall \boldsymbol{x} = (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Với $\boldsymbol{x} = (x,y) \in C(\phi)$, thì

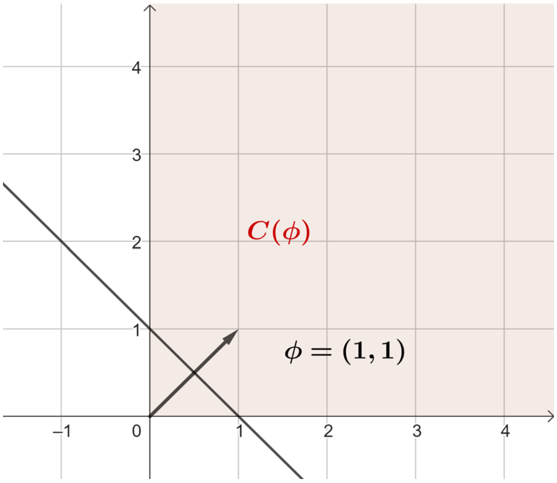
$$\phi(\boldsymbol{x}) \geq \|\boldsymbol{x}\|_E \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \geq \sqrt{x^2+y^2} \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 \geq x^2 + y^2 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x.y \geq 0 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}.$$

Vậy nón Bishop-Phelps là $C(\phi) = \mathbb{R}^2_+$ (Hình 2).

Đây là nón *Orthant không âm* có phần trong khác rỗng trong $\mathbb{R}^2$.



Hình 2. Nón $\mathbb{R}^2_+$

Nhận xét 2.1. Một nón Bishop-Phelps có thể có phần trong bằng rỗng hoặc khác rỗng tùy thuộc vào phiếm hàm tuyến tính ϕ và chuẩn được chọn.

Nón Bishop-Phelps được gọi là không tầm thường nếu nó chứa phần tử khác 0, tức là

$$C(\phi) \setminus \{0\} \neq \emptyset.$$

Rõ ràng $0 \in C(\phi)$.

Với $\mathcal{C}$ là nón lồi đóng có đỉnh trong $\mathbb{Y}$ với phần trong khác rỗng (int$\mathcal{C} \neq \emptyset$). Ký hiệu nón cực dương $\mathcal{C}^*$ và nón cực dương chặt của $\mathcal{C}$ lần lượt là

$$\mathcal{C}^* := \{\ell \in \mathbb{Y}^* : \ell(y) \geq 0, \forall y \in \mathcal{C}\}$$

và

$$\mathcal{C}^\# := \{\ell \in \mathbb{Y}^* : \ell(y) > 0, \forall y \in \mathcal{C}\}.$$

Bổ đề 2.1. (Jahn, 2009a, Bổ đề 3.21, tr. 77) Nếu $\mathbb{Y}$ là một không gian tô pô tuyến tính thực và $\mathcal{C}$ là nón lồi thỏa int$\mathcal{C} \neq \emptyset$ thì

$$\text{int}\mathcal{C} = \{y \in \mathbb{Y} : \ell(y) > 0, \forall \ell \in \mathcal{C}^* \setminus \{0\}\}.$$

3. NHỮNG TÍNH CHẤT CỦA NÓN BISHOP-PHELPS

Với những vai trò và ý nghĩa của nón Bishop-Phelps được đề cập ở trên, ta có một số tính chất của chúng như sau:

Bổ đề 3.1. Mọi nón Bishop-Phelps đều là nón lồi, đóng, có đỉnh.

Chứng minh.

$*$ $C(\phi)$ là tập đóng.

Lấy $\{x_n\}$ là dãy bất kỳ trong $C(\phi)$ sao cho x_n hội tụ về x_0. Ta cần chứng minh $x_0 \in C(\phi)$. Vì $x_n \in C(\phi)$ nên ta có

$$\phi(x_n) \geq \|x_n\|.$$

Do tính liên tục của ℓ kéo theo

$$\phi(x_0) \geq \|x_0\|,$$

từ đó suy ra $x_0 \in C(\phi)$.

$*$ $C(\phi)$ là tập lồi.

Với bất kỳ $y_1, y_2 \in C(\phi), t \in [0,1]$, thì

$+ \, y_1 \in C(\phi)$ nên $\phi(y_1) \geq \|y_1\|$ kéo theo

$$t\phi(y_1) \geq t\|y_1\|.$$

$+ \, y_2 \in C(\phi)$ nên $\phi(y_2) \geq \|y_2\|$ dẫn đến

$$(1-t)\phi(y_2) \geq (1-t)\|y_2\|.$$

Từ đó ta suy ra được

$$\begin{aligned} t\phi(y_1) + (1-t)\phi(y_2) &\geq t\|y_1\| + (1-t)\|y_2\| \\ &\geq \|ty_1\| + \|(1-t)y_2\| \\ &\geq \|ty_1 + (1-t)y_2\|. \end{aligned}$$

Do đó

$$ty_1 + (1-t)y_2 \in C(\phi).$$

$*$ $C(\phi)$ có đỉnh.

Ta có $0 \in C(\phi) \cap (-C(\phi))$. Giả sử tồn tại phần tử y khác 0 sao cho $y \in C(\phi) \cap \big(-C(\phi)\big)$ thì

$$\phi(y) \geq \|y\| \text{ và } \phi(-y) \geq \|-y\|.$$

Từ đó suy ra

$$\phi(y) \geq \|y\| \text{ và } -\phi(y) \geq \|y\|,$$

hay

$$\phi(y) \geq \|y\| \text{ và } \phi(y) \leq -\|y\|,$$

điều này vô lý. Do đó

$C(\phi) \cap (-C(\phi))=\{0\}$. ■

Bổ đề 3.2. Cho $\phi, \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{X}^*$, khi đó

(a) $C(\phi_1) \cap C(\phi_2) \subset C(\phi_1 + \phi_2)$.

(b) Nếu $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha > 0$ thì

$$C(\alpha\phi) = \alpha C(\phi) = C(\phi).$$

(c) Nếu $\|\phi\|_* < 1$ thì $C(\phi) = \{0\}$.

(d) Nếu $\|\phi\|_* > 1$ thì $C(\phi)$ là nón không tầm thường.

Chứng minh.

(a) Lấy $y \in C(\phi_1) \cap C(\phi_2)$ thì

$$\begin{cases} y \in C(\phi_1) \\ y \in C(\phi_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(y) \geq \|y\| \\ \phi_2(y) \geq \|y\| \end{cases}.$$

Từ đó suy ra

$$\phi_1(y) + \phi_2(y) \geq \|y\| + \|y\| > \|y\|,$$

nghĩa là

$$(\phi_1 + \phi_2)(y) > \|y\|.$$

Do đó $y \in C(\phi_1 + \phi_2)$.

(b) Với bất kỳ $y \in C(\alpha\phi)$, vì $C(\alpha\phi)$ là nón và $\alpha > 0$ nên ta có $\frac{1}{\alpha^2} y \in C(\alpha\phi)$, tương đương với

$$\alpha\phi\left(\frac{1}{\alpha^2} y\right) \geq \left\|\frac{y}{\alpha}\right\|.$$

Từ đó suy ra

$$\frac{1}{\alpha}\phi(y) \geq \frac{1}{\alpha}\|y\|, \qquad (3.1)$$

hay

$$\phi\left(\frac{y}{\alpha}\right) \geq \left\|\frac{y}{\alpha}\right\|.$$

Do đó $\frac{y}{\alpha} \in C(\phi)$, tức là $y \in \alpha C(\phi)$.

Từ (3.1) ta cũng được $\phi(y) \geq \|y\|$ nên $y \in C(\phi)$.

Vậy $C(\alpha\phi) \subset \alpha C(\phi) \subset C(\phi)$.

Ngược lại, lấy phần tử bất kỳ $y \in \alpha C(\phi)$ thì $\frac{y}{\alpha} \in C(\phi)$ nên $\phi\left(\frac{y}{\alpha}\right) \geq \left\|\frac{y}{\alpha}\right\|$.

Từ đó suy ra $\phi(y) \geq \|y\|$ nên $y \in C(\phi)$.

Mặt khác, từ $\phi(y) \geq \|y\|$ và $\alpha > 0$ ta cũng được $\alpha\phi(y) \geq \|y\|$. Do đó, $y \in C(\alpha\phi)$. Vậy

$$\alpha C(\phi) \subset C(\phi) \subset C(\alpha\phi).$$

(c) Giả sử tồn tại $y \in C(\phi)$ sao cho $y \neq 0$, khi đó

$$\|y\| \leq \phi(y) \leq \|\phi\|_* \|y\| < \|y\|,$$

điều này vô lý. Do đó $C(\phi) = \{0\}$.

(d) Lấy $y \in C(\phi)$, vì $\|\phi\|_* > 1$ nên ta có

$\|y\| \leq \phi(y) \leq \|\phi\|_* \|y\|$ đúng với $y \neq 0$.

Do đó $C(\phi)$ là nón không tầm thường. ■

Sau đây là một số tính chất được tổng hợp từ kết quả của Jahn (2009b), Ha and Jahn (2017), Ha and Jahn (2023).

Bổ đề 3.3. (Jahn, 2009b; Ha & Jahn, 2017) Cho phiếm hàm tuyến tính $\phi \in \mathbb{X}^*$, khi đó

(a) $\{y \in \mathbb{X}: \phi(y) > \|y\|\} \subset \operatorname{int}(C(\phi))$.

Nếu $\|\phi\|_* > 1$ thì $\operatorname{int}(C(\phi)) \neq \emptyset$ và

$$\operatorname{int}(C(\phi)) = \{y \in \mathbb{X}: \phi(y) > \|y\|\}.$$

(b) $\phi \in C(\phi)^\#$, với

$$C(\phi)^\# := \{\ell \in \mathbb{X}^*: \ell(y) > 0, \forall y \in C(\phi) \setminus \{0\}\}.$$

(c) Nếu tập $B = \{y \in \phi(y): \phi(y) = 1\}$ khác rỗng thì nó là một cơ sở đóng và bị chặn của nón $C(\phi)$.

(d) $C(\phi)^* = \operatorname{cl}\left(\operatorname{cone}(B(\phi, 1))\right)$ với

$$B(\phi, 1) = \{\ell \in \mathbb{X}^*: \|\ell - \phi\|_* \leq 1\}.$$

Bổ đề 3.4. Cho $\phi \in \mathbb{X}^*$, khi đó nón Bishop-Phelps có dạng

$$C(\phi) = \{y \in \mathbb{X}: \phi(y) = \|y\|\}$$

khi và chỉ khi $\|\phi\|_* = 1$.

Chứng minh.

Ta có

$$\|\phi\|_* = \sup_{y \neq 0} \frac{|\phi(y)|}{\|y\|}, \text{ với mọi } \phi \in \mathbb{X}^*.$$

Nếu $C(\phi) = \{y \in \mathbb{X}: \phi(y) = \|y\|\}$, ta giả sử rằng $\|\phi\|_* > 1$ thì tồn tại $y \neq 0$ sao cho

$$\frac{|\phi(y)|}{\|y\|} > 1,$$

hay $|\phi(y)| > \|y\|$, điều này tương đương với

$$\phi(y) > \|y\| \text{ hoặc } \phi(y) < -\|y\|.$$

+ Nếu $\phi(y) > \|y\|$ thì $y \in C(\phi)$, vô lý.

+ Nếu $\phi(y) < -\|y\|$ thì $-\phi(y) > \|y\|$, tương đương với $\phi(-y) > \|-y\|$. Đặt $z = -y$ thì $z \neq 0$ và $\phi(z) > \|z\|$ nên $z \in C(\phi)$, vô lý.

Do đó $\|\phi\|_* = 1$.

Ngược lại, nếu $\|\phi\|_* = 1$ thì với phần tử bất kỳ y trong $C(\phi)$, ta có

$$\|y\| \leq \phi(y) \leq \|\phi\|_* \|y\| \leq \|y\|.$$

Từ đó suy ra

$$\phi(y) = \|y\|.$$

Vậy $C(\phi) = \{y \in \mathbb{X}: \phi(y) = \|y\|\}$. ■

Bổ đề 3.5. (Ha & Jahn, 2017) Cho $\mathbb{X}$ là không gian Banach, khi đó $\mathbb{X}$ là không gian phản xạ khi và chỉ khi với mọi $\phi \in \mathbb{X}^*$ mà $\|\phi\|_* = 1$ thì $C(\phi)$ là nón không tầm thường.

Bổ đề 3.6. (Ha & Jahn, 2023) Cho $C(\phi)$ là nón Bishop-Phelps với $\|\phi\|_* = 1$. Khi đó,

$$\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|,$$

với mọi $y_1, y_2 \in C(\phi)$.

Bổ đề 3.7. (Ha & Jahn, 2017) Cho $\mathbb{X}$ là không gian Hilbert và $\phi \in \mathbb{X}^*$ với $\|\phi\|_* = 1$ thì

$$C(\phi) = \{\lambda\phi: \lambda \in [0, +\infty)\} = \operatorname{cone}(\{\phi\}).$$

4. BIỄU DIỄN NÓN BISHOP-PHELPS TRONG KHÔNG GIAN HỮU HẠN CHIỀU

Nón Bishop-Phelps có vai trò và ý nghĩa rất quan trọng trong việc khảo sát các dạng mô hình bài toán tối ưu. Đặc biệt, trong không gian hữu hạn chiều, nón Bishop-Phelps được xem là dạng hợp nhất của nhiều nón thứ tự quan trọng được thể hiện trong kết quả dưới đây. Việc chứng minh định lý này tương đối dài và khá phức tạp, bạn đọc có thể tìm hiểu chứng minh chi tiết trong bài báo của Petschke (1990).

Định lý 4.1. *Mọi nón lồi trong không gian $\mathbb{R}^n$ đều có thể biểu diễn dưới dạng nón Bishop-Phelps nếu và chỉ nếu nó đóng và có đỉnh.*

Do đó, nón Bishop-Phelps được biểu diễn dưới nhiều dạng nón khác nhau tùy thuộc vào việc chọn phiếm hàm tuyến tính ϕ và chuẩn $\|\cdot\|$ được chọn trong $\mathbb{R}^n$ hay tùy thuộc vào số chiều của không gian $\mathbb{R}^n$.

Trước hết, cách chọn các phiếm hàm phù hợp với chuẩn cho trước được nghiên cứu để biểu diễn các nón thứ tự trong không gian hữu hạn chiều.

Định lý 4.2. *Xét không gian $\mathbb{R}^n$ được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_1$, ta xét phiếm hàm tuyến liên tục ϕ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được xác định như sau*

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$
$$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, nón Bishop-Phelps là nón Orthant không âm.

Chứng minh.

Lấy bất kỳ $\boldsymbol{x} \in C(\phi)$, ta có

$$\phi(\boldsymbol{x}) \geq \|\boldsymbol{x}\|_1 \Leftrightarrow x_1 + x_2 + \cdots + x_n \geq |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|$$
$$\Leftrightarrow x_i \geq 0, \qquad \forall i = \overline{1, n}.$$

Do đó $C(\phi) = \mathbb{R}^n_+$. ■

Ví dụ 4.1. Cho không gian $\mathbb{R}^2$ với chuẩn $\|\cdot\|_1$, ta xét ϕ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x, y) = x + y, \ \ \forall \boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

thì nón Bishop-Phelps $C(\phi) = \mathbb{R}^2_+$. (Hình 2)

Định lý 4.3. *Trong không gian $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ với chuẩn $\|\cdot\|_E$, ta xét phiếm hàm tuyến liên tục ϕ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được xác định như sau*

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt{2}x_n,$$
$$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, nón Bishop-Phelps là nón Lorentz.

Chứng minh.

Với $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(\phi)$, thì

$$\phi(\boldsymbol{x}) \geq \|\boldsymbol{x}\|_E,$$

điều đó tương đương với

$$\sqrt{2}x_n \geq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2)^{\frac{1}{2}},$$

kéo theo,

$$2x_n^2 \geq x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 + x_n^2$$
$$\Leftrightarrow x_n \geq (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Vậy $C(\phi) = \left\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n: x_n \geq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2}\right\}$.

Đây là nón *Lorentz*, nón này cũng được gọi là *nón hình que kem* hay *nón thứ tự bậc hai*. ■

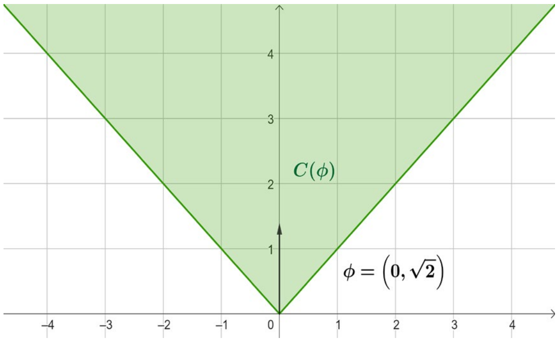
Ví dụ 4.2.

(a) Trong $\mathbb{R}^2$ với chuẩn $\|\cdot\|_E$, hàm ϕ: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x, y) = \sqrt{2}y, \forall \boldsymbol{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Khi đó, nón Bishop-Phelps là nón Lorentz trong $\mathbb{R}^2$ (Hình 3).

$$C(\phi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\},$$



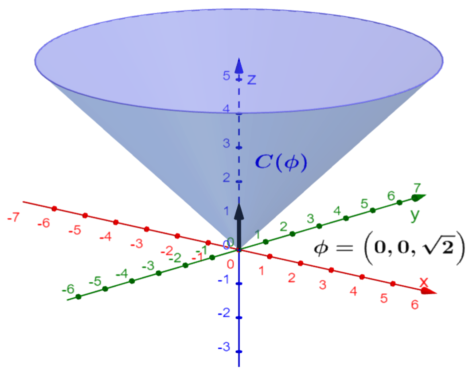
Hình 3. Nón Lorentz trong $\mathbb{R}^2$

(b) Trong $\mathbb{R}^3$, hàm ϕ: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ được xác định như sau:

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x,y,z) = \sqrt{2}z,\ \forall \boldsymbol{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Khi đó, nón Bishop-Phelps là nón Lorentz trong $\mathbb{R}^3$ (Hình 4).

$$C(\phi) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq \sqrt{x^2 + y^2}\right\}.$$



Hình 4. Nón Lorentz trong $\mathbb{R}^3$

Tiếp theo, ta cũng có kết quả là trong cùng một không gian có số chiều cụ thể và với chuẩn cho trước, ta cũng chọn được những phiếm hàm khác nhau để được những nón có dạng khác nhau. Cụ thể, trong không gian $\mathbb{R}^2$ với chuẩn $\|\cdot\|_E$ cho trước, thì việc chọn hai phiếm hàm khác nhau tương ứng ở Ví dụ 2.1 và Ví dụ 2.2, nón Bishop-Phelps được biểu diễn thành những dạng nón khác nhau là nón có phần trong bằng rỗng

$$C(\phi) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 : y = x, x \geq 0\}$$

và nón Orthant không âm có phần trong khác rỗng

$$C(\phi) = \mathbb{R}^2_+.$$

Phần cuối của mục này, các kết quả tính toán được giới thiệu cho thấy tính mềm dẻo, linh hoạt của nón Bishop-Phelps. Với phiếm hàm và chuẩn đã chọn, bằng việc thay đổi số chiều của không gian, ta sẽ thu được các nón thứ tự khác nhau.

Định lý 4.4. *Trong không gian $\mathbb{R}^n$ có chuẩn $\|\cdot\|_1$, ta xét phiếm hàm tuyến liên tục ϕ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được xác định như sau*

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = 2x_n$$
$$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad x_n \geq 0.$$

Khi đó, nón Bishop-Phelps được xác định bởi

$$C(\phi) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}|\}. \tag{4.1}$$

Nón này có các dạng khác nhau tùy theo số chiều của không gian $\mathbb{R}^n$.

Chứng minh.

Với $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in C(\phi)$, thì

$$\phi(\boldsymbol{x}) \geq \|\boldsymbol{x}\|_1,$$

điều này tương đương với

$$2x_n \geq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}| + |x_n|$$
$$\Leftrightarrow 2x_n \geq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}| + x_n$$
$$\Leftrightarrow x_n \geq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}|.$$

Vậy $C(\phi) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n \geq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_{n-1}|\}$. ■

Ví dụ 4.3. Ta xét các trường hợp cụ thể như sau

(a) Khi $n = 1$, ta có

$$C(\phi) = \{x \in \mathbb{R} : 2x \geq |x|\} = \mathbb{R}_+.$$

(b) Khi $n = 2$, ta có

$$C(\phi) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq |x|\}.$$

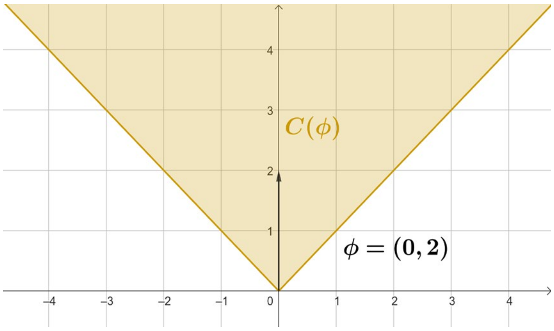
Khi đó, nón Bishop-Phelps là nón Lorentz trong $\mathbb{R}^2$ (Hình 5).

(b) Khi $n = 3$, ta có

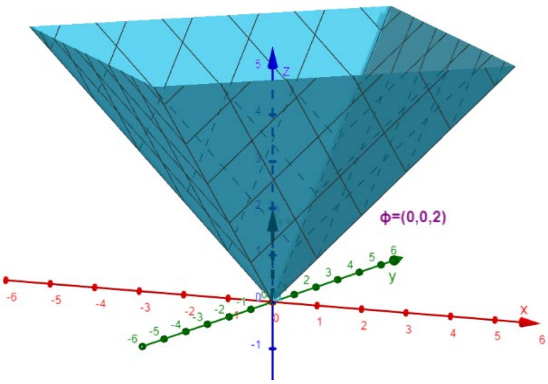
$$C(\phi) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq |x| + |y|\}.$$

Khi đó, nón Bishop-Phelps có dạng nón Lorentz đa diện trong $\mathbb{R}^3$. (Hình 6)

Vậy nón Bishop-Phelps biểu diễn như (4.1) có dạng khác nhau tùy theo số chiều của không gian $\mathbb{R}^n$.



Hình 5. Nón Lorentz trong $\mathbb{R}^2$



Hình 6. Nón Lorentz đa diện trong $\mathbb{R}^3$

Khi chọn phiếm hàm ϕ và chuẩn khác với Định lý 4.4, ta cũng có các nón thứ tự khác nhau tùy theo số chiều của trong không gian $\mathbb{R}^n$.

Định lý 4.5. *Trong không gian $\mathbb{R}^n$ được trang bị chuẩn $\|\cdot\|_\infty$, ta xét phiếm hàm tuyến liên tục ϕ: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ được xác định như sau:*

$$\phi(\boldsymbol{x}) = \phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n$$
$$\forall \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Khi đó, nón Bishop-Phelps được xác định bởi

$$C(\phi) = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n\colon x_n \geq \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}\}. \quad (4.2)$$

Đây là nón có các dạng khác nhau tùy theo số chiều của không gian $\mathbb{R}^n$.

Ví dụ 4.4. Ta xét các trường hợp sau

(a) $n = 1$: Ta có

$$C(\phi) = \{x \in \mathbb{R}\colon x \geq |x|\} = \mathbb{R}_+.$$

(b) $n = 2$: Ta có

$$C(\phi) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon y \geq \max\{|x|, |y|\}\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon y \geq 0, |y| \geq \max\{|x|\}\}$$
$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon y \geq |x|\}.$$

Đây là nón Lorentz trong $\mathbb{R}^2$.

(c) $n = 3$: Ta có

$$C(\phi) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon z \geq \max\{|x|, |y|, |z|\}\}$$
$$= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\colon z \geq \max\{|x|, |y|\}\}.$$

Lấy phần tử $(-4,5,6) \in \mathbb{R}^3$, ta thấy

$$6 > \max\{|-4|, |5|\},$$

do đó $(-4,5,6)$ thuộc nón Bishop-Phelps.

Nhưng vì $6 < \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$ nên $(-4,5,6)$ không thuộc nón Lorentz trong $\mathbb{R}^3$.

Mặt khác, vì $-4 < 0$ nên $(-4,5,6)$ cũng không thuộc nón Orthant không âm trong $\mathbb{R}^3$.

Hơn nữa, $6 < |-4| + |5| = 9$ nên $(-4,5,6)$ cũng không thuộc nón dạng nón Lorentz đa diện trong $\mathbb{R}^3$ như Hình 6.

Vậy nón Bishop-Phelps biểu diễn như (4.2) có dạng khác nhau tùy theo số chiều của không gian $\mathbb{R}^n$.

Nhận xét 4.1. Nón Bishop-Phelps không thể biểu diễn được dưới dạng nón từ điển do nón này không đóng cũng không mở.

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã nghiên cứu tính chất của nón Bishop-Phelps và sử dụng nón này để biểu diễn các nón cơ bản trong không gian hữu hạn chiều. Biểu diễn đó cho thấy sự linh hoạt của nón Bishop-Phelps và với những điều chỉnh thích hợp, chúng ta có thể đạt được nón theo mục đích sử dụng trong các mô hình bài toán tối ưu. Thứ nhất, với cách chọn phiếm hàm phù hợp với chuẩn, ta sẽ biểu diễn các nón thứ tự trong không gian hữu hạn chiều. Thứ hai, với chuẩn đã cho trong không gian có số chiều cụ thể, ta chọn được các phiếm hàm tuyến tính khác nhau để được các nón có dạng khác nhau. Cuối cùng, với phiếm hàm tuyến tính và chuẩn đã chọn thích hợp thì bằng việc thay đổi số chiều của không gian, ta sẽ có các nón thứ tự khác nhau. Kết quả này là tiền đề cơ sở, động lực nghiên cứu để đưa những ứng dụng của nón Bishop-Phelps vào các mô hình bài toán tối ưu trong kinh tế.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo là một phần kết quả đạt được trong đề tài nghiên cứu “Tính liên tục nghiệm của bài toán tối ưu phụ thuộc tham số”, được tài trợ bởi Trường Đại học Tây Đô, mã số: GV.012.23.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q., & Danh, N. H. (2016a). Tính nửa liên tục trên của ánh xạ nghiệm bài toán cân bằng mạnh theo nón Lorentz. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ*, *43*, 26-33. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2016.161

Anh, L. Q., & Duy, T. Q. (2018). On penalty method for equilibrium problems in lexicographic order. *Positivity*, *22*, 39-57. https://doi.org/10.1007/s11117-017-0496-7

Anh, L. Q., Duy, T. Q., & Khanh, P. Q. (2016b). Continuity properties of solution maps of parametric lexicographic equilibrium problems. *Positivity*, *20*, 61-80. https://doi.org/10.1007/s11117-015-0341-9

Anh, L. Q., Duy, T. Q., Kruger, A. Y., & Thao, N. H. (2014). Well-posedness for lexicographic vector equilibrium problems. In *Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics* (pp. 159-174), Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-8615-2_10

Bednarczuk, E. M. (1996). *Bishop-Phelps cones and convexity: applications to stability of vector optimization problems* (Doctoral dissertation, INRIA).

Bianchi, M., Konnov, I. V., & Pini, R. (2010). Lexicographic and sequential equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*, *46*, 551-560. https://doi.org/10.1007/s10898-009-9439-6

Bishop, E., & Phelps, R. R. (1962). The support functionals of a convex set, Proc. Sympos. *Pure Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., *7*, 27–35.

Bueno, M. I., Furtado, S., & Sivakumar, K. C. (2021). Linear maps preserving the Lorentz-cone spectrum in certain subspaces of M_n. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, *15*(3), 1-20. https://doi.org/10.1007/s43037-021-00140-y

Chang, Y. L., Huang, C. H., Chen, J. S., & Hu, C. C. (2018). Some inequalities for means defined on the Lorentz cone. *Mathematical Inequalities and Applications*, *21*(4), 1015-1028. https://doi.org/10.7153/mia-2018-21-69

Dong, L., Tang, J., & Zhou, J. (2012). A smoothing Newton algorithm for solving the monotone second-order cone complementarity problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, *40*(1), 45-61. https://doi.org/10.1007/s12190-012-0550-3

Eichfelder, G., & Ha, T. X. D. (2013). Optimality conditions for vector optimization problems with variable ordering structures. *Optimization*, *62*(5), 597-627. https://doi.org/10.1080/02331934.2011.575939

Eichfelder, G., & Pilecka, M. (2018). Ordering structures and their applications. *Applications of Nonlinear Analysis*, 265-304. https://doi.org/10.1007/978-3-319-89815-5_9

Fang, L., He, G., & Hu, Y. (2009). A new smoothing Newton-type method for second-order cone programming problems. *Applied Mathematics and Computation*, *215*(3), 1020-1029. https://doi.org/10.1016/j.amc.2009.06.029

Ha, T. X. D., & Jahn, J. (2017). Properties of Bishop-Phelps cones. *Journal of Nonlinear Convex Analysis*, *18*(3), 415-429.

Ha, T. X. D., & Jahn, J. (2023). Bishop–Phelps cones given by an equation in Banach spaces. *Optimization*, *72*(5), 1309-1346. https://doi.org/10.1080/02331934.2021.2011870

James, R. C. (1972). Reflexivity and the sup of linear functionals. *Israel Journal of Mathematics*, *13*(3-4), 289-300. https://doi.org/10.1007/BF02762803

Jahn, J. (2009a). *Vector Optimization*, Springer, Berlin, 470 pages.

Jahn, J. (2009b). Bishop-Phelps Cones in Optimization, *International Journal of Optimization:* Theory, Methods and Applications, *1*, 123-139.

Luc, D. T. (1989). *Theory of vector optimization*, Springer, Berlin, 183 pages. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4

Konnov, I. V. (2003). On lexicographic vector equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *118*, 681-688. https://doi.org/10.1023/B:JOTA.0000004877.39408.80

Petschke, M. (1990). On a theorem of Arrow, Barankin, and Blackwell. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *28*(2), 395-401. https://doi.org/10.1137/0328021

Phelps, R. R. (1974). Support cones in Banach spaces and their applications. *Advances in Mathematics*, *13*(1), 1-19. https://doi.org/10.1016/0001-8708(74)90062-0