Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.254

GIỚI HẠN PHƯƠNG SAI CHO BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN TRONG KHÔNG GIAN $a\mathbb{Z}$

Lâm Hoàng Chương[1*], Nguyễn Văn Trường[2], Nguyễn Thị Huỳnh Như [2], Phan Thị Mỹ Hằng[2] và Nguyễn Cẩm Nhiêm[3]
[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Lớp Toán ứng dụng Khóa 46, Trường Đại học Cần Thơ*
[3]*Trường Đại học FPT Cần Thơ*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): lhchuong@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 29/08/2023
Sửa bài (Revised): 20/09/2023
Duyệt đăng (Accepted): 25/09/2023

***Title:** Limit of variance for random walk in space $a\mathbb{Z}$*

***Author(s):** Lam Hoang Chuong[1*], Nguyen Van Truong[2], Nguyen Thi Huynh Nhu[2], Phan Thi My Hang[2] and Nguyen Cam Nhiem[3]*

***Affiliation(s):** [1,2]Can Tho University; [3]FPT University, Can Tho*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, mô hình bước đi ngẫu nhiên trong không gian $a\mathbb{Z}$ sẽ được xem xét. Đầu tiên, phương trình Poisson liên kết với toán tử Markov P được giải để tìm nghiệm riêng của nó. Sau đó, phương sai của biến ngẫu nhiên sẽ được tìm dựa vào tính chất nghiệm của phương trình ở trên. Cuối cùng, giới hạn của phương sai sẽ được tính để đạt được kết quả mong muốn.

***Từ khoá:** Bước đi ngẫu nhiên, phương trình Poisson, phương sai, toán tử Markov*

ABSTRACT

In this paper, a random walk model in space $a\mathbb{Z}$ will be considered. First, the Poisson equation associated with the Markov operator P is solved to find its solution. Then, the variance of the random walk will be found based on the property of the solution of the above equation. Finally, the limit of variance will be calculated to obtain the desired result.

***Keywords:** Markov operator, Poisson equation, Random walk, variance*

1. GIỚI THIỆU

Bước đi ngẫu nhiên là một quá trình ngẫu nhiên cơ bản trong nghiên cứu lý thuyết xác suất, đồng thời đóng vai trò rất quan trọng việc ứng dụng vào các mô hình khác nhau như sự chuyển động ngẫu nhiên của các chất điểm trong vật lý, lý thuyết trò chơi trong kinh tế hay sự lan truyền virus trong y học,… Do đó, đây là một đối tượng được rất nhiều nhà toán học quan tâm, đặc biệt là nghiên cứu bước đi ngẫu nhiên trong không gian một chiều. Một câu hỏi lớn thường được đặt ra là dáng điệu tiệm cận phân phối xác suất của bước đi ngẫu nhiên sẽ như thế nào khi thời gian đủ lớn và các trạng thái của nó có hồi quy hay không? Trường hợp bước đi ngẫu nhiên cân bằng, tức là xác suất chuyển sang trái và sang phải bằng nhau, ta thu được định lý giới hạn trung tâm và các trạng thái là hồi quy. Trường hợp bước đi ngẫu nhiên không cân bằng, tức là xác suất chuyển sang trái và sang phải khác nhau, ta thu được luật số lớn và các trạng thái là không hồi quy (xem thêm chi tiết trong Chương và ctv., 2017, 2021; Chương, 2021; Norris, 1998; và Ross, 2010).

Trong phạm vi bài báo này, mô hình bước đi ngẫu nhiên không cân bằng được nghiên cứu tổng quát hơn trong Chương và ctv. (2017) và Chương (2021), đồng thời giới hạn phương sai được chỉ ra.

Cụ thể, xét bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ trong không gian trạng thái $a\mathbb{Z}$ với điều kiện ban đầu là $X_0 = 0$ và các xác suất chuyển được cho bởi các biểu thức sau

$$P(X_{n+1} = k + a \mid X_n = k) = \beta,$$
$$P(X_{n+1} = k|X_n = k) = 1 - \beta - \gamma,$$
$$P(X_{n+1} = k - a|X_n = k) = \gamma,$$

trong đó $0 < \gamma < \beta$ và $\beta + \gamma \leq 1$. Đây cũng là một xích Markov với thời gian và không gian trạng thái rời rạc.

Thông thường để nghiên cứu xích Markov người ta hay sử dụng toán tử Markov liên kết với rất nhiều tính chất quan trọng. Ta nhắc lại như sau:

Định nghĩa 1.1 *Cho $(Z_n)_{n\geq 0}$ là một xích Markov với không gian trạng thái $a\mathbb{Z}$. Toán tử Markov P được xác định bởi*

$$Pf(Z_n) = E[f(Z_{n+1})|Z_n], n \geq 0, \qquad (1)$$

trong đó f là hàm xác định trên $a\mathbb{Z}$.

Áp dụng công thức (1) cho bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$, cũng là xích Markov, ta thu được biểu thức

$$Pf(k) = E[f(Z_{n+1})|Z_n = k]$$
$$= \beta[f(k+a) - f(k)] - \gamma[f(k) - f(k-a)]$$
$$+f(k)$$

hay tương đương

$$Pf(k) - f(k) = \beta[f(k+a) - f(k)]$$
$$-\gamma[f(k) - f(k-a)].(2)$$

Trong các bài báo, Chương và ctv. (2017) và Chương (2021) đã đưa ra mô hình bước đi ngẫu nhiên chỉ có dịch chuyển sang phải 1 đơn vị và sang trái 1 đơn vị với xác suất khác nhau. Khi đó một dạng của luật số lớn được chỉ ra. Trong trường hợp bước đi ngẫu nhiên cân bằng, Chương và ctv. (2021) đã chứng minh sự tồn tại của định lý giới hạn trung tâm.

Như vậy mô hình trong bài báo đang xét tổng quát hơn trong Chương và ctv. (2017) và Chương (2021). Cụ thể, chúng ta xét trường hợp bước đi ngẫu nhiên không cân bằng với không gian trạng thái $a\mathbb{Z}$. Kết quả đạt được trong bài báo liên quan đến giới hạn cho phương sai của biến ngẫu nhiên.

Định lý 1.1 *Cho $(X_n)_{n\geq 0}$ là bước đi ngẫu nhiên cân bằng như trên. Khi đó ta có*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{V(X_n)}{n} = a^2[\beta + \gamma - (\beta - \gamma)^2]$$

trong đó $V(X_n)$ là phương sai của X_n.

2. PHƯƠNG TRÌNH POISSON

Một công cụ rất hữu hiệu trong nghiên cứu kỳ vọng của biến ngẫu nhiên đó là sử dụng toán tử Markov cùng với tính chất của kỳ vọng có điều kiện. Phương pháp này cũng đã được nghiên bước đi ngẫu nhiên trong môi trường ngẫu nhiên trong các bài báo của Depauw and Derrien (2009) và Lam (2014). Ta xét phương trình hàm có dạng

$$Pf(m) - f(m) = 1, \qquad (3)$$

trong đó hàm số f xác định trên tập $a\mathbb{Z}$, với điều kiện biên $f(0) = 0$. Đây còn được gọi là phương trình Poisson tương ứng với toán tử P. Điểm đặc biệt của phương trình này là nghiệm của nó có những tính chất giúp ta tính trực tiếp kỳ vọng của biến ngẫu nhiên X_n với mọi $n \geq 0$.

Ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.1 *Phương trình (3) luôn có nghiệm f xác định trên tập $a\mathbb{Z}$.*

Chứng minh. Ngoài việc chứng minh sự tồn tại nghiệm, ta sẽ chỉ ra một nghiệm cụ thể của phương trình đã cho. Áp dụng công thức (2) ta được

$$\beta[f(m+a) - f(m)] - \gamma[f(m) - f(m-a)] = 1.$$

Đặt $\rho = \gamma/\beta$ thì $\rho \in (0;\ 1)$. Phương trình ở trên trở thành

$$f(m+a) - f(m) - \rho[f(m) - f(m-a)] = \frac{1}{\beta}.$$

Đặt hàm $\varphi(m) = f(m) - (m-a)$ với $m \in a\mathbb{Z}$. Phương trình ở trên có thể được viết lại theo hàm số φ như sau:

$$\varphi(m+a) - \rho\varphi(m) = \frac{1}{\beta}.$$

Đệ quy theo $m-a, m-2a, \ldots, -\infty$ ta được

$$\varphi(m) - \rho\varphi(m-a) = 1/\beta$$
$$\rho\varphi(m-a) - \rho^2\varphi(m-2a) = \rho.1/\beta$$
$$\rho^2\varphi(m-2a) - \rho^3\varphi(m-3a) = \rho^2.1/\beta$$
$$\vdots$$

Từ đó ta xác định được hàm số φ theo biểu thức dưới đây

$$\varphi(m) = \frac{1}{\beta(1-\rho)}$$

với mọi $m \in a\mathbb{Z}$. Theo định nghĩa hàm số φ, điều này tương đương với

$$f(m) - (m-a) = \frac{1}{\beta(1-\rho)}$$

với mọi $m \in a\mathbb{Z}$. Kết hợp với điều kiện $f(0) = 0$ ta có kết quả

$$f(m) = \frac{m}{a\beta(1-\rho)} \quad (4)$$

với mọi $m \in a\mathbb{Z}$. ■

Bổ đề 2.2 *Giả sử hàm số f là nghiệm của phương trình (3). Khi đó, ta có*

$$E[f(X_n)] = n, \text{với mọi } n \geq 0. \quad (5)$$

Chứng minh. Ta có

$$Pf(X_n) - f(X_n) = 1$$

với mọi $n \geq 0$.

Áp dụng công thức (1) ta được

$$E[f(X_{n+1})|X_n] - f(X_n) = 1,$$

với mọi $n \geq 0$. Lấy kỳ vọng hai vế, đồng thời áp dụng tính chất của kỳ vọng có điều kiện, dẫn đến kết quả

$$E[f(X_{n+1})] - E[f(X_n)] = 1,$$

với mọi $n \geq 0$.

Theo giả thiết của mô hình bước đi ngẫu nhiên đang xét thì $X_0 = 0$ nên $f(X_0) = f(0) = 0$. Đệ quy đẳng thức trên theo $n-1, n-2, \ldots, 0$ ta có điều phải chứng minh. ■

Mệnh đề 2.3 *Với bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ được xác định như trong phần mở đầu, ta luôn có*

$$E(X_n) = a\beta(1-\rho)n \quad (6)$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Áp dụng công thức (4) cho X_n ta được biểu thức sau

$$f(X_n) = \frac{X_n}{\Delta}.$$

vì X_n cũng nhận giá trị trong tập không gian trạng thái $a\mathbb{Z}$, trong đó $\Delta = a\beta(1-\rho)$.

Lấy kỳ vọng hai vế rồi áp dụng công thức (5) ta có kết quả là

$$E\left[\frac{X_n}{\Delta}\right] = n, \text{ với mọi } n \geq 0,$$

hay tương đương với điều phải chứng minh. ■

3. PHƯƠNG SAI CỦA BƯỚC ĐI NGẪU NHIÊN

Ta nhắc lại định nghĩa phương sai của biến ngẫu nhiên như sau

Định nghĩa 3.1 *Phương sai của biến ngẫu nhiên X được cho bởi công thức*

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

nếu giá trị của vế phải tồn tại.

Áp dụng công thức tính phương sai cho X_n, đồng thời kết hợp công thức (6) ta được

$$\begin{aligned} V(X_n) &= E({X_n}^2) - E(X_n)^2 \\ &= E({X_n}^2) - [\Delta n]^2. \end{aligned}$$

Trong phần tiếp theo, ta sẽ tính giá trị của $E({X_n}^2)$ thông qua toán tử Markov P và phương trình Poisson. Tương tự phần trước, ta sẽ tìm nghiệm của phương trình hàm

$$Pg(m) - g(m) = \frac{m}{\Delta} \quad (7)$$

với mọi $m \in a\mathbb{Z}$ và thỏa điều kiện biên $g(0) = 0$.

Ta có các bổ đề sau

Bổ đề 3.2 *Chuỗi số sau luôn hội tụ*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\rho^k = \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

với mọi số thực $\rho \in (0;\ 1)$.

Chứng minh. Ta xem ρ là một biến số trong chuỗi hàm. Áp dụng tính chất đạo hàm theo biến ρ của hàm ρ^{k+1} ta được

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\rho^k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\rho} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^{k+1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\rho}\left(\frac{\rho}{1-\rho}\right).$$

Kết quả này dẫn đến điều phải chứng minh. ■

Bổ đề 3.3 *Phương trình (7) luôn có nghiệm g xác định trên tập $a\mathbb{Z}$.*

Chứng minh. Áp dụng công thức (2) ta được

$$g(m+a) - g(m) - \rho[g(m) - g(m-a)] = \frac{m}{\beta\Delta}.$$

Đặt hàm $h(m) = g(m) - g(m-a)$. Phương trình ở trên trở thành

$$h(m+a) - \rho h(m) = \frac{m}{\beta\Delta}.$$

Đệ quy theo $m-a, m-2a, \dots, -\infty$ ta được

$$h(m) - \rho h(m-a) = \frac{m-a}{\beta\Delta}$$

$$\rho h(m-a) - \rho^2 h(m-2a) = \rho\frac{m-2a}{\beta\Delta}$$

$$\rho^2 h(m-2a) - \rho^3 h(m-3a) = \rho^2\frac{m-3a}{\beta\Delta}$$

$$\vdots$$

Từ đó ta thu được

$$h(m) = \frac{m}{\beta(1-\rho)\Delta} - \frac{a}{\beta\Delta}\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\rho^k$$

với mọi $m \in a\mathbb{Z}$. Áp dụng giá trị của chuỗi hàm trong Bổ đề 3.2 ta có

$$h(m) = \frac{m}{\beta(1-\rho)\Delta} - \frac{a}{\beta(1-\rho)^2\Delta}$$

với mọi $m \in a\mathbb{Z}$. Từ đó ta có

$$g(m) - g(m-a) = \frac{m}{\beta(1-\rho)\Delta} - \frac{a}{\beta(1-\rho)^2\Delta}$$

với mọi $m \in a\mathbb{Z}$. Kết hợp với điều kiện $g(0) = 0$ ta có kết quả

$$g(m) = \frac{m^2}{2\Delta^2} - \frac{m(1+\rho)}{2\beta(1-\rho)^2\Delta} \qquad (8)$$

với mọi $m \in a\mathbb{Z}$. ■

Bổ đề 3.4 *Giả sử hàm số g là nghiệm của phương trình (7). Khi đó, ta có*

$$E[g(X_n)] = \frac{n(n-1)}{2}, \text{với mọi } n \geq 0. \qquad (9)$$

Chứng minh. Ta nhắc lại nghiệm của phương trình (3) được cho trong Bổ đề 2.1 là

$$f(m) = \frac{m}{a\beta(1-\rho)}$$

với mọi $m \in a\mathbb{Z}$. Khi đó ta có

$$Pg(X_n) - g(X_n) = f(X_n)$$

với mọi $n \geq 0$.

Áp dụng công thức (1.1) ta được

$$E[g(X_{n+1})|X_n] - g(X_n) = f(X_n),$$

với mọi $n \geq 0$. Lấy kỳ vọng hai vế dẫn đến kết quả

$$E[g(X_{n+1})] - E[g(X_n)] = E[f(X_n)] = n,$$

với mọi $n \geq 0$.

Theo giả thiết của mô hình bước đi ngẫu nhiên đang xét thì $X_0 = 0$ nên $g(X_0) = g(0) = 0$. Đệ quy theo $n-1, n-2, \dots, 0$ ta có

$$E[g(X_n)] = 1 + 2 + \dots + (\mathrm{n}-1).$$

Kết quả trên dẫn đến điều phải chứng minh. ■

Mệnh đề 2.5 *Với bước đi ngẫu nhiên $(X_n)_{n\geq 0}$ được xác định như trong phần mở đầu, ta luôn có*

$$E({X_n}^2) = \Delta^2 n^2 + a^2[\beta + \gamma - (\beta-\gamma)^2]n$$

với mọi $n \geq 0$.

Chứng minh. Áp dụng công thức (8) cho X_n ta được biểu thức sau

$$g(X_n) = \frac{{X_n}^2}{2\Delta^2} - \frac{X_n(1+\rho)}{2\beta(1-\rho)^2\Delta}$$

vì X_n cũng nhận giá trị trong tập $a\mathbb{Z}$.

Lấy kỳ vọng hai vế rồi áp dụng công thức (9) ta có kết quả là

$$E\left[\frac{{X_n}^2}{2\Delta^2} - \frac{X_n(1+\rho)}{2\beta(1-\rho)^2\Delta}\right] = \frac{n(n-1)}{2}$$

với mọi $n \geq 0$. Áp dụng kỳ vọng của X_n trong biểu thức (2.4) ta được

$$E({X_n}^2) = n(n-1)\Delta^2 + \frac{(1+\rho)\Delta}{\beta(1-\rho)^2}E(X_n)$$

$$= \Delta^2 n^2 + \left(\frac{(1+\rho)}{\beta(1-\rho)^2} - 1\right)\Delta^2 n$$

với mọi $n \geq 0$. Rút gọn biểu thức sau cùng với các giá trị $\Delta = a\beta(1-\rho)$ và $\rho = \gamma/\beta$ ta được điều phải chứng minh. ■

Cuối cùng để chứng minh Định lý 1.1 ta chỉ cần kết hợp Mệnh đề 2.3 và Mệnh đề 3.5 để tính phương sai của X_n. Cụ thể như sau

$$V(X_n) = a^2[\beta + \gamma - (\beta-\gamma)^2]n.$$

Sau đó chia phương sai cho n rồi tính giới hạn khi cho $n \to +\infty$ thì được kết quả mong muốn.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã tính toán chi tiết giá trị của phương sai và giới hạn của chúng thông qua việc sử dụng toán tử Markov P trong phương trình Poisson. Đây là một dạng phương trình hàm với nghiệm riêng thỏa mãn các điều kiện cần thiết giúp cho việc tính toán kỳ vọng của bước đi ngẫu nhiên được dễ dàng hơn. Từ đó có thể tính được các kỳ vọng bậc cao hơn và đơn giản hơn so với phương pháp xấp xỉ truyền thống. Phương pháp này được kỳ vọng có thể áp dụng cho các quá trình ngẫu nhiên có tính Markov trong không gian một chiều.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Chương, L. H. (2021). Luật số lớn trong mô hình trò chơi không công bằng. *Tạp chí Khoa học Đại học cần Thơ*, *57*(2), 44-48. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.036

Chương, L. H., Tuyền, D. T., & Vân, L. N. T. (2017). Luật số lớn cho bước đi ngẫu nhiên trong trường hợp một chiều. *Tạp chí Khoa học Đại học cần Thơ*, (52), 17-21. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2017.105

Chương, L. H., Lộc, T. P., Kim, L. M., & Tuyền, D. T. (2021). Định lý giới hạn trung tâm trong mô hình trò chơi công bằng. *Tạp chí Khoa học Đại học cần Thơ*, *57*(2), 39-43. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2021.036

Depauw, J., & Derrien, J. M. (2009). Variance limite d'une marche aléatoire réversible en milieu aléatoire sur Z. *Comptes Rendus Mathematique*, *347*(7-8), 401–406. https://doi.org/10.1016/j.crma.2009.01.030

Lam, H. C. (2014). A quenched central limit theorem for reversible random walk in random environment on Z. *Journal of Applied Probability*, *51*(4), 1051-1064. https://doi.org/10.1239/jap/1421763327

Norris, J. R. (1998). Markov chains. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511810633

Ross, S. M. (2010). Introduction to Probability Models. Elsevier Inc. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-375686-2.00007-8