



DOI:10.22144/ctujos.2024.384

## ĐIỀU KIỆN CÙNG TỒN TẠI CHO HAI LOÀI TRONG HỆ CẠNH TRANH LOTKA-VOLTERRA

Lê Xuân Đại<sup>1</sup> và Dương Hùng Mạnh<sup>1,2\*</sup><sup>1</sup>Khoa Khoa học ứng dụng, Trường Đại học Bách Khoa - Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh<sup>2</sup>Khoa Công nghệ Thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ

\*Tác giả liên hệ (Corresponding author): dhmanh@ctu.edu.vn

### Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 27/12/2023

Sửa bài (Revised): 25/03/2024

Duyệt đăng (Accepted): 30/04/2024

**Title:** Conditions for coexistence of two species in the Lotka-Volterra competitive system

**Author(s):** Le Xuan Dai<sup>1</sup> and Duong Hung Manh<sup>1,2\*</sup>

**Affiliation(s):** <sup>1</sup>Vietnam National University Ho Chi Minh City; <sup>2</sup>Can Tho University of Technology

### TÓM TẮT

Trong bài báo này, hệ Lotka-Volterra (LVS) được nghiên cứu. Dưới một số điều kiện ràng buộc không gian, các tính chất định tính của các điểm cân bằng và kiểm tra các điều kiện cho sự cùng tồn tại của hai loài qua các phương trình vi phân thường đối với LVS được trình bày. Hơn nữa, các yếu tố ảnh hưởng đến sự tồn tại hoặc tuyệt chủng của hai loài được kiểm tra và cho các ví dụ số để làm sáng tỏ các kết quả lý thuyết đạt được thông qua quỹ đạo của đường cong nghiệm và hình ảnh của trường vector xung quanh các điểm cân bằng.

**Từ khóa:** Điểm cân bằng, hệ Lotka-Volterra, lý thuyết định tính, cùng tồn tại

### ABSTRACT

In this paper, the Lotka-Volterra system (LVS) is studied. Under some conditions of space forcing terms, the qualitative properties of equilibrium points was stated and the conditions for the coexistence of the two species of the ordinary differential equations for LVS are examined. Furthermore, the factors that influence the survival or extinction of the two species are examined and the numerical running examples are given to elucidate the theoretical results obtained through visualization of trajectory of the solution curve and the surrounding vector field balance points.

**Keywords:** Coexistence, equilibrium points, Lotka-Volterra system, qualitative theory

## 1. GIỚI THIỆU

Trong thế giới tự nhiên, vấn đề số lượng cá thể luôn là sự quan tâm hàng đầu của các nhà nghiên cứu với rất nhiều mô hình toán học được đưa ra. Một trong những vấn đề đó là bài toán mô hình Lotka-Volterra, một mô hình toán học được sử dụng để mô tả sự tương tác giữa hai loài trong một hệ sinh thái, được đặt tên theo hai nhà toán học-sinh học người Anh-Ý Alfred Lotka và Vito Volterra. Mô hình này

được phát triển độc lập bởi họ vào những năm 1920. Sự quan tâm được đặt vào cả quần thể của con mồi và động vật săn mồi (ăn thịt). Trong bối cảnh của môi trường tự nhiên và chuỗi thức ăn sinh thái, mật độ quần thể của con mồi đang có thể ảnh hưởng đến số lượng động vật săn mồi hiện diện. Ngược lại, số lượng kẻ săn mồi cũng tác động đến sự tồn tại của con mồi trong khu vực. Vì vậy, các phương trình vi phân mô tả quần thể của con mồi hoặc động vật săn mồi liên quan một cách chặt chẽ đến quần thể của

loài kia. Để giải quyết vấn đề này, cần phải giải đồng thời một hệ hai phương trình vi phân để xác định quần thể của cả con mồi và động vật săn mồi, ví dụ như được minh họa ở (Cushing, 1980; Langa et al., 2003; Carvalho et al., 2013; Zhao, 2020; Guo, 2023).

Mô hình Lotka-Volterra cung cấp một cách tiếp cận đơn giản nhưng mạnh mẽ để hiểu quá trình biến động số lượng cá thể giữa các loài săn mồi và con mồi. Các giả định chính của mô hình bao gồm:

Số lượng cá thể không giới hạn, điều này có nghĩa là nếu không có tác động từ loài khác, số lượng cá thể của mỗi loài sẽ tăng vô hạn theo một tốc độ cố định.

Tương tác ăn thịt là số lượng cá thể của loài săn mồi giả sử giảm với tốc độ tỷ lệ thuận với số lượng thợ săn và ngược lại, số lượng cá thể của loài thợ săn giả định tăng với tốc độ tỷ lệ thuận với số lượng loài săn mồi.

Hệ số sinh sản là số lượng cá thể tăng với tốc độ tỷ lệ thuận với số lượng cá thể hiện tại của loài đó.

Tác động tự nhiên có nghĩa số lượng cá thể giả sử giảm với một tốc độ cố định, đại diện cho các yếu tố như kém chất dinh dưỡng, bệnh tật, hay sự cạnh tranh với loài khác ngoài tương tác ăn thịt.

Trong bài báo này, tính chất định tính quanh các điểm cân bằng của hệ LVS được tập trung nghiên cứu, đặc biệt xây dựng điều kiện để hai loài cùng tồn tại và ổn định, đồng thời phân tích tính ổn định tại các điểm cân bằng mà cả hai loài cùng tuyệt chủng hay tại điểm cân bằng mà một trong hai loài bị tuyệt chủng. Bên cạnh đó, ví dụ cụ thể được đưa ra để kiểm chứng các kết quả lý thuyết đã được chứng minh. Một hệ các phương trình vi phân được xem xét nhằm mô tả tương tác phức tạp giữa con mồi và động vật săn mồi với sáu tham số

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}x(t) = \beta_1 \left( 1 - \frac{1}{a_1}x(t) - \frac{b_1}{a_1}y(t) \right)x(t) \\ \qquad \qquad \qquad = f(x, y), \\ \frac{d}{dt}y(t) = \beta_2 \left( 1 - \frac{1}{a_2}y(t) - \frac{b_2}{a_2}x(t) \right)y(t) \\ \qquad \qquad \qquad = g(x, y), \\ x(0) = x_0, y(0) = y_0, t \in \mathbb{R}_+, \end{cases} \quad (1)$$

trong đó  $x(t)$  và  $y(t)$  là các hàm số theo  $t$  thể hiện mật độ của hai loài cạnh tranh và chúng ta có thể giả sử rằng  $x(t)$  và  $y(t)$  là quần thể loài không

âm. Các hằng số  $a_i, b_i, \beta_i, (i = 1, 2)$  đều dương. Ở đây  $\beta_1, \beta_2$  đại diện cho tốc độ tăng trưởng của hai loài và  $b_1, b_2$  đo lường tác động của sự tương tác giữa hai loài. Các hệ số  $a_1, a_2$  là sức chịu đựng của hai loài đối với tác động từ môi trường.

**Định nghĩa 1.1.** Nếu  $f(x, y) = g(x, y) = 0$  tại điểm  $(x_0, y_0)$ , thì  $(x_0, y_0)$  là điểm cân bằng. Đôi khi, nó cũng có thể được gọi là điểm kỳ dị hoặc điểm tới hạn.

Giả sử  $(x_0, y_0)$  là điểm cân bằng của hệ (1), và tồn tại các đạo hàm riêng của  $f(x, y), g(x, y)$  tại  $O(0, 0)$ . Chúng ta có thể sử dụng phép tịnh tiến về gốc tọa độ và áp dụng khai triển Taylor của chúng gần gốc tọa độ như sau:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left( x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \right) + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} g(x, y) &= x \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) + y \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left( x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) + 2xy \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) + y^2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 0) \right) + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Kết hợp (1), (2) và (3) ta được ma trận jacobian

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta suy ra

$$\left( \frac{d}{dt}x, \frac{d}{dt}y \right)^T = J(x, y)^T, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (5)$$

Bây giờ chúng ta giải (5), giả sử nghiệm có dạng

$$(x(t), y(t)) = C(e^{\lambda t}, e^{\lambda t}), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6)$$

ở đây  $C, \lambda$  là các hằng số, không mất tính tổng quát, trong nội dung bài báo, các giá trị riêng  $\lambda$  chỉ xét là số thực.

Thế (6) vào (5) ta được phương trình đặc trưng

$$\text{char}(\lambda) = |J - \lambda I| = 0, \quad (7)$$

$J$  là ma trận đơn vị, và  $0 = (0, 0)$ . Giải phương trình (7) ta được hai giá trị riêng của  $J$  là

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{trace}(J) \pm \sqrt{(\text{trace}(J))^2 - 4\det(J)}}{2}. \quad (8)$$

Giả sử  $(\text{trace}(J))^2 - 4\det(J) > 0$ , khi đó, hai giá trị riêng  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  là thực, khác không. Hơn nữa chúng ta có hai vector riêng  $\psi_1, \psi_2$  ứng với hai giá trị riêng  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  là độc lập tuyến tính. Suy ra tồn tại một ma trận không suy biến  $\mathfrak{M} = (\psi_1, \psi_2)^T$ . Áp dụng phép biến đổi tuyến tính

$$X = \mathfrak{M}Y^\theta, \tag{9}$$

trong đó  $X = (x, y), Y^\theta = (x^\theta, y^\theta)$ , khi đó (5) trở thành

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}Y^\theta(t) &= \mathfrak{M}^{-1}J\mathfrak{M}Y^\theta(t) \\ &= \mathfrak{M}^{-1}J(\psi_1, \psi_2)^T Y^\theta(t) \\ &= \mathfrak{M}^{-1}(\lambda_1\psi_1, \lambda_2\psi_2)^T Y^\theta(t) \\ &= \mathfrak{D}Y^\theta(t), t \in \mathbb{R}_+, \end{aligned} \tag{10}$$

với  $\mathfrak{D}$  là ma trận đường chéo với các phần tử là  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$ .

**Nhận xét 1.2.** *Phép biến đổi tuyến tính của phương trình (9) không làm thay đổi tính chất định tính của nghiệm, vì vậy chúng ta sẽ xem xét nghiệm của phương trình (10) thay vì phương trình (5).*

Chúng ta viết phương trình (10) lại như sau

$$\frac{d}{dt}x^\theta(t) = \lambda_1 x^\theta(t), \frac{d}{dt}y^\theta(t) = \lambda_2 y^\theta(t). \tag{11}$$

Nếu  $(x_0^\theta, y_0^\theta)$ , là các giá trị ban đầu của  $(x^\theta, y^\theta)$ , thì nghiệm của các phương trình (11) lần lượt là

$$x^\theta(t) = x_0^\theta(t)e^{\lambda_1 t}, y^\theta(t) = y_0^\theta(t)e^{\lambda_2 t}. \tag{12}$$

Từ (12), chúng ta có nhận xét sau:

**Nhận xét 1.3.** *Giả sử  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  là hai giá trị riêng thực phân biệt, ta có ba trường hợp sau:*

i) *Nếu cả hai  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  đều âm, thì  $x^\theta(t)$  và  $y^\theta(t)$  tiến về gốc toạ độ khi tiến về dương vô cùng. Khi đó, điểm cân bằng  $X$  là một nút ổn định tiệm cận.*

ii) *Nếu cả hai  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  đều dương, thì  $x^\theta(t)$  và  $y^\theta(t)$  tiến tới vô cùng khi  $t$  tiến tới dương vô cùng. Khi đó, điểm cân bằng  $X$  là một nút không ổn định.*

iii) *Nếu  $\lambda_1$  và  $\lambda_2$  trái dấu thì khi  $t$  tiến tới vô cùng thì  $x^\theta(t)$  tiến đến vô cùng trong khi  $y^\theta(t)$  tiến đến gốc toạ độ (hoặc ngược lại). Khi đó, điểm cân bằng  $X$  là điểm yên ngựa và không ổn định.*

## 2. ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU CHO HAI LOÀI CÙNG TỒN TẠI

### 2.1. ĐIỂM CÂN BẰNG CỦA HỆ

Để tìm điểm cân bằng của (1), chúng ta giải  $f(x, y) = 0$  và  $g(x, y) = 0$ , ta được tập các điểm cân bằng

$$\mathfrak{S} = \left\{ \begin{aligned} &O = (0,0), E_1 = (a_1, 0), E_2 = (0, a_2), \\ &E_* = \left( \frac{a_2 - a_1 b_2}{1 - b_1 b_2}, \frac{a_1 - a_2 b_1}{1 - b_1 b_2} \right), b_1 b_2 \neq 1 \end{aligned} \right\}. \tag{12}$$

Trong bài báo này, tập hợp các điểm cân bằng  $\mathfrak{S} \subset \mathbb{R}_+^2$  được xem xét. Tại  $O = (0,0)$  thì cả hai loài điều tuyệt chủng, còn tại  $E_1 = (a_1, 0)$  và  $E_2 = (0, a_2)$  thể hiện sự tuyệt chủng của ít nhất một trong hai loài. Trong nội dung bài báo này, chúng ta xây dựng điều kiện đối với  $b_1$  và  $b_2$  sao cho điểm cân bằng  $E_* = \left( \frac{a_2 - a_1 b_2}{1 - b_1 b_2}, \frac{a_1 - a_2 b_1}{1 - b_1 b_2} \right)$  có thể dẫn đến sự cùng tồn tại ổn định của hai loài.

### 2.2. Phân tích tính ổn định tại điểm cân bằng

Tính chất định tính được kiểm tra tại các điểm cân bằng của hệ (1)

**Định lý 2.1.** *Cho  $a_1, a_2, b_1, b_2$  là những số dương và  $b_1, b_2$  khác 1, ta có những khẳng định sau đây.*

i) *Điểm cân bằng  $O = (0,0)$  luôn là nút không ổn định.*

ii) *Nếu  $b_2 > \frac{a_2}{a_1}$  thì điểm cân bằng  $E_1 = (a_1, 0)$  là nút ổn định tiệm cận.*

iii) *Nếu  $b_1 > \frac{a_1}{a_2}$  thì điểm cân bằng  $E_2 = (0, a_2)$  là nút ổn định tiệm cận.*

**Định lý 2.2.** *Cho  $a_1, a_2, b_1, b_2$  là những số dương và  $b_1, b_2$  khác 1, ta có những khẳng định sau đây:*

i) *Nếu  $b_2 < \frac{a_2}{a_1}$  thì điểm cân bằng  $E_1 = (a_1, 0)$  là điểm yên ngựa không ổn định.*

ii) *Nếu  $b_1 < \frac{a_1}{a_2}$  thì điểm cân bằng  $E_2 = (0, a_2)$  là điểm yên ngựa không ổn định.*

**Định lý 2.3** (Điều kiện tối ưu cho hai loài cùng tồn tại ổn định). *Giả sử  $a_1, a_2, b_1, b_2$  là các hằng số dương và  $E_* = \left( \frac{a_2 - a_1 b_2}{1 - b_1 b_2}, \frac{a_1 - a_2 b_1}{1 - b_1 b_2} \right)$ , ta có các kết luận sau*

i) Nếu  $b_1 > \frac{a_1}{a_2}$  và  $b_2 > \frac{a_2}{a_1}$  thì điểm cân bằng

$E_* = \left( \frac{a_2 - a_1 b_2}{1 - b_1 b_2}, \frac{a_1 - a_2 b_1}{1 - b_1 b_2} \right)$  là điểm yên ngựa không ổn định.

ii) Nếu  $b_1 < \frac{a_1}{a_2}$  và  $b_2 < \frac{a_2}{a_1}$  thì điểm cân bằng

$E_* = \left( \frac{a_2 - a_1 b_2}{1 - b_1 b_2}, \frac{a_1 - a_2 b_1}{1 - b_1 b_2} \right)$  là nút ổn định tiệm cận.

Từ Định lý 2.3 ta thấy, để hai loài trong quần thể cùng tồn tại và ổn định thì ta cần điều khiển tham số  $a_1, a_2, b_1, b_2$  thỏa mãn ii) của Định lý 2.3.

### 3. CHỨNG MINH ĐỊNH LÝ

*Chứng minh Định lý 2.1.* Tại gốc tọa độ  $O = (0,0)$  ta thực hiện tuyến tính hoá theo công thức

$$x^* = x - 0, \quad y^* = y - 0$$

ta suy ra ma trận jacobian

$$J = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 \\ 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Khi đó, giá trị riêng của  $J$  là  $\lambda_1 = \beta_1, \lambda_2 = \beta_2$  đều dương, vì vậy  $O = (0,0)$  là nút không ổn định. Từ đó ta được chứng minh i).

Tại điểm cân bằng  $E_1 = (a_1, 0)$ , sử dụng phép biến đổi

$$x^* = x - a_1, \quad y^* = y - 0$$

ta được

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x^*(t) = \beta_1 \left( 1 - \frac{1}{a_1} (x^* + a_1) - \frac{b_1}{a_1} y^* \right) \\ \quad \quad \quad (x^* + a_1), \\ \frac{d}{dt} y^*(t) = \beta_2 \left( 1 - \frac{1}{a_2} y^* - \frac{b_2}{a_2} (x^* + a_1) \right) y^*, \\ t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

suy ra

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_1 & -\beta_1 b_1 \\ 0 & \beta_2 \left( 1 - \frac{a_1 b_2}{a_2} \right) \end{pmatrix}.$$

Khi đó, các giá trị riêng là  $\lambda_1 = -\beta_1, \lambda_2 = \beta_2 \left( 1 - \frac{a_1 b_2}{a_2} \right)$ , theo giả thuyết ii) ta có  $b_2 > \frac{a_2}{a_1}$  nên  $1 - \frac{a_1 b_2}{a_2} < 0$ , mà  $\beta_2 > 0$  suy ra  $\lambda_2 < 0$ . Do đó,  $\lambda_1, \lambda_2$  đều âm, điều đó chứng tỏ điểm cân bằng  $E_1 = (a_1, 0)$  là nút ổn định tiệm cận, ta suy ra được ii).

Tại điểm cân bằng  $E_2 = (0, a_2)$ , ta có phép biến đổi sau

$$x^* = x - 0, \quad y^* = y - a_2$$

ta được

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x^*(t) = \beta_1 \left( 1 - \frac{1}{a_1} x^* - \frac{b_1}{a_1} (y^* + a_2) \right) x^*, \\ \frac{d}{dt} y^*(t) = \beta_2 \left( 1 - \frac{1}{a_2} (y^* + a_2) - \frac{b_2}{a_2} x^* \right) (y^* + a_2), \\ t \in \mathbb{R}_+, \end{cases}$$

suy ra

$$J = \begin{pmatrix} \beta_1 \left( 1 - \frac{a_2 b_1}{a_1} \right) & 0 \\ -\beta_2 b_2 & -\beta_2 \end{pmatrix}.$$

Từ  $J$  ta giải phương trình đặc trưng và suy ra được các giá trị riêng  $\lambda_1 = \beta_1 \left( 1 - \frac{a_2 b_1}{a_1} \right), \lambda_2 = -\beta_2$ . Nếu  $b_1 > \frac{a_1}{a_2}$ , suy ra  $\frac{a_2 b_1}{a_1} > 1$ , nên  $1 - \frac{a_2 b_1}{a_1} < 0$ , mà  $\beta_1 > 0$  do đó  $\lambda_1, \lambda_2$  tất cả điều âm, ta được chứng minh iii).  $\square$

*Chứng minh Định lý 2.2.*

Chứng minh tương tự như Định lý 2.1 ta có:

Khi  $b_2 < \frac{a_2}{a_1}$  tại điểm cân bằng  $E_1 = (a_1, 0)$  ta suy ra ma trận jacobian có hai giá trị riêng trái dấu, điều đó chứng tỏ  $E_1 = (a_1, 0)$  là điểm yên ngựa không ổn định, từ đây có được i).

Khi  $b_1 < \frac{a_1}{a_2}$  tại điểm cân bằng  $E_2 = (0, a_2)$  hai giá trị riêng của ma trận Jacobian trái dấu, suy ra  $E_2 = (0, a_2)$  là điểm yên ngựa không ổn định, từ đây suy ra ii).  $\square$

*Chứng minh Định lý 2.3.*

Tại điểm cân bằng  $E_* = \left( \frac{a_2 - a_1 b_2}{1 - b_1 b_2}, \frac{a_1 - a_2 b_1}{1 - b_1 b_2} \right) = (x_e, y_e)$ , trong đó  $x_e$  và  $y_e$  không âm. Ta thực hiện biến đổi theo công thức

$$x^* = x - x_e, \quad y^* = y - y_e$$

thế vào (1) ta được

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} x^*(t) = \beta_1 \left( \frac{a_1 - (x^* + x_e) - b_1 (y^* + y_e)}{a_1} \right) \\ \quad \quad \quad (x^* + x_e), \\ \frac{d}{dt} y^*(t) = \beta_2 \left( \frac{a_2 - (y^* + y_e) - b_2 (x^* + x_e)}{a_2} \right) \\ \quad \quad \quad (y^* + y_e), \\ t \in \mathbb{R}_+. \end{cases} \tag{13}$$

Biến đổi (13) ta suy ra

$$J = \begin{pmatrix} -\beta_1 \frac{a_2 - a_1 b_2}{1 - b_1 b_2} & -\beta_1 \frac{b_1 a_2 (a_2 - a_1 b_2)}{a_1 (1 - b_1 b_2)} \\ -\beta_2 \frac{b_2 a_1 (a_1 - a_2 b_1)}{a_2 (1 - b_1 b_2)} & -\beta_2 \frac{a_1 - a_2 b_1}{1 - b_1 b_2} \end{pmatrix}$$

Khi đó, các giá trị riêng là

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{trace}(J) \pm \sqrt{(\text{trace}(J))^2 - 4\det(J)}}{2}$$

Ta có, nếu  $b_1 < \frac{a_1}{a_2}$  và  $b_2 < \frac{a_2}{a_1}$  thì tất cả  $\lambda_1, \lambda_2$  đều âm, từ đây suy ra điểm cân bằng  $E_* = (x_e, y_e)$  là ổn định tiệm cận, ta được chứng minh i).

Ngược lại nếu  $b_1 > \frac{a_1}{a_2}$  và  $b_2 > \frac{a_2}{a_1}$ , các giá trị riêng  $\lambda_1, \lambda_2$  trái dấu nên điểm cân bằng  $E_* = (x_e, y_e)$  là điểm yên ngựa không ổn định, đó là chứng minh ii).  $\square$

**Nhận xét 3.1.** Từ các kết quả của **Định lý 2.1**, **Định lý 2.2** và **Định lý 2.3** chúng ta có bảng tổng hợp về tính chất định tính tại các điểm cân bằng như sau:

**Bảng 1. Tính chất định tính của các điểm cân bằng**

Điều kiện	$b_1 < \frac{a_1}{a_2}$ và $b_2 < \frac{a_2}{a_1}$	$b_1 > \frac{a_1}{a_2}$ và $b_2 > \frac{a_2}{a_1}$
<b>Điểm cân bằng</b>		
$O = (0,0)$	Nút không ổn định	Nút không ổn định
$E_1 = (a_1, 0)$	Điểm yên ngựa không ổn định	Nút ổn định tiệm cận
$E_2 = (0, a_2)$	Điểm yên ngựa không ổn định	Nút ổn định tiệm cận
$E_* = (x_e, y_e)$	Nút ổn định tiệm cận	Điểm yên ngựa không ổn định

#### 4. MÔ PHỎNG BẢNG SỐ KẾT QUẢ LÝ THUYẾT

##### 4.1. Trường hợp $b_1 < \frac{a_1}{a_2}$ và $b_2 < \frac{a_2}{a_1}$

Xét trường hợp  $b_1 < \frac{a_1}{a_2}$  và  $b_2 < \frac{a_2}{a_1}$ , khi cho các giá trị tham số  $a_1 = 2, a_2 = 1, b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{4}, \beta_1 = \beta_2 = 1$ .

Trong Hình 1, ta có các đường  $x$ -nullclines và  $y$ -nullclines cắt nhau tại  $O = (0,0), E_1 = (2,0), E_2 = (0,1)$  và  $E_* = (1.739, 0.783)$ . Ở mỗi điểm cắt tạo thành bốn vùng mặt phẳng. Dễ dàng quan sát được tại gốc tọa độ  $O = (0,0)$  quỹ đạo các đường cong nghiệm của hệ tại các vùng (II, III, VIII, IX) đều hướng ra khi  $t \rightarrow +\infty$ , do đó điểm cân bằng  $O = (0,0)$  là nút không ổn định.

Tại  $E_1 = (2,0)$ , ta có tại vùng (I) quỹ đạo đường cong nghiệm di chuyển từ phải sang trái rồi lên trên, vùng (II) quỹ đạo đường cong nghiệm di chuyển từ trái sang phải rồi lên trên, vùng (III) quỹ đạo đường cong nghiệm từ trái sang phải rồi đi xuống, vùng (IV) đi từ phải sang trái rồi đi xuống, điều này cho thấy điểm cân bằng  $E_1 = (2,0)$  là điểm yên ngựa và không ổn định.

Phân tích tương tự  $E_1 = (2,0)$ , ta cũng có điểm cân bằng  $E_2 = (0,1)$  là điểm yên ngựa và không ổn định.

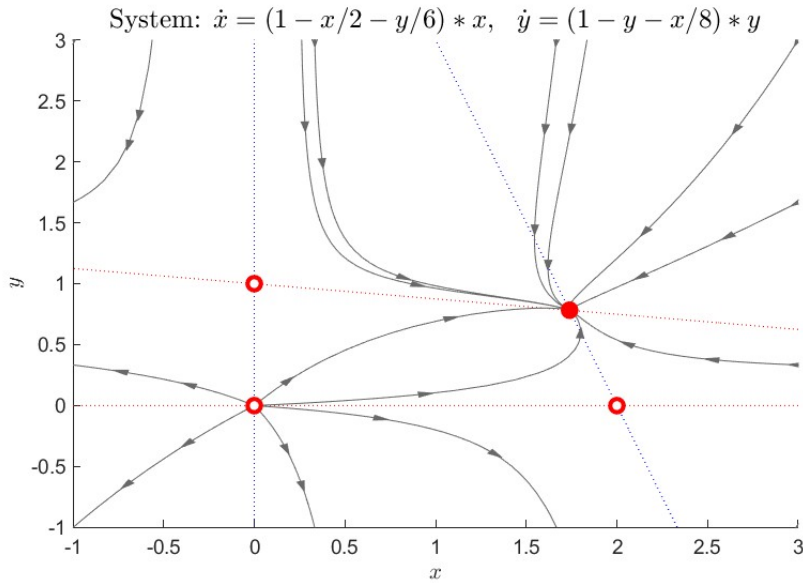
Bây giờ ta phân tích tính chất ổn định tại điểm cân bằng mà cả hai loài (con mồi và thú ăn thịt) cùng tồn tại. Ta có, tại  $E_* = (1.739, 0.783)$ , tất cả bốn vùng (I, II, V, VII) quỹ đạo nghiệm của hệ đều hướng về điểm cân bằng  $E_* = (1.739, 0.783)$  từ mọi hướng, điều đó chứng tỏ điểm cân bằng  $E_* = (1.739, 0.783)$  là nút ổn định tiệm cận.

Trong Hình 2, quỹ đạo của trường vector quanh các điểm cân bằng được mô tả. Ta thấy, tại điểm cân bằng  $O = (0,0)$  các vector trong vùng (II, III, VIII, IX) đều hướng ra, nên tại  $O = (0,0)$  cũng thể hiện tính chất là không ổn định.

Tại  $E_1 = (2,0)$  các vector trong vùng (I) hướng từ phải sang trái và đi lên, vùng (II) các vector hướng từ trái sang phải và đi lên, vùng (III) các vector hướng từ trái sang phải và đi xuống, còn tại vùng (IV) hướng từ phải sang trái và đi xuống. Điều đó dẫn đến tại điểm cân bằng  $E_1 = (2,0)$  là điểm yên ngựa và không ổn định.

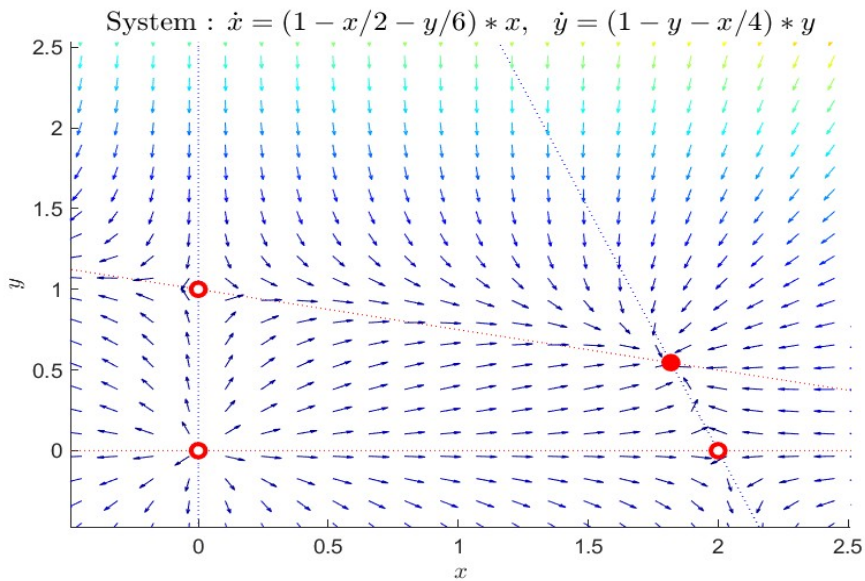
Phân tích tương tự  $E_1 = (2,0)$ , tại điểm cân bằng  $E_2 = (0,1)$ , ta cũng kết luận là điểm yên ngựa và không ổn định.

Trong khi đó, tại điểm cân bằng  $E_* = (1.739, 0.783)$  hình ảnh trường vector tại các vùng (I, II, V, VII) đều hướng về  $E_* = (1.739, 0.783)$ , điều đó có nghĩa là khi  $t \rightarrow +\infty$  thì  $x(t) \rightarrow 0$  và  $y(t) \rightarrow 0$ , suy ra điểm cân bằng  $E_* = (1.739, 0.783)$  là nút ổn định tiệm cận.



**Hình 1. Quỹ đạo nghiệm của hệ quanh điểm cân bằng**

Kết quả thực nghiệm cho trường hợp  $b_1 < \frac{a_1}{a_2}, b_2 < \frac{a_2}{a_1}, a_1 = 2, a_2 = 1, b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{4}, \beta_1 = \beta_2 = 1$



**Hình 2. Quỹ đạo của trường vector quanh điểm cân bằng**

Kết quả thực nghiệm cho trường hợp  $b_1 < \frac{a_1}{a_2}, b_2 < \frac{a_2}{a_1}, a_1 = 2, a_2 = 1, b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{1}{4}, \beta_1 = \beta_2 = 1$

**4.2. Trường hợp  $b_1 > \frac{a_1}{a_2}$  và  $b_2 > \frac{a_2}{a_1}$**

Ta xét trường hợp  $b_1 > \frac{a_1}{a_2}$  và  $b_2 > \frac{a_2}{a_1}$ , khi cho các giá trị tham số  $a_1 = a_2 = 1, b_1 = b_2 = \frac{4}{3}, \beta_1 = \beta_2 = 1$ .

Hình 3. Ta có các đường  $x$ -nullclines và  $y$ -nullclines cắt nhau tại  $O = (0,0), E_1 = (1,0), E_2 = (0,1)$  và  $E_* = (0.4,0.4)$ . Ở mỗi điểm cắt cũng tạo thành bốn vùng mặt phẳng. Dễ dàng quan sát được tại gốc tọa độ  $O = (0,0)$  quỹ đạo các đường cong nghiệm của hệ tại các vùng (V, VI, VII, IX) đều hướng ra, hay  $t \rightarrow +\infty$ , thì  $x(t) \rightarrow \infty$  và  $y(t) \rightarrow \infty$ . Do đó, điểm cân bằng  $O = (0,0)$  ở trạng thái không ổn định.

Tại  $E_1 = (1,0)$ , ta có quỹ đạo đường cong nghiệm của hệ trong vùng (I, II, VIII, IX) tất cả hướng vào  $E_1 = (1,0)$ . Do đó, nếu  $t \rightarrow +\infty$  thì  $x(t) \rightarrow 0$  và  $y(t) \rightarrow 0$ . Suy ra điểm cân bằng  $E_1 = (1,0)$  là nút ổn định tiệm cận.

Tại  $E_2 = (0,1)$  quỹ đạo các đường cong nghiệm của hệ trong các vùng (II, III, IV, IX) cũng giống

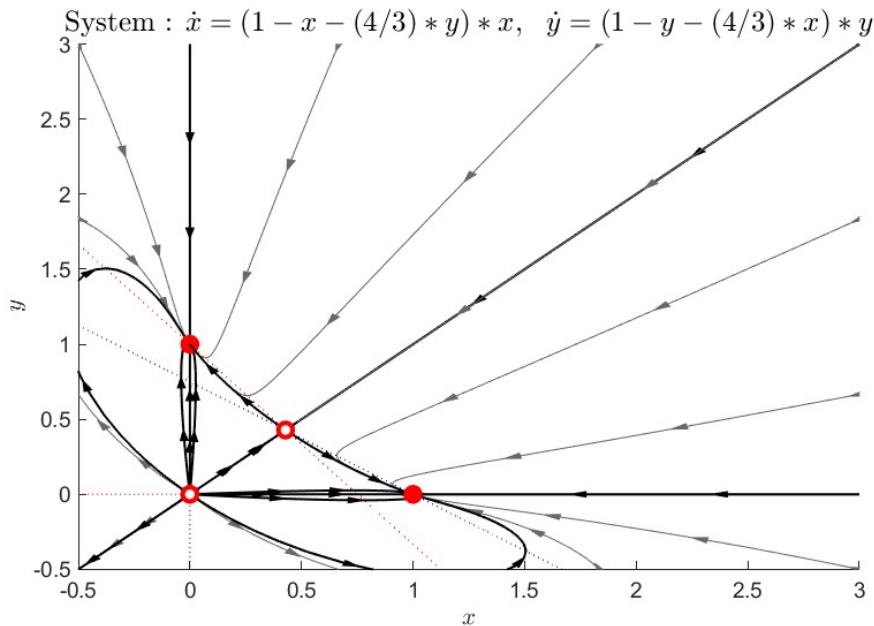
như tại  $E_1 = (1,0)$ , tức là đều hướng vào  $E_2 = (0,1)$  nên  $E_2 = (0,1)$  là nút ổn định tiệm cận.

Tại  $E_* = (0.429,0.429)$ , ta có quỹ đạo các đường cong nghiệm của hệ trong các vùng (II, IV, VIII, IX) như sau:

Trong vùng (II), quỹ đạo các đường cong nghiệm của hệ đi từ phải sang trái rồi đi lên, vùng (IV) quỹ đạo các đường cong nghiệm của hệ đi từ trái sang phải rồi xoắn lên, vùng (IX) thì chia làm hai miền, một miền quỹ đạo các đường cong nghiệm của hệ đi từ trái sang phải rồi xoắn lên, và một miền quỹ đạo các đường cong nghiệm của hệ đi từ trái sang phải rồi xoắn xuống. Điều đó chứng tỏ điểm cân bằng  $E_* = (0.429,0.429)$  là điểm yên ngựa và không ổn định.

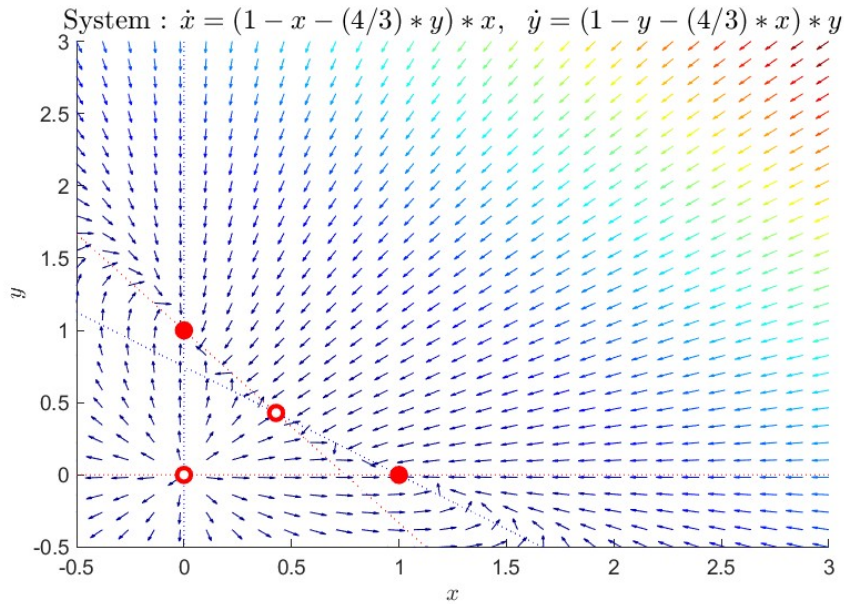
Hình 4. Qua hình ảnh trường vector ta có cách giải thích tương tự như cách giải thích trong Hình 2. Từ đó dẫn đến kết luận sau:

Tại điểm cân bằng  $O = (0,0)$  nút không ổn định, tại  $E_1 = (1,0)$  và  $E_2 = (0,1)$  nút ổn định tiệm cận, còn  $E_* = (0.429,0.429)$  là điểm yên ngựa và không ổn định



**Hình 3. Quỹ đạo nghiệm của hệ quanh điểm cân bằng**

Kết quả thực nghiệm cho trường hợp  $b_1 > \frac{a_1}{a_2}, b_2 > \frac{a_2}{a_1}, a_1 = a_2 = 1, b_1 = b_2 = \frac{4}{3}, \beta_1 = \beta_2 = 1$



Hình 4. Quỹ đạo của trường vector quanh điểm cân bằng

Kết quả thực nghiệm cho trường hợp  $b_1 > \frac{a_1}{a_2}, b_2 > \frac{a_2}{a_1}, a_1 = a_2 = 1, b_1 = b_2 = \frac{4}{3}, \beta_1 = \beta_2 = 1$ .

### 5. KẾT LUẬN

Sự hình thành quần thể và sự tồn tại lâu dài của chúng bằng cách nào đó có liên quan đến các nhân tố giúp chúng ổn định. Trong bài báo này, một mô hình động vật ăn thịt-con mồi được xem xét với những kẻ săn mồi tổng quát có khả năng thể hiện ổn định sáu tham số. Các trường hợp ổn định được phân tích tương đối đầy đủ tại các điểm cân bằng mà cả hai loài cùng tuyệt chủng, cũng như tại điểm cân bằng mà chỉ một trong hai loài tồn tại. Đặc biệt, các tham số được điều khiển trong mô hình một cách tối

ưu để cả hai loài cùng tồn tại. Đó là cơ sở để nghiên cứu quần thể trong thế giới tự nhiên, giúp cho quần thể tồn tại ổn định. Các ví dụ cụ thể được sử dụng để phân tích và cho thấy đầy đủ kết quả lý thuyết chứng minh được qua hình ảnh quỹ đạo nghiệm và hình ảnh trường vector.

### LỜI CẢM ƠN

Chúng tôi xin cảm ơn Trường Đại học Bách Khoa, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh đã hỗ trợ cho nghiên cứu này.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

Carvalho, A. N., Langa, J. A., & Robinson, J. C. (2013). *A non-autonomous competitive Lotka-Volterra system*. In: *Attractors for infinite-dimensional non-autonomous dynamical systems*. *Appl. Math. Sci*, 182, Springer, New York. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4581-4>

Cushing, J. M. (1980). Two species competition in a periodic environment. *J. Math. Biol*, 10, 385–400. <https://doi.org/10.1007/BF00276097>

Langa, J. A., Robinson, J. C., & Suarez, A. (2003). Forwards and pullback behaviour of a non-autonomous Lotka-Volterra system. *Nonlinearity*, 16, 1277–1293. <https://doi.org/10.1088/0951-7715/16/4/305>

Zhao, J. (2020). Complexity and chaos control in a discrete-time Lotka-Volterra predator-prey system. *J. Differ. Equ. Appl.*, 26(9-10), 1303–1320. <https://doi.org/10.1080/10236198.2020.1825702>

Guo, S. (2023). Global dynamics of a Lotka-Volterra competition-diffusion system with nonlinear boundary conditions. *J. Differ. Equ*, 352, 308–353. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.01.010>