Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2024.252

NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ CHO HỌ CÁC ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Hà Nguyễn Huỳnh Anh, Nguyễn Thị Diễm My và Nguyễn Duy Cường*
Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): ndcuong@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 24/08/2023
Sửa bài (Revised): 17/09/2023
Duyệt đăng (Accepted): 18/09/2023

Title: *Extremal principle for collections of set-valued mappings*

Author(s): *Ha Nguyen Huynh Anh, Nguyen Thi Diem My and Nguyen Duy Cuong**

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu các tính chất cực trị và tính dừng của họ các ánh xạ đa trị. Các tính chất này là dạng mở rộng của các tính chất tương ứng của họ các tập hợp. Nguyên lý cực trị của họ các ánh xạ đa trị được thiết lập thông qua việc sử dụng các công cụ của giải tích biến phân hiện đại. Các kết quả được thiết lập cải tiến kết quả nghiên cứu của Mordukhovich và các cộng sự (2003).

Từ khoá: *Ánh xạ đa trị, dưới vi phân, nguyên lý cực trị, nón pháp tuyến*

ABSTRACT

The paper investigates extremality and stationarity properties of collections of set-valued mappings on metric and normed spaces. These properties are generalizations of the corresponding properties of collections of sets. We establish an extremal principle for collections of set-valued mappings by using conventional techniques of modern variational analysis. The established result improves the work of Mordukhovich et al. (2003).

Keywords: *Extremal principle, normal cone, set-valued mapping, subdifferential*

1. GIỚI THIỆU

Nguyên lý tách tập lồi đóng vai trò quan trọng trong nhiều khía cạnh của giải tích phi tuyến, tối ưu hóa và trong những ứng dụng khác của nó. Nhiều kết quả của giải tích lồi và ứng dụng của lý thuyết này vào các bài toán tối ưu lồi đều có liên quan đến nguyên lý tách lồi. Nguyên lý này cũng có thể được dùng để nghiên cứu các bài toán có dữ liệu không lồi bằng cách sử dụng các tập xấp xỉ lồi (nón tiếp xúc, đạo hàm theo hướng). Tuy nhiên, trong thực tế, có một lớp rất rộng các bài toán không thể vận dụng các tập xấp xỉ lồi hoặc có thể sử dụng được nhưng chưa mang lại những kết quả thỏa đáng. Khi đó, vấn đề đặt ra là có tồn tại hay không một nguyên lý tách các tập không lồi?

Để giải quyết vấn đề tách những tập không lồi, trong những năm 1980, Mordukhovich and Kruger đã đưa những ý tưởng thông qua việc tiếp cận bằng không gian đối ngẫu. Kết quả này được biết dưới tên gọi "nguyên lý cực trị", nguyên lý này được xem là bản sao của nguyên lý tách lồi, áp dụng được cho các tập nói chung là không lồi. Nguyên lý cực trị sử dụng nón pháp tuyến không lồi là cơ sở để xây dựng các quy tắc tính toán. Bản chất của nguyên lý cực trị là thiết lập các điều kiện cần đối ngẫu cho hệ cực trị không lồi. Nguyên lý cực trị được nhiều nhà toán học nghiên cứu theo nhiều hướng khác nhau: hệ vô hạn đếm được và không đếm được các tập, nghiên cứu trong không gian hữu hạn chiều và vô hạn chiều, thiết lập mối quan hệ của nguyên lý này với các nguyên lý quan trọng khác của giải tích biến phân, vận dụng nguyên lý cực trị để thiết lập các điều kiện cần tối ưu trong các bài toán tối ưu đa mục tiêu với các dữ kiệu khác nhau.

Định nghĩa 1.1 (Bui & Kruger, 2019)

Cho $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ là các tập con khác rỗng của không gian định chuẩn *X*, và $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$. Họ tập hợp $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ được gọi là

(i) cực trị tại $\bar{x}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_1, \ldots, x_n \in X$ thỏa $\bigcap_{i=1}^{n}(\Omega_i - x_i) = \emptyset$ và $\max\limits_{1\le i\le n}\|x_i\| < \varepsilon$;

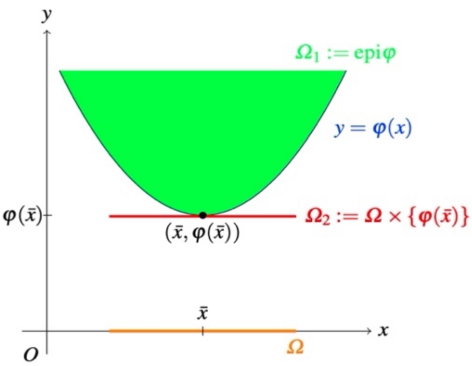
(ii) cực trị địa phương tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\rho > 0$, sao cho với $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_1, \ldots, x_n \in X$ thỏa $\bigcap_{i=1}^{n}(\Omega_i - x_i) \cap B_\rho(\bar{x}) = \emptyset$ và $\max\limits_{1\le i\le n}\|x_i\| < \varepsilon$;

(iii) dừng tại $\bar{x}$ với mọi $\varepsilon > 0$, có tồn tại $\rho \in (0, \varepsilon)$ và $x_1, \ldots, x_n \in X$ thỏa $\bigcap_{i=1}^{n}(\Omega_i - x_i) \cap B_\rho(\bar{x}) = \emptyset$ và $\max\limits_{1\le i\le n}\|x_i\| < \varepsilon\rho$;

(iv) xấp xỉ dừng tại $\bar{x}$ với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\rho \in (0, \varepsilon)$, $\omega_i \in \Omega_i \cap B_\rho(\bar{x})$, $x_1, \ldots, x_n \in X$ thỏa $\bigcap_{i=1}^{n}(\Omega_i - \omega_i - x_i) \cap (\rho B) = \emptyset$ và $\max\limits_{1\le i\le n}\|x_i\| < \varepsilon\rho$.

Ví dụ 1.1

Cho $\varphi: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, và $\bar{x} \in \Omega := [a, b]$. Nếu $\bar{x}$ là điểm cực tiểu địa phương của φ trên Ω, thì $(\bar{x}, \varphi(\bar{x}))$ là điểm cực trị của $\{\Omega_1, \Omega_2\}$.



Hình 1.1 Mối liên hệ giữa nghiệm của bài toán tối ưu với hệ cực trị của họ tập

Nhận xét 1.1 (Bui & Kruger, 2019)

Trong Định nghĩa 1.1, ta có (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv). Trong trường hợp các tập hợp đang xét là lồi, thì các khái niệm trên là tương đương.

Định lý 1.1 (Bui & Kruger, 2019)

Cho $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ là tập con đóng khác rỗng của không gian Asplund *X*, và $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} \Omega_i$. Các khẳng định sau là tương đương:

(i) họ tập hợp $\{\Omega_1, \ldots, \Omega_n\}$ là xấp xỉ dừng tại $\bar{x}$;

(ii) với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\omega_i \in \Omega_i \cap B_\varepsilon(\bar{x})$, $x_i^* \in N_{\Omega_i}(\omega_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ thoả $\|\sum_{i=1}^{n} x_i^*\| < \varepsilon$ và $\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\| = 1$;

(iii) với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\omega_i \in \Omega_i \cap B_\varepsilon(\bar{x})$ và $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ thoả $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = 0$, $\sum_{i=1}^{n} d\left(x_i^*, N_{\Omega_i}(\omega_i)\right) < \varepsilon$, $\sum_{i=1}^{n}\|x_i^*\| = 1$.

Các tính chất trong Định nghĩa 1.1 về cơ bản có chung một bản chất, đó là khi thực hiện phép tịnh tiến rất nhỏ các tập đang xét xung quanh $\bar{x}$, thì các tập mới sẽ có giao bằng rỗng trong lân cận của $\bar{x}$. Từ Ví dụ 1.1 và Định lý 1.1, ta thấy rằng nguyên lý cực trị có thể được dùng để thiết lập điều kiện tối ưu đối ngẫu cho nghiệm của bài toán tối ưu đa mục tiêu. Tuy nhiên, trên thực tế tồn tại một số bài toán xuất hiện trong tối ưu điều khiển (Zhu, 2000) mà nghiệm tối ưu không thể được mô tả dưới dạng điểm cực trị của bất kỳ họ tập nào theo nghĩa của Định nghĩa 1.1. Để giải quyết vấn đề này, Mordukhovich et al. (2003) đã đề xuất khái niệm về hệ cực trị của ánh xạ đa trị, về bản chất, thay vì thực hiện phép tịnh tiến thông thường, các tác giả đã thực hiện phép biến hình phi tuyến.

Định nghĩa 1.2

Cho *X* là không gian định chuẩn, (X_i, d_i) là các không gian mêtric, $F_i: X_i \rightrightarrows X$, $\bar{x}_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, và $\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} F_i(\bar{x}_i)$. Họ $\{F_1, \ldots, F_n\}$ được gọi là

(i) cực trị tại $\bar{x}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ thỏa $\bigcap_{i=1}^{n} F_i(x_i) = \emptyset$ và $\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\} < \varepsilon$;

(ii) cực trị địa phương tại $\bar{x}$ nếu tồn tại $\rho > 0$, sao cho với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ thoả $\bigcap_{i=1}^{n} F_i(x_i) \cap B_\rho(\bar{x}) = \emptyset$ và $\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\} < \varepsilon$;

(iii) dừng tại $\bar{x}$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$, tồn tại $\rho \in (0, \varepsilon)$ và $x_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ thoả $\bigcap_{i=1}^{n} F_i(x_i) \cap B_\rho(\bar{x}) = \emptyset$ và $\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\} < \varepsilon\rho$;

(iv) xấp xỉ dừng $\bar{x}$ nếu với bất kỳ $\varepsilon > 0$, tồn tại $\rho \in (0, \varepsilon)$, $x_i \in X_i$ và $\omega_i \in F_i(\bar{x}_i) \cap B_\varepsilon(\bar{x})$ $(i = 1, \ldots, n)$ thoả $\bigcap_{i=1}^{n}(F_i(x_i) - \omega_i) \cap B_\rho(\bar{x}) = \emptyset$ và $\max\limits_{1\le i\le n}\{d_i(x_i, \bar{x}_i), d(\bar{x}, F_i(x_i))\} < \varepsilon\rho$.

Nhận xét 1.2

(i) Xét $F_i: X \rightrightarrows X$ được định nghĩa bởi $F_i(x_i) \coloneqq \Omega_i - x_i$ với mọi $x_i \in X$ và $\overline{x}_i \coloneqq 0$ $(i = 1, \dots, n)$, ta thấy các khái niệm trong Định nghĩa 1.1 là trường hợp đặc biệt của các khái niệm tương ứng trong Định nghĩa 1.2.

(ii) Trong Định nghĩa 1.2, ta có (i) ⇒ (ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv). Tính chất (i) và (ii) được đề xuất bởi Mordukhovich et al. (2003), các tính chất (iii) và (iv) là mới. Trong mục 3, nguyên lý cực trị của ánh xạ đa trị hoàn toàn có thể được suy ra từ tính xấp xỉ dừng thay vì tính cực trị được nghiên cứu bởi Mordukhovich et al. (2003).

Định nghĩa 1.3

Cho $\prec$ là quan hệ tổng quát trong không gian định chuẩn Y. Tập mức dưới của $y \in Y$ được định nghĩa bởi $L(y) \coloneqq \{z \in Y | z \prec y\}$. Ta nói quan hệ $\prec$ là đóng nếu các tính chất sau được thỏa mãn:

(i) $y \in \operatorname{cl} L(y)$ với mọi $y \in Y$.

(ii) $[y_1 \in \operatorname{cl} L(y_2) \;\&\; y_2 \in \operatorname{cl} L(y_3)] \Rightarrow y_1 \in L(y_3)$ với mọi $y_1, y_2, y_3 \in Y$.

Ví dụ 1.2

Cho $F: X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ giữa các không gian định chuẩn, Y được trang bị một quan hệ $\prec$ đóng. Xét bài toán tối ưu có ràng buộc

$$\text{M: } \min F(x) \text{ với } x \in \Omega,$$

với $\emptyset \neq \Omega \subset X$. Ta nói $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph} F$ là nghiệm tối ưu Pareto địa phương của M nếu tồn tại lân cận U của $\overline{x}$ sao cho $(L(\overline{y}) \cup \{\overline{y}\}) \cap F(U) = \{\overline{y}\}$. Xét $Y_1 \coloneqq L(\overline{y}) \cup \{\overline{y}\}$, $Y_2 \coloneqq \{0\}$, và $F_i: Y_i \rightrightarrows Y \times Y$ $(i = 1,2)$ được định nghĩa bởi $F_1(y) \coloneqq \Omega \times \operatorname{cl} L(y)$ với mọi $y \in Y_1$, $F_2(0) \coloneqq \operatorname{gph} F$. Khi đó ta kiểm tra được rằng nếu $(\overline{x}, \overline{y})$ là nghiệm địa phương của bài toán M thì $\{F_1, F_2\}$ đạt cực trị tại $(\overline{x}, \overline{y})$ với $(\overline{y}, 0)$. Thật vậy, giả sử ngược lại với bất kỳ lân cận V của $(\overline{x}, \overline{y})$, tồn tại $y_1 \in Y_1 \setminus \{\overline{y}\}$ sao cho $F_1(y_1) \cap F_2(0) \cap V \neq \emptyset$. Khi đó tồn tại $(\hat{x}, \hat{y}) \in \operatorname{gph} F$ với $\hat{x} \in \Omega$ và $\hat{y} \in \operatorname{cl} L(y_1)$. Điều này dẫn tới $\hat{y} \prec \overline{y}$, mâu thuẫn với giả thiết cực tiểu của $(\overline{x}, \overline{y}) \in \operatorname{gph} F$.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, X là một không gian mêtric hoặc định chuẩn với khoảng cách được kí hiệu tương ứng là $d(\cdot,\cdot)$ và $\|\cdot\|$. Không gian đối ngẫu của không gian định chuẩn X được kí hiệu là X^*. Ta kí hiệu $B_\delta(x)$ cho hình cầu mở tâm x với bán kính $\delta > 0$. Hình cầu đơn vị mở trong không gian nền và không gian đối ngẫu được ký hiệu lần lượt là B và B^*. Tập hợp các số thực và tập hợp số thực suy rộng được kí hiệu lần lượt là $\mathbb{R}$ và $\mathbb{R}_\infty \coloneqq \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ giữa hai tập hợp X, Y là một ánh xạ mà trong đó với mỗi $x \in X$, ta xác định $F(x)$ là một tập con của Y. Miền hữu hiệu và đồ thị của F được kí hiệu là $\operatorname{dom} F := \{x \in X \mid F(x) \neq \emptyset\}$ và $\operatorname{gph} F := \{\, (x, y) \in X \times Y \mid y \in F(x)\}$. Ánh xạ ngược của F được xác định bởi $F^{-1}(y) := \{x \in X \mid y \in F(x)$ với mọi $y \in Y$. Dễ thấy $\operatorname{dom} F^{-1} = F(X)$.

Cho tập hợp $\Omega \subset X$, khoảng cách từ x đến Ω được định nghĩa là $d(x, \Omega) := \inf_{u \in \Omega} d(u, x)$, và ta quy ước $d(x, \emptyset) = +\infty$. Cho hàm thực suy rộng $f: X \to \mathbb{R}_\infty$, khi đó miền hữu hiệu của f được kí hiệu là $\operatorname{dom} f := \{\, x \in X \mid f(x) < +\infty\,\}$.

Bổ đề 2.1 (Ekeland, 1974)

Cho X là không gian mêtric đủ, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$ là hàm nửa liên tục dưới trên X, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$. Nếu $f(x) < \inf_X f + \varepsilon$, thì khi đó tồn tại $\hat{x} \in X$ thoả:

(i) $d(\hat{x}, x) < \lambda$;

(ii) $f(\hat{x}) \leq f(x)$;

(iii) $f(u) + (\varepsilon/\lambda) d(u, \hat{x}) \geq f(\hat{x}), \forall u \in X$.

Định nghĩa 2.1 (Kruger, 2003)

Cho X là không gian định chuẩn, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$, $x \in \operatorname{dom} f$. Dưới vi phân Fréchet của f tại x, được kí hiệu là $\partial f(x)$, là tập hợp tất cả các phần tử $x^* \in X^*$ thoả

$$\liminf_{x \to \bar{x}} \frac{f(u) - f(x) - \langle x^*, u - x \rangle}{\| u - x \|} \geq 0.$$

Định nghĩa 2.2 (Kruger, 2003)

Cho X là không gian định chuẩn, $\Omega \subset X$, $\bar{x} \in \Omega$. Nón pháp tuyến Fréchet với Ω tại $\bar{x}$, được kí hiệu là $N_\Omega(\bar{x})$, là tập hợp tất cả các phần tử $x^* \in X^*$ thoả

$$\limsup_{\Omega \ni x \to \bar{x}, x \neq \bar{x}} \frac{\langle x^*, x - \bar{x} \rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leq 0.$$

Bổ đề 2.2 (Kruger, 2003)

Cho X là không gian định chuẩn, $x_i \in \Omega_i \subset X$ $(i = 1, \dots, n)$. Khi đó

$$N_{\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n}(x_1, \dots, x_n) = N_{\Omega_1}(x_1) \times \dots \times N_{\Omega_n}(x_n).$$

Bổ đề 2.3 (Kruger, 2003)

Cho X là không gian định chuẩn, $f: X \to \mathbb{R}_\infty$, $x \in \operatorname{dom} f$. Nếu x là một điểm cực tiểu địa phương của f thì $0 \in \partial^F f(x)$.

Bổ đề 2.4 (Fabian, 1989)

Cho X là không gian Asplund, $f_1, f_2: X \to \mathbb{R}_\infty$, $x \in \operatorname{dom} f_1 \cap \operatorname{dom} f_2$. Nếu f_1 là hàm liên tục Lipschitz và f_2 là hàm nửa liên tục dưới trên một lân cận của x. Khi đó với bất kỳ $x^* \in \partial(f_1 + f_2)(x)$ và $\varepsilon > 0$, tồn tại $x_1, x_2 \in X$ với $||x_i - x|| < \varepsilon$ và $|f_i(x_i) - f_i(x)| < \varepsilon$ $(i = 1,2)$ thoả

$$x^* \in \partial f_1(x_1) + \partial f_2(x_2) + \varepsilon B^*.$$

Bổ đề 2.5 (Zălinescu, 2002)

Cho X là không gian định chuẩn, và $\varphi: X^{n+1} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $\varphi(x, x_1, \ldots, x_n) := \max_{1 \le i \le n} \|x_i - x\|$ với mọi $x, x_1, \ldots, x_n \in X$. Cho $\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n \in X$ thoả $\varphi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n) > 0$. Khi đó

$(x^*, x_1^*, \ldots, x_n^*) \in \partial\varphi(\hat{x}, \hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ khi và chỉ khi $x^* + \sum_{i=1}^n x_i^* = 0$, $\sum_{i=1}^n \|x_i^*\| = 1$, $\sum_{i=1}^n \langle x_i^*, \hat{x}_i - \hat{x}\rangle = \max_{1 \le i \le n} \|\hat{x}_i - \hat{x}\|$.

Bổ đề 2.6 (Bui & Kruger, 2019)

Cho K_1, K_2 là các nón trong không gian định chuẩn X, $z_1, z_2 \in X$, $\varepsilon > 0, \rho > 0$ và $\lambda > 0$. Giả sử rằng

$\lambda\big(d(z_1, K_1) + d(z_2, K_2)\big) + \rho\|z_1 + z_2\| < \varepsilon$ và $\|z_1\| + \|z_2\| = 1$.

(i) Nếu $\varepsilon + \lambda \le \rho$, thì tồn tại $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ thỏa $\hat{z}_1 + \hat{z}_2 = 0$, $\|\hat{z}_1\| + \|\hat{z}_2\| = 1$, $d(\hat{z}_1, K_1) + d(\hat{z}_2, K_2) < \frac{\varepsilon}{\lambda}$.

(ii) Nếu $\varepsilon + \rho \le \lambda$, thì tồn tại $\hat{z}_1 \in K_1, \hat{z}_2 \in K_2$ thỏa $\|\hat{z}_1 + \hat{z}_2\| \le \frac{\varepsilon}{\rho}$ và $\|\hat{z}_1\| + \|\hat{z}_2\| = 1$.

(iii) Hơn nữa, nếu không gian đang xét là một không gian đối ngẫu đối với không gian định chuẩn cho trước, và tồn tại $\tau \in (0,1]$ và $v_1, v_2 \in X$ không đồng thời bằng 0 thoả $\langle z_1, v_1\rangle + \langle z_2, v_2\rangle \ge \tau \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$, khi đó $\hat{z}_1$ và $\hat{z}_2$ trong (i) và (ii) thỏa $\langle \hat{z}_1, v_1\rangle + \langle \hat{z}_2, v_2\rangle \ge \hat{\tau} \max\{\|v_1\|, \|v_2\|\}$ với $\hat{\tau} = \frac{\tau\rho - \varepsilon}{\rho + \varepsilon}$ trong (i) và $\hat{\tau} = \frac{\tau\lambda - \varepsilon}{\lambda + \varepsilon}$ trong (ii).

3. NGUYÊN LÝ CỰC TRỊ CHO HỌ CÁC ÁNH XẠ ĐA TRỊ

Định lý 3.1

Cho X là không gian Aspund, (X_i, d_i) là không gian mêtric, $F_i: X_i \rightrightarrows X$, $\overline{x}_i \in X_i$, F_i có giá trị đóng $(i = 1, \ldots, n)$, và $\overline{x} \in \cap_{i=1}^n F_i(\overline{x}_i)$. Nếu $\{F_1, \ldots, F_n\}$ là xấp xỉ dừng tại $\overline{x}$ thì với mọi $\varepsilon > 0$ và $\tau \in (0,1)$, tồn tại $x_i \in X_i \cap B_\varepsilon(\overline{x}_i)$, $v_i \in F_i(x_i) \cap B_\varepsilon(\overline{x})$, $\omega_i \in F_i(\overline{x}_i) \cap B_\varepsilon(\overline{x})$ và $x_i^* \in X^*$ $(i = 1, \ldots, n)$ sao cho

(i) $\sum_{i=1}^n d(x_i^*, N_{F_i(x_i)}(v_i)) + \|\sum_{i=1}^n x_i^*\| < \varepsilon$,

(ii) $\sum_{i=1}^n \langle x_i^*, x + \omega_i - v_i\rangle > \tau \max_{1 \le i \le n} \|x + \omega_i - v_i\|$,

(iii) $\sum_{i=1}^n \|x_i^*\| = 1$.

Chứng minh

Ta sử dụng khoảng cách trong X^{n+1} phụ thuộc tham số $\gamma > 0$ như sau $\|(v, v_1, \ldots, v_n)\|_\gamma := \max_{1 \le i \le n}\{\|v\|, \gamma\|v_i\|\}$ với mọi $v, v_1, \ldots, v_n \in X$. Chuẩn đối ngẫu tương ứng là $\|(v^*, v_1^*, \ldots, v_n^*)\|_\gamma := \|v^*\| + \gamma^{-1}(\|v_1^*\| + \cdots + \|v_n^*\|)$ với mọi $v^*, v_1^*, \ldots, v_n^* \in X^*$.

Với $\varepsilon > 0, \gamma := (1 + \varepsilon)^{-1}$ và $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0, \varepsilon)$ sao cho $(\varepsilon_1 + \varepsilon_1^2)\gamma^{-1}\varepsilon_2^{-1} + \varepsilon_1^2 < \varepsilon$. Giả sử $\{F_1, \ldots, F_n\}$ là xấp xỉ dừng tại $\overline{x}$. Khi đó tồn tại $\rho \in (0, \varepsilon_1)$, $\omega_i \in F_i(\overline{x}_i) \cap B_{\varepsilon_1}(\overline{x})$, $x_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ thỏa $\cap_{i=1}^n (F_i(x_i) - \omega_i) \cap (\rho B) = \emptyset$ và $\max_{1 \le i \le n}\{d_i(x_i), d(\overline{x}, F_i(x_i))\} < \varepsilon_1\rho$.

Xét hàm số $f_1: X^{n+1} \to \mathbb{R}_+$ được định nghĩa $f_1(v, v_1, \ldots, v_n) := \max_{1 \le i \le n} \|v_i - \omega_i - v\|$ với mọi $v, v_1, \ldots, v_n \in X$. Khi đó $f_1(v, v_1, \ldots, v_n) > 0$ với mọi $v \in \rho\mathbb{B}$, $v_i \in F_i(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, và tồn tại $u_i \in F_i(x_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$ sao cho $\max_{1 \le i \le n} \|u_i - \overline{x}\| < \varepsilon_1\rho$. Ta có $f_1(0, u_1, \ldots, u_n) = \max_{1 \le i \le n} \|u_i - \omega_i\| < \varepsilon_1\rho + \varepsilon_1$.

Đặt $\hat{\rho} := \frac{\varepsilon_1\rho + \varepsilon_1}{\varepsilon_2}$. Áp dụng Bổ đề 2.1 cho hàm f_1 trong không gian Banach $(\rho B) \times F_1(x_1) \times \ldots \times F_n(x_n)$, ta tìm được $v' \in \rho B$, $v_i' \in F_i(x_i)$ $(i = 1, \ldots n)$ thoả

- $\|(v', v_1', \ldots, v_n') - (0, u_1, \ldots, u_n)\|_\gamma < \hat{\rho}$
- $f_1(v, v_1, \ldots, v_n) - f_1'(v', v_1', \ldots, v_n') + \varepsilon_2\|(v - v', v_1 - v_1', \ldots, v_n - v_n')\| \ge 0$ với mọi $v \in \rho B$ và $v_i \in F_i(x_i)$ $(i = 1, \ldots n)$.

Khi đó $\|v'\| < \hat{\rho} < \varepsilon$ và

$$\|v_i' - \overline{x}\| \le \|v_i' - u_i\| + \|u_i - \overline{x}\| \le \hat{\rho}\gamma^{-1} + \varepsilon_1 < \frac{(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_1)\gamma^{-1}}{\varepsilon_2} + \varepsilon_1^2 < \varepsilon,$$

với $i = 1, \ldots, n$. Xét $f_2, f_3: X^{n+1} \to \mathbb{R}_+$ được định nghĩa với mọi $v, v_1, \ldots, v_n \in X$ như sau $f_2(v, v_1, \ldots, v_n) := \varepsilon_2\|(v - v', v_1 - v_1', \ldots, v_n - v_n')\|_\gamma$, $f_3(v, v_1, \ldots, v_n) :=$

$i_{F_1(x_1)\times\ldots\times F_n(x_n)}(v_1,\ldots,v_n)$. Ta thấy $f_1+f_2+f_3$ đạt cực tiểu địa phương trên X^{n+1} tại $(v',v'_1,\ldots,v'_n)$. Chú ý rằng f_1 và f_2 là hàm lồi và liên tục Lipschitz, $\max_{1\le i\le n}\|v'_i-\omega_i-v'\|>0$. Lấy $\tau\in(0,1)$ và chọn $\varepsilon>0$ sao cho $(10-2\tau)\varepsilon<(1-\tau)\max_{1\le i\le n}\|v'_i-\omega_i-v'\|$ và $\varepsilon<\max\left\{\varepsilon-\max_{1\le i\le n}\|v'_i-\overline{x}\|,\varepsilon-\|v'\|,\frac{\varepsilon-\gamma\varepsilon_2}{2}\right\}$. Do $2\varepsilon<(1-\tau)\max_{1\le i\le n}\|v'_i-v'\|$ với $\tau\in(0,1)$. Áp dụng Bổ đề 2.2-2.5, ta tìm được $(z,z_1,\ldots,z_n)$ và $(\hat{v},\hat{v}_1,\ldots,\hat{v}_n)$ trong X^{n+1} thoả $\|z-v'\|<\varepsilon$, $\|\hat{v}-v'\|<\varepsilon,\|z_i-v'_i\|<\varepsilon$, $\hat{v}_i\in F_i(x_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ và

- $(v_1^*,v_{11}^*,\ldots,v_{1n}^*)\in\partial f_1(z,z_1,\ldots,z_n)$,
- $(v_2^*,v_{21}^*,\ldots,v_{2n}^*)\in\partial f_2(z,z_1,\ldots,z_n)$,
- $v_{3i}^*\in N_{F_i(x_i)}(\hat{v}_i)$ $(i=1,\ldots,n)$

sao cho $\|(v_1^*+v_2^*,v_{11}^*+v_{21}^*+v_{31}^*,\ldots,v_{1n}^*+v_{2n}^*+v_{3n}^*)\|<\varepsilon$.

Khi đó, $\|v_1^*+v_2^*\|<\varepsilon,\sum_{i=1}^n\|v_{1i}^*+v_{2i}^*+v_{3i}^*\|<\gamma\varepsilon<\varepsilon$. Ta thấy $v_1^*=-\sum_{i=1}^n v_{1i}^*$, $\sum_{i=1}^n\|v_{1i}^*\|=1$, $\sum_{i=1}^n\langle v_{1i}^*,z_i-\omega_i-z\rangle=\max_{1\le i\le n}\|z_i-\omega_i-z\|$, và $\|v_2^*\|+\gamma^{-1}\sum_{i=1}^n\|v_{2i}^*\|\le\varepsilon_2$. Ta có $\hat{v}\in\varepsilon B$ và $\hat{v}_i\in B_\varepsilon(\overline{x})$ $(i=1,\ldots,n)$, và

- $\|\hat{v}\|\le\|\hat{v}-v'\|+\|v'\|<\varepsilon+\|v'\|<\varepsilon$,
- $\max_{1\le i\le n}\|\hat{v}_i-\overline{x}\|\le\max_{1\le i\le n}(\|\hat{v}_i-v'_i\|+\|v'_i-\overline{x}\|)<\varepsilon+\max_{1\le i\le n}\|v'_i-\overline{x}\|<\varepsilon$,
- $\max_{1\le i\le n}\|\hat{v}_i-z_i\|\le\max_{1\le i\le n}(\|\hat{v}_i-v'_i\|+\|z_i+v'_i\|)<2\varepsilon$,
- $\max_{1\le i\le n}\|\hat{v}_i-z_i\|\le\max_{1\le i\le n}(\|\hat{v}_i-v'_i\|+\|z_i+v'_i\|)<2\varepsilon$,
- $\max_{1\le i\le n}\|z_i-z\|\ge\max_{1\le i\le n}(\|v'_i-v'\|-\|z_i-v'_i\|-\|z-v'\|)>\max_{1\le i\le n}\|v'_i-v'\|-2\varepsilon$,
- $\max_{1\le i\le n}\|\hat{v}_i-\omega_i-\hat{v}\|\ge\max_{1\le i\le n}(\|v'_i-\omega_i-\hat{v}\|-\|\hat{v}_i-v'_i\|-\|\hat{v}-v'\|)>\max_{1\le i\le n}\|v'_i-\omega_i-\hat{v}\|-2\varepsilon$,
- $(1-\tau)\max_{1\le i\le n}\|\hat{v}_i-\omega_i-\hat{v}\|>(1-\tau)\left(\max_{1\le i\le n}\|v'_i-\omega_i-v'\|-2\varepsilon\right)>8\varepsilon$.

Đặt $x_i^*:=-v_{1i}^*$ $(i=1,\ldots,n)$. Ta có $\sum_{i=1}^n\|x_i^*\|=1$ và $\sum_{i=1}^n\langle x_i^*,\hat{v}+\omega_i-\hat{v}_i\rangle=\sum_{i=1}^n\langle v_{1i}^*,\hat{v}_i-\omega_i-\hat{v}\rangle=\sum_{i=1}^n\langle v_{1i}^*,z_i-\omega_i-z\rangle+\sum_{i=1}^n\langle v_{1i}^*,z-\hat{v}+\hat{v}_i-z_i\rangle\ge\sum_{i=1}^n\langle v_{1i}^*,z_i-\omega_i-z\rangle-\sum_{i=1}^n\|v_{1i}^*\|(\|z-\hat{v}\|+\|\hat{v}_i-z_i\|)>\max_{1\le i\le n}\|z_i-\omega_i-z\|-4\varepsilon\ge\max_{1\le i\le n}(\|\hat{v}_i-\omega_i-\hat{v}\|-\|z_i-\hat{v}_i\|-\|\hat{v}-z\|)-4\varepsilon>\max_{1\le i\le n}\|\hat{v}_i-\omega_i-\hat{v}\|-8\varepsilon>\tau\max_{1\le i\le n}\|\hat{v}_i-\omega_i-\hat{v}\|$.

Ta có $\sum_{i=1}^n d(x_i^*,N_{F_i(x_i)}(\hat{v}_i)+\|\sum_{i=1}^n x_i^*\|\le\|\sum_{i=1}^n v_{1i}^*\|+\sum_{i=1}^n\|v_{1i}^*+v_{3i}^*\|<2\varepsilon+\|v_2^*\|+\sum_{i=1}^n\|v_{2i}^*\|<2\varepsilon+(\varepsilon_2-\gamma^{-1}\sum_{i=1}^n\|v_{2i}^*\|)+\sum_{i=1}^n\|v_{2i}^*\|=2\varepsilon+\varepsilon_2+(1-\gamma^{-1})\sum_{i=1}^n\|v_{2i}^*\|<2\varepsilon+\varepsilon_2+(1-\gamma^{-1})\gamma\varepsilon_2=2\varepsilon+\gamma\varepsilon_2<\varepsilon$.

Bất đẳng thức (i) trong Định lý 3.1 bao gồm hai ràng buộc trên các vectơ $x_1^*,\ldots,x_n^*\in X^*$: Khoảng cách giữa từng vectơ với các nón pháp tuyến tương ứng và tổng của các chuẩn vectơ phải rất nhỏ. Điều kiện này này bao hàm hai ràng buộc $\sum_{i=1}^n d\left(x_i^*,N_{F_i(x_i)}(v_i)\right)<\varepsilon$ và $\sum_{i=1}^n\|x_i^*\|<\varepsilon$.

Hệ quả 3.1 Cho X là không gian Asplund, (X_i,d_i) là không gian mêtric, $F_i:X_i\rightrightarrows X$, $\overline{x}_i\in X_i$, F_i $(i=1,\ldots,n)$ có giá trị đóng và $\overline{x}\in\cap_{i=1}^n F_i(\overline{x}_i)$. Nếu $\{F_1,\ldots,F_n\}$ là xấp xỉ dừng tại $\overline{x}$ thì các khẳng định sau đây xảy ra:

(i) với mọi $\varepsilon\in(0,1)$ và $\tau\in\left(0,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$, tồn tại $x_i\in X_i\cap B_\varepsilon(\overline{x}_i)$, $v_i\in F_i(x_i)\cap B_\varepsilon(\overline{x})$, $x\in B_\varepsilon(\overline{x})$, $\omega_i\in F_i(\overline{x}_i)\cap B_\varepsilon(\overline{x})$ và $x_i^*\in X^*$ $(i=1,\ldots,n)$ thoả $\|\sum_{i=1}^n x_i^*\|<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, $x_i^*\in N_{F_i(x_i)}(v_i)$ $(i=1,\ldots,n)$, $\sum_{i=1}^n\|x_i^*\|=1$, và $\sum_{i=1}^n\langle x_i^*,x+\omega_i-v_i\rangle>\tau\max_{1\le i\le n}\|x+\omega_i-v_i\|$;

(ii) với mọi $\varepsilon\in(0,1)$ và $\tau\in\left(0,\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)$, tồn tại $x_i\in X_i\cap B_\varepsilon(\overline{x}_i)$, $v_i\in F_i(x_i)\cap B_\varepsilon(\overline{x})$, $\omega_i\in F_i(\overline{x}_i)\cap B_\varepsilon(\overline{x})$, và $x_i^*\in X^*$ $(i=1,\ldots,n)$ sao cho $\sum_{i=1}^n\|x_i^*\|=1$, $\sum_{i=1}^n x_i^*=0$, $\sum_{i=1}^n d\left(x_i^*,N_{F_i(x_i)}(v_i)\right)<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}$, và $\sum_{i=1}^n\langle x_i^*,x+\omega_i-v_i\rangle>\tau\max_{1\le i\le n}\|x+\omega_i-v_i\|$.

Chứng minh

(i) Đặt $\tau':=\tau(1+\varepsilon)+\varepsilon\in(0,1)$. Áp dụng Định lý 3.1, tồn tại $x_i\in X_i\cap B_\varepsilon(\overline{x}_i)$, $v_i\in F_i(x_i)\cap B_\varepsilon(\overline{x})$, $\omega_i\in F_i(\overline{x}_i)\cap B_\varepsilon(\overline{x})$ và $x_i^*\in X^*$ $(i=1,\ldots,n)$ sao cho $\sum_{i=1}^n d(x_i^*,N_{F_i(x_i)}(v_i)+\|\sum_{i=1}^n x_i^*\|<\varepsilon$ và $\sum_{i=1}^n\langle x_i^*,x+\omega_i-v_i\rangle\ge\tau'\max_{1\le i\le n}\|x+\omega_i-v_i\|$. Ta có $\frac{\tau'-\varepsilon}{1+\varepsilon}=\tau$. Áp dụng Bổ đề 2.6 (i) và (iii) với $\lambda:=1-\varepsilon$ và $\rho:=1$ ta có được điều phải chứng minh.

(ii) Đặt $\tau':=\tau(1+\varepsilon)+\varepsilon$ và $\tau'\in(0,1)$. Áp dụng Định lý 3.1, tồn tại $x_i\in X_i\cap B_\varepsilon(\overline{x}_i)$, $v_i\in F_i(x_i)\cap B_\varepsilon(\overline{x}),x\in B_\varepsilon(\overline{x})$, $\omega_i\in F_i(\overline{x}_i)\cap B_\varepsilon(\overline{x})$ và

$x_i^* \in X^*(i = 1, \ldots, n)$ sao cho $\sum_{i=1}^{n} d(x_i^*, N_{F_i(x_i)}(v_i)) + \|\sum_{i=1}^{n} x_i^*\| < \varepsilon$ và $\sum_{i=1}^{n}\langle x_i^*, x + \omega_i - v_i\rangle \geq \tau' \max_{1\leq i\leq n}\|x + \omega_i - v_i\|$. Ta có $\frac{\tau'-\varepsilon}{1+\varepsilon} = \tau$. Áp dụng Bổ đề 2.6 (ii) và (iii)

với $\lambda \coloneqq 1 - \varepsilon$ và $\rho \coloneqq 1$ ta có được điều

phải chứng minh.

Nhận xét 3.1

Hệ quả 3.1(i) cải tiến (Mordukhovich et al., 2003), Định lý 4.1. Thật vậy, các kết quả được suy ra từ tính xấp xỉ dừng thay vì tính cực trị địa phương. Hơn nữa, Hệ quả 3.1(i) cũng bổ sung thông tin của các vectơ đối ngẫu thông qua điều kiện $\sum_{i=1}^{n}\langle x_i^*, x + \omega_i - v_i\rangle > \tau \max_{1\leq i\leq n}\|x + \omega_i - v_i\|$.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đưa ra các kết quả về điều kiện cần đối ngẫu trong không gian Asplund cho tính xấp xỉ dừng của họ các ánh xạ đa trị. Các kết quả này được xem là một dạng nguyên lý cực trị cho họ các ánh xạ đa trị. Các kết quả trong bài báo có thể được dùng để thiết lập điều kiện tối ưu cho nghiệm của bài toán tối ưu đa mục tiêu theo quan hệ đóng.

LỜI CẢM TẠ

Nghiên cứu được thực hiện dưới sự tài trợ của Trường Đại học Cần Thơ cho đề tài nghiên cứu khoa học sinh viên "Nguyên lý cực trị của họ các tập hợp và ứng dụng", mã số: TSV2023-19.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bui, H. T., & Kruger, A. Y. (2019). Extremality, stationarity and generalized separation of collections of sets. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *182*, 211-264. https://doi.org/10.1007/s10957-018-01458-8

Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *47*, 324–353. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0

Fabian, M. (1989). Subdifferentiability and trustworthiness in the light of a new variational principle of Borwein and Preiss. *Acta Universitatis Carolinae*, *30*, 51–56.

Kruger, A. Y. (2003). On Fréchet subdifferentials. *Journal of Mathematical Sciences*, *116*(3), 3325–3358. https://doi.org/10.1023/A:1023673105317

Kruger, A. Y., & Mordukhovich, B. S. (1980). Extremal points and the Euler equation in nonsmooth optimization problem. *Doklady of the Academy of Sciences of the BSSR*, *24*(8), 684-687.

Mordukhovich, B. S., Treiman, J. S., & Zhu, Q. J. (2003). An extended extremal principle with applications to multiobjective optimization. *SIAM Journal on Optimization*, *14*(2), 359-379. https://doi.org/10.1137/S1052623402414701

Zhu, Q. J. (2000). Hamiltonian necessary conditions for a multiobjective optimal control problem with endpoint constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization 39*(1) 97-112. https://doi.org/10.1137/S03630129993508

Zălinescu, C. (2002). *Convex Analysis in General Vector Spaces*. World Scientific Publishing , River Edge. https://doi.org/10.1142/5021