Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2023.207

TÍNH CHẤT VI PHÂN TRONG ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CÓ THAM SỐ VỚI RÀNG BUỘC CÂN BẰNG

Nguyễn Thành Quí[1*], Mạc Lê Chí Đạo[2] và Đào Duy Phúc[3]
[1]*Bộ môn Toán học, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Lớp cao học Toán Giải tích K28, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
[3]*Lớp cao học Toán Giải tích K26, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): ntqui@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 29/05/2023
Sửa bài (Revised): 27/06/2023
Duyệt đăng (Accepted): 05/07/2023

Title: *Differential properties in parametric optimal control with equilibrium constraints*

Author(s): *Nguyen Thanh Qui*, Mac Le Chi Dao and Dao Duy Phuc*

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Nghiên cứu được thực hiện nhằm tìm hiểu các tính chất vi phân trong điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng. Hướng nghiên cứu mới của bài viết là về tính chất vi phân suy rộng trong lớp bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính với ràng buộc cân bằng. Kết quả mới của bài báo bao gồm các công thức tính đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc trong bài toán điều khiển tối ưu có tham số với dạng ràng buộc cân bằng có nhiễu và các công thức tính dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc cân bằng.

Từ khoá: *Dưới vi phân Fréchet, điều khiển tối ưu, đối đạo hàm, hàm giá trị tối ưu, phương trình đạo hàm riêng elliptic*

ABSTRACT

The article studies differential properties in parametric optimal control with equilibrium constraints. The article obtains some new results on generalized differential properties in parametric optimal control problems governed by semilinear elliptic partial differential equations with equilibrium constraints. The new results of the article include formulas for computing the Fréchet coderivative and Mordukhovich coderivative of the constraint operator of the parametric optimal control problems with the perturbed equilibrium constraint form and formulas for computing Fréchet subdifferential of the marginal function of the parametric optimal control problems with equilibrium constraints.

Keywords: *Coderivative, elliptic partial differential equation, Fréchet subdifferential, marginal function, optimal control*

1. GIỚI THIỆU

Các tính chất vi phân và vi phân suy rộng trong lớp bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính với ràng buộc cân bằng được tìm hiểu trong nghiên cứu. Đây là một nghiên cứu tiếp nối theo bài báo Quí et al. (2022) mà ở đó các tác giả đã khảo sát bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc dạng biên trơn

$$u \in L^2(\Omega), \;\; \psi(u, e_P) \le 0,$$

Trong khi bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc dạng cân bằng được khảo sát trong nghiên cứu này.

$$u \in L^2(\Omega),\ \ 0 \in \psi(u, e_P) + Q(u, e_P).$$

Đây là vấn đề nghiên cứu mới, khá phức tạp nhưng mang nhiều ý nghĩa khoa học vì các phương trình suy rộng dạng cân bằng và các ràng buộc dạng cân bằng thường xuất hiện trong giải tích biến phân, lý thuyết tối ưu và lý thuyết điều khiển, v.v.

Bài toán điều khiển tối ưu có tham số $P(e)$ được khảo sát trong bài báo này là bài toán tìm min của hàm mục tiêu $J: L^2(\Omega) \times E \to \mathbb{R}$ với

$$J(u,e) = \int_\Omega L\left(x, y_{u+e_Y}(x)\right) dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \zeta(x)(u+e_Y)^2(x)dx + \int_\Omega e_J(x) y_{u+e_Y}(x)dx$$

thỏa điều kiện ràng buộc cho các điều khiển u dạng cân bằng sau

$$u \in L^2(\Omega),\ \ 0 \in \psi(u, e_P) + Q(u, e_P), \qquad (1.1)$$

trong đó y_{u+e_Y} là nghiệm yếu của phương trình đạo hàm riêng (phương trình trạng thái) dưới đây

$$\begin{cases} Ay + f(x,y) = u + e_Y & \text{trong } \Omega \\ y = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases} \qquad (1.2)$$

ở đây A là toán tử vi phân elliptic bậc hai có dạng

$$Ay(x) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}y(x)\right),$$

với các hàm hệ số $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ thỏa mãn điều kiện

$$\lambda_A \|\gamma\|^2 \le \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(x)\gamma_i\gamma_j,$$

với mọi $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{R}^N$, h.h. $x \in \Omega$, $\lambda_A > 0$ là hằng số, và $\psi: L^2(\Omega) \times L^p(\Omega) \to W$ thuộc lớp C^2 với $p \in (1, +\infty)$,

$$Q: L^2(\Omega) \times L^p(\Omega) \to 2^W$$

là ánh xạ đa trị với W là một không gian Banach, và $\zeta(x) \ge 0$ h.h. $x \in \Omega$ là một hàm cho trước.

Ta định nghĩa $E = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^p(\Omega)$ là không gian tham số và $e = (e_Y, e_J, e_P) \in E$ là tham số của bài toán $P(e)$, trong đó chuẩn của tham số $e \in E$ là chuẩn tổng sau đây

$$\|e\|_E = \|e\|_{L^2(\Omega)} + \|e\|_{L^2(\Omega)} + \|e\|_{L^p(\Omega)}.$$

Với mỗi $e \in E$, ký hiệu $\mathcal{G}_{ad}(e)$ là tập các điều khiển chấp nhận được của bài toán $P(e)$. Tức là, toán tử ràng buộc của bài toán $P(e)$ là $\mathcal{G}_{ad}: E \to 2^{L^2(\Omega)}$ xác định bởi

$$\mathcal{G}_{ad}(e) = \left\{ u \,\middle|\, \begin{matrix} u \in L^2(\Omega), \\ 0 \in \psi(u, e_P) + Q(u, e_P) \end{matrix} \right\}. \qquad (1.3)$$

Ta thấy rằng khi tham số $e = 0$ thì bài toán ban đầu $P(0)$ có hàm mục tiêu là

$$J(u,0) = \int_\Omega L(x, y_u(x))dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \zeta(x)u^2(x)dx,$$

đây là hàm mục tiêu rất phổ biến trong lý thuyết điều khiển tối ưu. Khi $e \neq 0$ thì số hạng

$$\int_\Omega e_J(x) y_{u+e_Y}(x)dx = \langle e_J, y_{u+e_Y}\rangle$$

$$= \langle e_J, G(u+e_Y)\rangle = \langle G^* e_J, u + e_Y\rangle$$

có dạng nhiễu xiên được giới thiệu và nghiên cứu bởi Poliquin and Rockafellar (1998), trong đó hàm $u + e_Y \mapsto y_{u+e_Y} = G(u+e_Y)$ sẽ được định nghĩa ở mục sau. Bao hàm thức ràng buộc cân bằng trong (1.1) là một hệ thống biến phân, các dạng nhiễu của hệ thống biến phân dạng (1.1) được nghiên cứu kỹ trong Qui (2016). Trong (1.2), tham số thành phần e_Y xuất hiện với vai trò nhiễu tuyến tính đối với phương trình đạo hàm riêng đang xét.

Liên quan đến bài toán $P(e)$ với hàm ràng buộc dạng cân bằng được cho bởi (1.3), hàm giá trị tối ưu (hàm marginal) của bài toán $P(e)$ là hàm $\mu: E \to \overline{\mathbb{R}}$ được cho bởi

$$\mu(e) = \inf_{u \in \mathcal{G}_{ad}(e)} J(u,e), \qquad (1.4)$$

và ánh xạ nghiệm $S: E \to 2^{L^2(\Omega)}$ của bài toán $P(e)$ được xác định bởi

$$S(e) = \{u \in U_{ad}(e) | \mu(e) = J(u,e)\}. \qquad (1.5)$$

Các nghiên cứu về hàm giá trị tối ưu và ánh xạ nghiệm của các bài toán tối ưu phụ thuộc tham số có thể tham khảo trong các công trình Mordukhovich (2006a, 2006b, 2018), Mordukhovich et al. (2009), Qui (2020), Qui and Wachsmuth (2020), Quí et al.

(2022), Quí và Phúc (2022). Hàm giá trị tối ưu và ánh xạ nghiệm của các bài toán tối ưu phụ thuộc tham số đóng vai trò quan trọng giải tích biến phân, lý thuyết tối ưu, điều khiển tối ưu, và đã thu hút được nhiều chuyên gia quan tâm nghiên cứu. Hàm giá trị tối ưu nói chung không khả vi và ánh xạ nghiệm thường là ánh xạ đa trị, nên các khái niệm vi phân suy rộng thường được sử dụng để khảo sát hàm giá trị tối ưu và ánh xạ nghiệm của các bài toán tối ưu có tham số.

Các bài toán điều khiển tối ưu cho phương trình đạo hàm riêng elliptic liên quan đến bài toán $P(e)$ với ràng buộc điểm được khảo sát trong Casas and Mateos (2002), Casas et al. (2008), Casas (2012), Qui and Wachsmuth (2018, 2019, 2020), Qui (2020), Quí và Phúc (2022), Tröltzsch (2010). Bài báo Quí et al. (2022) là công trình đầu tiên nghiên cứu về bài toán điều khiển tối ưu có tham số liên quan đến bài toán $P(e)$ với ràng buộc biên trơn. Tiếp tục mở rộng theo hướng nghiên cứu trong Quí et al. (2022), bài báo này xét bài toán $P(e)$ với ràng buộc cân bằng. Bài báo này khảo sát các tính chất vi phân theo nghĩa cổ điển của hàm mục tiêu, tính chất vi phân suy rộng của toán tử ràng buộc cân bằng và hàm giá trị tối ưu của bài toán $P(e)$.

2. KIẾN THỨC CƠ SỞ

Mục này trình bày các giả thiết căn bản trong lý thuyết điều khiển tối ưu cùng các khái niệm cơ bản của giải tích biến phân và vi phân suy rộng để khảo sát bài toán điều khiển tối ưu $P(e)$.

Hệ thống các giả thiết được sử dụng trong bài báo này bao gồm:

(A1) Tập $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ (với $N = 1, 2, 3$) là một miền mở và bị chặn trong $\mathbb{R}^N$ với biên Lipschitz Γ.

(A2) Hàm $f: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory (tức là, $f(\cdot, y)$ đo được với mọi $y \in \mathbb{R}$ và $f(x,\cdot)$ liên tục với h.h. $x \in \Omega$) thuộc lớp hàm C^2 đối với biến thứ hai và thỏa mãn

$$f(\cdot\,,0) \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \geq 0 \text{ với h.h. } x \in \Omega,$$

và với mọi $\mathrm{M} > 0$ tồn tại $\mathrm{C}_{f,M} > 0$ sao cho

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)\right| \leq \mathrm{C}_{f,M}$$

với h.h. $x \in \Omega$ và $|\mathrm{y}| \leq \mathrm{M}$,

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y_1)\right| \leq \mathrm{C}_{f,M}|y_2 - y_1|$$

với h.h. $x \in \Omega$ và $|\mathrm{y}_1|, |y_2| \leq \mathrm{M}$.

(A3) Hàm $L: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm Carathéodory thuộc lớp C^2 đối với biến thứ hai. Hơn nữa, ta cũng có $L(\cdot\,,0) \in L^1(\Omega)$ và với mọi $\mathrm{M} > 0$ tồn tại hằng số $\mathrm{C}_{L,M} > 0$ và $\psi_M \in L^2(\Omega)$ sao cho

$$\left|\frac{\partial L}{\partial y}(x,y)\right| \leq \psi_M(x), \quad \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \mathrm{y}^2}(x,y)\right| \leq C_{L,M},$$

với h.h. $x \in \Omega$ và $|y| \leq M$, và

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \mathrm{y}^2}(x,y_1) - \frac{\partial^2 L}{\partial \mathrm{y}^2}(x,y_2)\right| \leq C_{L,M}|y_2 - y_1|$$

với h.h. $x \in \Omega$ và $|\mathrm{y}_1|, |y_2| \leq \mathrm{M}$.

Các giả thiết nêu trên là các giả thiết căn bản và thường được sử dụng trong lý thuyết điều khiển tối ưu và chúng đảm bảo cho sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) của bài toán $P(e)$. *Nghiệm yếu* của phương trình trạng thái (1.2) được định nghĩa trong Tröltzsch (2010). Kết quả phát biểu trong định lý sau đây có thể xem trong cuốn sách chuyên khảo Tröltzsch (2010) (Định lý 4.4).

Định lý 2.1. *Giả sử rằng các giả thiết* (A1)–(A3) *được thỏa mãn. Khi đó, với mỗi* $u + e_Y \in L^2(\Omega)$ *phương trình trạng thái* (1.2) *luôn có nghiệm yếu duy nhất* $y_{u+e_Y} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Dựa vào Định lý 2.1, ký hiệu ánh xạ nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) bởi

$$G: L^2(\Omega) \to H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$
$$u + e_Y \mapsto y_{u+e_Y} = G(u + e_Y).$$

Cho tham số $\bar{e} \in E$, một điều khiển chấp nhận được $\bar{u} \in \mathcal{G}_{ad}(\bar{e})$ được gọi là một *điều khiển tối ưu* (hay *nghiệm*) của bài toán $P(\bar{e})$ ứng với trạng thái tối ưu $\bar{y}_{\bar{u}+\bar{e}_Y} = G(\bar{u} + \bar{e}_Y) \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ nếu

$$J(\bar{u}, \bar{e}) \leq J(u, \bar{e}), \quad \forall u \in \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}).$$

Các khái niệm cơ bản của giải tích biến phân và vi phân suy rộng trình bày dưới đây được tham khảo trong bộ sách chuyên khảo Mordukhovich (2006a, 2006b), xem thêm Mordukhovich (2018) với các phiên bản hữu hạn chiều tương ứng. Cho không gian Banach X, hàm đa trị $F: X \rightrightarrows 2^{X^*}$ và hàm thực mở rộng $\sigma: X \to \overline{\mathbb{R}}$. *Giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé – Kuratowski* của F khi $u \to \bar{u}$ được xác định bởi

$$\operatorname*{Limsup}_{u\to\bar{u}} F(u) = \left\{ u^* \in X^* \,\middle|\, \begin{array}{c} \text{tồn tại } u_n \to \bar{u} \text{ và} \\ F(u_n) \ni u_n^* \to u^* \text{ theo tôpô } w^* \end{array} \right\}.$$

Với $\epsilon \geq 0$, tập các ϵ-dưới gradient của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom} \sigma := \{u \in X | \sigma(u) < \infty\}$ được cho bởi

$$\hat{\partial}_\epsilon \sigma(\bar{u}) = \left\{ u^* \middle| \begin{array}{c} u^* \in X^* \text{ thỏa mãn} \\ \liminf\limits_{u \to \bar{u}} \dfrac{\sigma(u) - \sigma(\bar{u}) - \langle u^*, u - \bar{u}\rangle}{\|u - \bar{u}\|} \geq -\epsilon \end{array} \right\}.$$

Dưới vi phân Fréchet (dưới vi phân chính quy) của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom} \sigma$ được định nghĩa bởi

$$\hat{\partial}\sigma(\bar{u}) := \hat{\partial}_0 \sigma(\bar{u}).$$

Dưới vi phân Fréchet trên (dưới vi phân chính quy trên) của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom} \sigma$ được xác định bởi

$$\hat{\partial}^+ \sigma(\bar{u}) := -\hat{\partial}(-\sigma)(\bar{u}).$$

Dưới vi phân Mordukhovich (dưới vi phân qua giới hạn) của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom} \sigma$ được định nghĩa bởi

$$\partial\sigma(\bar{u}) := \operatorname*{Limsup}_{u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}, \epsilon \downarrow 0} \hat{\partial}_\epsilon \sigma(u)$$

và *dưới vi phân qua giới hạn suy biến* của hàm σ tại $\bar{u} \in \operatorname{dom} \sigma$ được cho bởi

$$\partial^\infty \sigma(\bar{u}) := \operatorname*{Limsup}_{u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}, \epsilon \downarrow 0, \lambda \downarrow 0} \lambda \hat{\partial}_\epsilon \sigma(u),$$

trong đó $u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}$ có nghĩa là $u \to \bar{u}$ và $\sigma(u) \to \sigma(\bar{u})$.

Cho ánh xạ đa trị $F: X \to 2^W$ giữa các không gian Banach X và W. Khi đó, tập hợp

$$\operatorname{gph} F := \{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x)\}$$

là đồ thị của F. *Nón pháp tuyến Fréchet* hay còn gọi là *nón pháp tuyến chính quy* $\hat{N}((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph} F)$ của $\operatorname{gph} F$ tại điểm $(\bar{u}, \bar{v})$ định nghĩa bởi

$$\hat{N}((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph} F) = \hat{\partial}\delta((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph} F),$$

và *nón pháp tuyến Mordukhovich* $N((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph} F)$ của $\operatorname{gph} F$ tại điểm $(\bar{u}, \bar{v})$ được cho bởi

$$N((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph} F) = \partial\delta((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph} F).$$

Đối đạo hàm Fréchet hay còn gọi là *đối đạo hàm chính quy* của $F: X \to 2^W$ tại điểm $(\bar{u}, \bar{v}) \in \operatorname{gph} F$ là ánh xạ đa trị

$$\hat{D}^* F(\bar{u}, \bar{v}): W^* \to 2^{X^*}$$

định nghĩa bởi

$$\hat{D}^* F(\bar{u}, \bar{v})(v^*) = \{u^* \in X^* | (u^*, -v^*) \in \hat{N}((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph} F)\}.$$

Đối đạo hàm Mordukhovich của $F: X \to 2^W$ tại điểm $(\bar{u}, \bar{v}) \in \operatorname{gph} F$ là ánh xạ đa trị

$$D^* F(\bar{u}, \bar{v}): W^* \to 2^{X^*}$$

xác định bởi

$$D^* F(\bar{u}, \bar{v})(v^*) = \{u^* \in X^* | (u^*, -v^*) \in N((\bar{u}, \bar{v}); \operatorname{gph} F)\}.$$

Ánh xạ đa trị $F: X \to 2^W$ được gọi là *chính quy pháp tuyến* tại điểm $(\bar{u}, \bar{v}) \in \operatorname{gph} F$ nếu như đẳng thức sau đây được thỏa mãn

$$\hat{D}^* F(\bar{u}, \bar{v})(v^*) = D^* F(\bar{u}, \bar{v})(v^*), \forall v^* \in W^*.$$

Từ các định nghĩa đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich ta có nhận xét rằng trong trường hợp tổng quát thì chúng khác nhau. Tuy nhiên, trong một số trường hợp đặc biệt, chẳng hạn như đối với lớp hàm chính quy pháp tuyến, thì hai khái niệm đối đạo hàm này trùng nhau.

Thông qua bộ sách chuyên khảo Mordukhovich (2006a, 2006b), các khái niệm đối đạo hàm và dưới vi phân của Mordukhovich mang nhiều ý nghĩa quan trọng trong giải tích biến phân, lý thuyết tối ưu và điều khiển, v.v. Lý thuyết vi phân Mordukhovich được xây dựng dựa trên các khái niệm dưới vi phân, nón pháp tuyến và đối đạo hàm theo nghĩa Mordukhovich, đáng chú ý là các khái niệm này được định nghĩa cho các đối tượng không nhất thiết lồi. Vì vậy, phạm vi áp dụng của lý thuyết vi phân Mordukhovich là rất rộng. Hơn thế nữa, lý thuyết Mordukhovich có thể đặc trưng cho các tính chất quan trọng của ánh xạ đa trị như tính giả-Lipschitz theo nghĩa Aubin, tính chính quy mêtric, tính mở địa phương, v.v.

3. ĐẠO HÀM VÀ ĐỐI ĐẠO HÀM

Các công thức tính đạo hàm theo nghĩa cổ điển cho ánh xạ nghiệm yếu $G(\cdot)$ của phương trình trạng thái (1.2) và hàm mục tiêu $J(\cdot,\cdot)$ của bài toán $P(e)$ được trình bày và các công thức tính/đánh giá đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc dạng cân bằng $\mathcal{G}_{ad}(\cdot)$ được thiết lập. Các công thức tính đạo hàm và các công thức tính/đánh giá đối đạo hàm này đóng vai trò quan trọng trong việc thiết lập các công thức tính dưới vi phân suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ của bài toán $P(e)$ với ràng buộc có dạng cân bằng.

Tính khả vi của xạ nghiệm yếu $G(\cdot)$ của phương trình trạng thái (1.2) nêu trong định lý sau đây được khẳng định trong Casas et al. (2008) (Định lý 2.4); có thể xem thêm Quí et al. (2022) (Định lý 2.3), Quí và Phúc (2022) (Định lý 3.2) và Casas and Mateos (2002).

Định lý 3.1. *Giả sử rằng các giả thiết* (A1)–(A3) *được thỏa mãn. Khi đó, ánh xạ nghiệm yếu của phương trình* (1.2), $G: L^2(\Omega) \to H_0^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *với* $G(w) = y_w$, *thuộc lớp hàm* C^2. *Hơn nữa, với mọi* $u, v, e_Y \in L^2(\Omega)$, $z_{u+e_Y,v} = G'(u+e_Y)v$ *là nghiệm yếu duy nhất của*

$$\begin{cases} Az_{u+e_Y,v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y,v} = v & \text{trong } \Omega \\ z_{u+e_Y,v} = 0 & \text{trên } \Gamma. \end{cases}$$

Với mọi $u, v_1, v_2, e_Y \in L^2(\Omega)$, *ta có*

$$z_{u+e_Y,v_1v_2} = G''(u+e_Y)v_1v_2$$

là nghiệm yếu duy nhất của

$$\begin{cases} Az_{u+e_Y,v_1v_2} + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y,v_1v_2} \\ \quad + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y,v_1}z_{u+e_Y,v_2} = 0 & \text{trong } \Omega \\ z_{u+e_Y,v_1v_2} = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases}$$

trong đó $z_{u+e_Y,v_i} = G'(u+e_Y)v_i$ *với* $i = 1, 2$.

Tính khả vi của hàm mục tiêu $J(u,e)$ theo biến điều khiển u nêu trong định lý sau đây được khẳng định trong Qui et al. (2019) (Định lý 2.3), ở đó u được thay thế bởi $u + e_Y$; có thể xem thêm trong Quí et al. (2022) (Định lý 2.4).

Định lý 3.2. *Giả sử rằng các giả thiết* (A1)–(A3) *được thỏa mãn. Khi đó, ánh xạ* $J(\cdot, e): L^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ *thuộc lớp hàm* C^2. *Hơn nữa, với mọi* $u, v \in L^2(\Omega)$, *đạo hàm riêng* $J'_u(u,e)$ *xác định bởi*

$$J'_u(u,e)v = \int_\Omega \left(\varphi_{u,e} + \zeta(u+e_Y)\right) v dx$$

trong đó $\varphi_{u,e}$ *là nghiệm yếu duy nhất của phương trình*

$$\begin{cases} A^*\varphi + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})\varphi \\ \qquad = \dfrac{\partial L}{\partial y}(x, y_{u+e_Y}) + e_J & \text{trong } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases}$$

trong đó $y_{u+e_Y} = G(u+e_Y)$ *và* A^* *là toán tử liên hợp của* A *xác định bởi*

$$A^*\varphi(x) = -\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x)\right).$$

Định lý dưới đây thiết lập công thức tính toán các đối đạo hàm Fréchet và Mordukhovich của toán tử ràng buộc dạng cân bằng $\mathcal{G}_{ad}(\cdot)$. Đây là kết quả mới được áp dụng cho lý thuyết điều khiển tối ưu và là kết quả chính của mục này. Ta cần định nghĩa hai tập hợp sau đây trước khi phát biểu và chứng minh định lý. Với mỗi $w := -\psi(u, e_P) \in Q(u, e_P)$, tức là $(u, e_P, w) \in \text{gph}Q$, và điểm $\omega = (e, u) \in \text{gph}\, \mathcal{G}_{ad}$, ta định nghĩa tập

$$\widehat{\Xi}(Q, \psi, \omega)(u^*) = \bigcup_{w^* \in W^*} \left\{ e^* \left| \begin{array}{c} e^* = (e_Y^*, e_J^*, e_P^*) \in E^*, e_Y^* = e_J^* = 0, \\ (e_P^*, -u^*) \in \\ \nabla\psi(u, e_P)^* w^* + \widehat{D}^* Q(u, e_P, w)(w^*) \end{array} \right.\right\}$$

và tập

$$\Xi(Q, \psi, \omega)(u^*) = \bigcup_{w^* \in W^*} \left\{ e^* \left| \begin{array}{c} e^* = (e_Y^*, e_J^*, e_P^*) \in E^*, e_Y^* = e_J^* = 0, \\ (e_P^*, -u^*) \in \\ \nabla\psi(u, e_P)^* w^* + D^* Q(u, e_P, w)(w^*) \end{array} \right.\right\}$$

trong đó $\nabla\psi(u, e_P)^*$ là toán tử liên hợp của đạo hàm của hàm ψ tại (u, e_P). Khi đó, ta có định lý sau đây:

Định lý 3.3. *Giả sử rằng các giả thiết* (A1)–(A3) *được thỏa mãn. Cho* $\overline{\omega} = (\bar{e}, \bar{u}) \in \text{gph}\, \mathcal{G}_{ad}$. *Khi đó, với mọi* $u^* \in L^2(\Omega)$, *ta có các bao hàm thức*

$$\widehat{\Xi}(Q, \psi, \overline{\omega})(u^*) \subset \widehat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})(u^*) \subset D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})(u^*).$$

Nếu toán tử đa trị Q *đóng địa phương quanh điểm* $(\bar{u}, \bar{e}_P, \overline{w})$ *với* $\overline{w} = -\psi(\bar{u}, \bar{e}_P) \in Q(\bar{u}, \bar{e}_P)$, *SNC tại điểm* $(\bar{u}, \bar{e}_P, \overline{w})$ *và thỏa điều kiện*

$$\begin{cases} 0 \in \nabla\psi(\bar{u}, \bar{e}_P)^* w^* + D^*Q(\bar{u}, \bar{e}_P, \overline{w})(w^*) \\ \qquad \Longrightarrow w^* = 0 \end{cases}$$

thì ta có các bao hàm thức

$$\widehat{\Xi}(Q, \psi, \overline{\omega})(u^*) \subset \widehat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})(u^*) \subset D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})(u^*) \subset \Xi(Q, \psi, \overline{\omega})(u^*).$$

Nếu thêm vào đó toán tử đa trị Q *chính quy đồ thị tại điểm* $(\bar{u}, \bar{e}_P, \overline{w})$ *thì ta có các đẳng thức*

$$\widehat{\Xi}(Q, \psi, \overline{\omega})(u^*) = \widehat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})(u^*) = D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})(u^*) = \Xi(Q, \psi, \overline{\omega})(u^*).$$

Chứng minh. Theo (1.3) thì tập điều khiển chấp nhận được của bài toán $P(e)$ được cho bởi

$$\mathcal{G}_{ad}(e) = \left\{u \,\middle|\, \begin{matrix} u \in L^2(\Omega), \\ 0 \in \psi(u, e_P) + Q(u, e_P) \end{matrix}\right\},$$

tức là $\mathcal{G}_{ad}: E \to 2^{L^2(\Omega)}$ là toán tử đa trị từ không gian tham số

$$E = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^p(\Omega)$$

vào không gian $L^2(\Omega)$. Ta định nghĩa toán tử đa trị $\mathcal{G}: L^p(\Omega) \to 2^{L^2(\Omega)}$ xác định bởi

$$\mathcal{G}(e_P) = \left\{u \,\middle|\, \begin{matrix} u \in L^2(\Omega), \\ 0 \in \psi(u, e_P) + Q(u, e_P) \end{matrix}\right\},$$

tức là

$$\mathcal{G}(e_P) = \mathcal{G}_{ad}(e), \forall e = (e_Y, e_J, e_P) \in E.$$

Ta xét điểm $\bar{\omega}_P = (\bar{e}_P, \bar{u}) \in \operatorname{gph} \mathcal{G}$ và định nghĩa hai tập hợp sau:

$$\widehat{\mathbf{\Lambda}}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*) = \bigcup_{w^* \in W^*} \left\{e_P^* \,\middle|\, \begin{matrix} (e_P^*, -u^*) \in \\ \nabla\psi(u, e_P)^* w^* + \widehat{D}^* Q(u, e_P, w)(w^*) \end{matrix}\right\}$$

và

$$\mathbf{\Lambda}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*) = \bigcup_{w^* \in W^*} \left\{e_P^* \,\middle|\, \begin{matrix} (e_P^*, -u^*) \in \\ \nabla\psi(u, e_P)^* w^* + D^* Q(u, e_P, w)(w^*) \end{matrix}\right\}$$

Áp dụng Qui (2016) (Định lý 3.3) ta suy ra khẳng định rằng: với mọi $u^* \in L^2(\Omega)$, các bao hàm thức sau đây nghiệm đúng

$$\widehat{\mathbf{\Lambda}}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*) \subset \widehat{D}^* \mathcal{G}(\bar{e}_P, \bar{u})(u^*) \subset D^* \mathcal{G}(\bar{e}_P, \bar{u})(u^*).$$

Nếu toán tử đa trị Q đóng địa phương quanh điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ với $\bar{w} = -\psi(\bar{u}, \bar{e}_P) \in Q(\bar{u}, \bar{e}_P)$, SNC tại điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ và thỏa điều kiện

$$\begin{cases} 0 \in \nabla\psi(\bar{u}, \bar{e}_P)^* w^* + D^* Q(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})(w^*) \\ \qquad \Longrightarrow w^* = 0 \end{cases}$$

thì ta có các bao hàm thức

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbf{\Lambda}}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*) \\ &\subset \widehat{D}^* \mathcal{G}(\bar{e}_P, \bar{u})(u^*) \subset D^* \mathcal{G}(\bar{e}_P, \bar{u})(u^*) \\ &\subset \mathbf{\Lambda}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*). \end{aligned}$$

Nếu thêm vào đó toán tử đa trị Q chính quy đồ thị tại điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ thì ta có các đẳng thức

$$\begin{aligned} &\widehat{\mathbf{\Lambda}}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*) \\ &= \widehat{D}^* \mathcal{G}(\bar{e}_P, \bar{u})(u^*) = D^* \mathcal{G}(\bar{e}_P, \bar{u})(u^*) \\ &= \mathbf{\Lambda}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*). \end{aligned}$$

Chú ý rằng $\mathcal{G}_{ad}(e) = \mathcal{G}_{ad}(e_Y, e_J, e_P)$ không phụ thuộc vào các biến tham số thành phần e_Y, e_J, và $\mathcal{G}_{ad}(e) = \mathcal{G}_{ad}(e_Y, e_J, e_P) = \mathcal{G}(e_P)$ nên ta có

$$\widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})(u^*) = \{0\} \times \{0\} \times \widehat{D}^* \mathcal{G}(\bar{e}_P, \bar{u})(u^*),$$

$$D^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})(u^*) = \{0\} \times \{0\} \times D^* \mathcal{G}(\bar{e}_P, \bar{u})(u^*),$$

và hơn nữa ta lại có

$$\widehat{\mathbf{\Xi}}(Q, \psi, \bar{\omega})(u^*) = \{0\} \times \{0\} \times \widehat{\mathbf{\Lambda}}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*),$$

$$\mathbf{\Xi}(Q, \psi, \bar{\omega})(u^*) = \{0\} \times \{0\} \times \mathbf{\Lambda}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*).$$

Từ các điều này và từ các khẳng định ở trên đối với các tập $\widehat{\mathbf{\Lambda}}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*)$ và $\mathbf{\Lambda}(Q, \psi, \bar{\omega}_P)(u^*)$ cho các đối đạo hàm của toán tử $\mathcal{G}(\cdot)$ ta suy ra các khẳng định của định lý đối các tập $\widehat{\mathbf{\Xi}}(Q, \psi, \bar{\omega})(u^*)$ và $\mathbf{\Xi}(Q, \psi, \bar{\omega})(u^*)$ cho các đối đạo hàm của toán tử ràng buộc $\mathcal{G}_{ad}(\cdot)$. □

4. VI PHÂN SUY RỘNG

Trong phần này, các tính chất dưới vi phân suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ của bài toán điều khiển tối ưu $P(e)$ với ràng buộc cân bằng được khảo sát. Các công thức tính đạo hàm của hàm mục tiêu và các công thức tính/đánh giá đối đạo hàm của toán tử ràng buộc của bài toán $P(e)$ là cơ sở để xây dựng công thức tính dưới vi phân suy rộng của hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$ của bài toán $P(e)$.

Định lý sau đây thiết lập mối liên hệ giữa đạo hàm của hàm mục tiêu, đối đạo hàm của toán tử ràng buộc của bài toán $P(e)$ và dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu $\mu(\cdot)$. Trong phát biểu và chứng minh định lý sẽ có sử dụng đến giả thiết về lát cắt Lipschitz trên địa phương, một khái niệm được trình bày trong Mordukhovich et al. (2009).

Định lý 4.1. *Giả sử rằng các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn và xét $\bar{e} = (\bar{e}_Y, \bar{e}_J, \bar{e}_P) \in dom\, S$ và $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$. Khi đó, ta có bao hàm thức*

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) \subset J_e'(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J_u'(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)$$

trong đó toán tử đa trị

$$\mathcal{G}_{ad}: E \to 2^{L^2(\Omega)}$$

xác định bởi

$$e \mapsto \mathcal{G}_{ad}(e) = \left\{u \,\middle|\, \begin{matrix} u \in L^2(\Omega), \\ 0 \in \psi(u, e_P) + Q(u, e_P) \end{matrix}\right\}$$

là toán tử ràng buộc dạng cân bằng của bài toán $P(e)$ được cho trong (1.3).

Thêm vào đó, nếu $S: dom\,\mathcal{G}_{ad} \to 2^{L^2(\Omega)}$ có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ thì ta nhận được đẳng thức

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \hat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).$$

Chứng minh. Để chứng minh định lý ta sử dụng kết quả Mordukhovich et al. (2009) (Định lý 1) về đánh giá trên cho dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu sau

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) \subset \bigcap_{(u^*,e^*)\in\hat{\partial}^+J(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})} \big(e^* + \hat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(u^*)\big).$$

Lưu ý rằng các giả thiết (A1)–(A3) đảm bảo cho hàm mục tiêu $J(\cdot,\cdot): L^2(\Omega) \times E \to \mathbb{R}$ khả vi Fréchet tại điểm $(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})$. Kết quả này suy ra

$$\begin{aligned}\hat{\partial}^+J(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) &= \{J'(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\}\\ &= \{(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}), J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}))\}.\end{aligned}$$

Do đó, ta thu được bao hàm thức

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \hat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).$$

Nếu thêm vào giả thiết $S: \text{dom}\,\mathcal{G}_{ad} \to 2^{L^2(\Omega)}$ có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ thì áp dụng Mordukhovich et al. (2009) (Định lý 2) ta suy ra rằng

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \hat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big),$$

và như vậy định lý đã được chứng minh. □

Ta nhận xét rằng công cụ và phương pháp chứng minh Định lý 4.1 tương tự trong Quí và Phúc (2022), Quí et al. (2022). Tuy nhiên, toán tử ràng buộc trong Quí và Phúc (2022) là ràng buộc điểm và toán tử ràng buộc trong Quí et al. (2022) là ràng buộc biên trơn, trong khi toán tử ràng buộc trong bài báo này là ràng buộc cân bằng.

Định lý 4.2. *Giả sử rằng các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn và xét $\bar{e} = (\bar{e}_Y, \bar{e}_J, \bar{e}_P) \in dom\,S$ và $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$. Khi đó, nếu toán tử đa trị Q đóng địa phương quanh điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w}) \in gphQ$ và SNC tại điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ với $\bar{w} := -\psi(\bar{u}, \bar{e}_P) \in Q(\bar{u}, \bar{e}_P)$, và thỏa điều kiện*

$$\begin{cases}0 \in \nabla\psi(\bar{u}, \bar{e}_P)^*w^* + D^*Q(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})(w^*)\\ \qquad\Longrightarrow w^* = 0\end{cases}$$

thì ta có các bao hàm thức

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big),$$

với $\bar{\omega} := (\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}) \in \text{gph}\,\mathcal{G}_{ad}$.

Nếu thêm vào đó $S: \text{dom}\,\mathcal{G}_{ad} \to 2^{L^2(\Omega)}$ có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ và toán tử đa trị Q chính quy đồ thị tại điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ thì ta có các đẳng thức

$$\begin{aligned}\hat{\partial}\mu(\bar{e}) &= J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \hat{\Xi}(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)\\ &= J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).\end{aligned}$$

Chứng minh. Dưới các giả thiết trong phần đầu của định lý thì theo Định lý 3.3 ta có bao hàm thức

$$\hat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big) \subset \Xi(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).$$

Từ bao hàm thức này và theo Định lý 4.1 ta suy ra

$$\begin{aligned}\hat{\partial}\mu(\bar{e}) &\subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \hat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)\\ &\subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).\end{aligned}$$

Nếu thêm vào giả thiết $S: \text{dom}\,\mathcal{G}_{ad} \to 2^{L^2(\Omega)}$ có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại điểm $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$ và toán tử đa trị Q chính quy đồ thị tại điểm $(\bar{u}, \bar{e}_P, \bar{w})$ thì áp dụng Định lý 3.3 và Định lý 4.1 ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}\hat{\partial}\mu(\bar{e}) &= J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \hat{\Xi}(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)\\ &= J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \hat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)\\ &= J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)\\ &= J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \Xi(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big),\end{aligned}$$

trong đó các đẳng thức sau đây đã được áp dụng

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \hat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)$$

và

$$\begin{aligned}&\hat{\Xi}(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)\\ &= \hat{D}^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)\\ &= D^*\mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)\\ &= \Xi(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big).\end{aligned}$$

Định lý đã được chứng minh xong. □

Định lý 4.3. *Nếu tất cả giả thiết của Định lý 4.2 được thỏa mãn thì ta có công thức tường minh sau*

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \hat{\Xi}(Q, \psi, \bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\big)$$

$$= \bigcup_{w^*\in W^*}\left\{e^* \,\middle|\, \begin{array}{c} e^* = (e^*_Y, e^*_J, e^*_P) \in E^*,\\ e^*_Y = \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y),\\ e^*_J = y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y},\\ \big(e^*_P, -\varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} - \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y)\big) \in\\ \nabla\psi(u, e_P)^*w^* + \hat{D}^*Q(u, e_P, w)(w^*)\end{array}\right\}$$

và

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) + \Xi(Q,\psi,\bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big)$$

$$= \bigcup_{w^*\in W^*}\left\{ e^* \;\middle|\; \begin{array}{c} e^* = \big(e_Y^*, e_J^*, e_P^*\big) \in E^*, \\ e_Y^* = \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), \\ e_J^* = y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, \\ \big(e_P^*, -\varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} - \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y)\big) \in \\ \nabla\psi(u,e_P)^* w^* + D^*Q(u,e_P,w)(w^*) \end{array} \right\}.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 3.2 ta suy ra rằng đạo hàm của hàm mục tiêu theo biến điều khiển tại điểm $(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})$ là

$$J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) = \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y).$$

Theo chứng minh Quí et al. (2022) (Định lý 4.2) ta cũng có đạo hàm của hàm mục tiêu theo biến tham số tại điểm $(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})$ là

$$J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) = \big(\varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, 0\big).$$

Thế biểu thức tường minh của $J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})$ và $J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})$ vào các đẳng thức được thiết lập trong Định lý 4.2 sau đây

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) + \hat{\Xi}(Q,\psi,\bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big)$$

và

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}) + \Xi(Q,\psi,\bar{\omega})\big(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e})\big)$$

ta suy ra khẳng định của định lý. ☐

Ví dụ 4.1. Để minh họa cho kết quả đạt được ta xét hàm $Q: L^2(\Omega) \times L^p(\Omega) \to 2^{\mathbb{R}}$ xác định bởi

$$Q(u,e_P) = [0,+\infty), \forall (u,e_P) \in L^2(\Omega) \times L^p(\Omega).$$

Khi đó ràng buộc cân bằng $0 \in \psi(u,e_P) + Q(u,e_P)$ tương đương với $\psi(u,e_P) \le 0$. Xét $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$ với $\bar{e} = \big(\bar{e}_Y,\bar{e}_J,\bar{e}_P\big)$ và xét $(\bar{u},\bar{e}_P,\bar{w}) \in \mathrm{gph}Q$ với $\bar{w} = -\psi(\bar{u},\bar{e}_P)$. Ta thấy rằng Q đóng địa phương và SNC tại $(\bar{u},\bar{e}_P,\bar{w})$. Ta có $D^*Q(\bar{u},\bar{e}_P,\bar{w})(w^*) = \{(0,0)\}$ với $w^* \ge 0$ và $D^*Q(\bar{u},\bar{e}_P,\bar{w})(w^*) = \emptyset$ với $w^* < 0$. Do đó

$$\begin{cases} 0 \in \nabla\psi(\bar{u},\bar{e}_P)^* w^* + D^*Q(\bar{u},\bar{e}_P,\bar{w})(w^*) \\ \qquad \Longrightarrow w^* = 0. \end{cases}$$

Áp dụng Định lý 4.2 và các công thức biểu diễn dạng hiển trong Định lý 4.3 ta thu được

$$\hat{\partial}\mu(\bar{e})$$

$$\subset \left\{\big(\varphi_{\bar{u}_{\bar{e}},\bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}}+\bar{e}_Y}, \eta\nabla_{e_P}\psi(\bar{u},\bar{e}_P)\big)\right\},$$

trong đó $\eta := w^* \ge 0$.

Nhận xét 4.1. Kết quả trong Ví dụ 4.1 được thiết lập trong Quí et al. (2022) và là trường hợp riêng của kết quả trong bài báo này.

5. KẾT LUẬN

Nghiên cứu liên quan đến sự ổn định vi phân của bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính với ràng buộc biên trơn được phát triển, mà ở đây ràng buộc biên trơn được thay thế bởi ràng buộc cân bằng (một dạng ràng buộc tổng quát hơn và phức tạp hơn ràng buộc biên trơn). Bài báo đã đạt được các kết quả mới về các tính chất vi phân suy rộng của bài toán điều khiển tối ưu dưới tác động của nhiễu. Các kết quả mới của bài báo bao gồm các công thức tính đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc dạng cân bằng có nhiễu, các công thức tính dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc dạng cân bằng. Việc xây dựng công thức tính dưới vi phân Mordukhovich và dưới vi phân qua giới hạn suy biến là một trong những hướng phát triển của bài báo này.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo này được tài trợ bởi đề tài cấp Bộ với mã số B2023-TCT-07 của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Casas, E. (2012). Second order analysis for bang-bang control problems of PDEs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *50*(4), 2355-2372. https://doi.org/10.1137/120862892

Casas, E., & Mateos, M. (2002). Second order optimality conditions for semilinear elliptic control problems with finitely many state constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *40*(5), 1431-1454. https://doi.org/10.1137/S0363012900382011

Casas, E., de los Reyes, J. C., & Tröltzsch, F. (2008). Sufficient second-order optimality conditions for semilinear control problems with pointwise state constraints. *SIAM Journal on optimization*, *19*(2), 616-643. https://doi.org/10.1137/07068240X

Mordukhovich, B. S. (2006a). *Variational analysis and generalized differentiation. I. Basic theory*. Springer-Verlag, Berlin.

Mordukhovich, B. S. (2006b). *Variational analysis and generalized differentiation. II. Applications*. Springer-Verlag, Berlin. https://doi.org/10.1007/3-540-31246-3

Mordukhovich, B. S. (2018). *Variational analysis and applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-92775-6

Mordukhovich, B. S., Nam, N. M., & Yen, N. D. (2009). Subgradients of marginal functions in parametric mathematical programming. *Mathematical Programming*, *116*(1-2), Ser. B, 369-396. https://doi.org/10.1007/s10107-007-0120-x

Poliquin, R. A., & Rockafellar, R. T. (1998). Tilt stability of a local minimum. *SIAM Journal Optimization, 8*(2), 287-299. https://doi.org/10.1137/S1052623496309296

Qui, N. T. (2016). Coderivatives of implicit multifunctions and stability of variational systems. *Journal of Global Optimization*, *65*(3), 615-635. https://doi.org/10.1007/s10898-015-0387-z

Qui, N. T. (2020). Subdifferentials of marginal functions of parametric bang–bang control problems. *Nonlinear Analysis*, *195*, 111743, 13pp. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111743

Quí, N. T., Duy, V. T. T., Đạo, M. L. C., & Phúc, Đ. D. (2022). Vi phân suy rộng trong điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc biên trơn. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ*, *58*(1), 138-144. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2022.108

Quí, N. T., & Phúc, Đ. D. (2022). Vi phân suy rộng của hàm giá trị tối ưu trong điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình đạo hàm riêng elliptic. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ*, *58*(1A), 87-94. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2022.009

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2018). Stability for bang-bang control problems of partial differential equations. *Optimization*, *67*(12), 2157-2177. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1522634

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2019). Full stability for a class of control problems of semilinear elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, *57*(4), 3021-3045. https://doi.org/10.1137/17M1153224

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2020). Subgradients of marginal functions in parametric control problems of partial differential equations. *SIAM Journal on Optimization*, *30*(2), 1724-1755. https://doi.org/10.1137/18M1200956

Tröltzsch, F. (2010). *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*. American Mathematical Society, Providence, RI. https://doi.org/10.1090/gsm/112