Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2023.206

BÀI TOÁN VỊ TRÍ LIÊN THÔNG KHÔNG MONG MUỐN TRÊN CÂY

Phan Minh Tâm*, Nguyễn Đặng Ngọc Ngân và Nguyễn Hoàng Duy
Bộ môn Sư phạm Toán học, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): tamb2106958@student.ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 12/05/2023
Sửa bài (Revised): 27/07/2023
Duyệt đăng (Accepted): 07/08/2023

Title: *The connected p-maxian problem on tree graphs*

Author(s): *Phan Minh Tam*, Nguyen Dang Ngoc Ngan and Nguyen Hoang Duy*

Affiliation(s): *Can Tho University*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, bài toán liên thông p-maxian trên đồ thị cây sẽ được xem xét. Để giải bài toán, đầu tiên, một tập trội hữu hạn được tìm ra. Sau đó, một thuật toán tổ hợp được phát triển cho bài toán dựa trên việc tính toán giá trị mục tiêu đối với mỗi phần tử trong tập trội.

Từ khoá: *Bài toán vị trí, p-maxian, tập trội*

ABSTRACT

In this paper, the connected p-maxian problem on tree graphs is considered. To solve the problem, firstly, a finite dominating is found. Then, a combinatorial algorithm is developed for the problem based on computing objective values concerning all elements in the dominating set.

Keywords: *Dominating set, location problem, p-maxian*

1. MỞ ĐẦU

Lý thuyết vị trí cung cấp cơ sở lý thuyết để ra quyết định, trong đó mục tiêu nghiên cứu là xác định vị trí tối ưu của một hay nhiều vật thể. Lý thuyết vị trí đóng một vai trò quan trọng trong quy hoạch, ví dụ sắp xếp vị trí các nhà kho, bệnh viện hay trạm cứu hỏa. Nhiều tác giả đã có công trình nghiên cứu liên quan đến bài toán vị trí như Kariv and Hakimi (1979), Drezner and Hamacher (2002), … Những hàm mục tiêu thường được nghiên cứu là hàm mục tiêu của điểm *trung tâm* hay điểm *trung vị* nếu vị trí cần tìm là vị trí mong muốn, tuy nhiên, các bài toán với các vị trí không mong muốn cũng được nghiên cứu. Một số ví dụ về vị trí cơ sở vật chất không mong muốn có thể kể đến như sân bay, bãi rác, … là các vị trí mà càng xa khu dân cư càng tốt. Nội dung cơ bản và hướng tiếp cận cho các bài toán vị trí không mong muốn được nghiên cứu trong các kết quả của tác giả Church and Garfinkel (1978) và Tamir (1991).

Trong nhiều trường hợp, các cơ sở vật chất mới được xây dựng phải có tính *liên kết* để chuyển thông tin, liên lạc hay vì lí do an toàn. Do đó, bài toán vị trí p vật thể trên một mạng lưới sao cho các vật thể này phải được liên kết với nhau đã được khảo sát gần đây. Bài toán vị trí liên thông p-center trên đồ thị lần đầu tiên được xem xét và được chứng minh thuộc lớp bài toán NP-hard trong công trình của Yen (2012). Không chỉ vậy, một thuật toán trong thời gian tuyến tính đã được đề xuất cho bài toán trên đồ thị có trọng số bằng nhau và độ dài các cạnh bằng nhau. Vào năm 2016, Chang et al. đã đề cập đến bài toán p-median liên thông trên đồ thị khối, siêu lớp của đồ thị cây. Các tác giả đã chứng minh được bài toán thuộc lớp NP-hard nếu có hai độ dài cạnh khác nhau. Tuy nhiên, đối với trường hợp độ dài cạnh thống nhất, một thuật toán trong thời gian tuyến tính được phát triển để tìm p-median liên thông trên đồ thị khối cơ bản. Sau đó, Kang et al. đã đưa ra một thuật toán trong thời gian tuyến tính đơn giản hơn cho bài toán p-median liên thông trên đồ thị khối với độ dài cạnh thống nhất vào năm 2018. Họ cũng đã nghiên cứu bài toán hai mục tiêu với hàm mục tiêu trung vị và trung tâm, bài toán vị trí liên thông trên đồ thị khối được gọi là bài toán *p-centdian* liên thông. Bai et al. (2018) đã giải bài toán p-center liên thông trên đồ thị xương rồng trong thời gian bậc hai bằng cách phân chia đồ thị xương rồng.

Cho $T=(V,E)$ là một cây với tập đỉnh V và tập cạnh E. Ở đây, mỗi đỉnh v được liên kết với một trọng số âm w_v, mỗi cạnh $e\in E$ có độ dài dương l_e. Ngoài ra, mỗi cạnh của cây có thể được coi là một khoảng liên tục chứa các điểm trên cây. Khoảng cách giữa hai điểm a và b là độ dài của đường đi $P(a,b)$ nối giữa chúng, ký hiệu là $d(a,b)$.

Với mỗi tập p vật thể $X:=\left\{x_1,x_2,...,x_p\right\}$, hàm mục tiêu *p-median không mong muốn* trên T có thể được viết bằng hai cách như sau:

$$\sum_{v\in V}\min\left(w_v d\left(v,X\right)\right), \qquad (1)$$

$$\sum_{v\in V}w_v \min d\left(v,X\right). \qquad (2)$$

Ở đây, khoảng cách từ đỉnh v tới tập X được định nghĩa là $d(v,X):=\min_{i=1,2,..,p}\left\{d(v,x_j)\right\}$.

Đối với hàm mục tiêu (1), sau khi đặt lại một trong số dương mới $w_v=|w_v|$ với mọi $v\in V$, bài toán p-median không mong muốn của hàm min trở thành hàm max

$$F(X):=\sum_{v\in V}w_v.\max_{j=1}^{p}d(v,x_j). \qquad (3)$$

Bài toán này được gọi là bài toán *p-maxian* trên cây, tham khảo Burkard et al. (2007). Với $p=1$, bài toán sẽ là bài toán 1-maxian và nó có thể được giải trong thời gian tuyến tính bởi Ting (1984). Với $p>1$, Burkard et al. (2007) chỉ ra rằng hai đỉnh đầu mút của đường đi dài nhất trên cây là 2-maxian của T và p-maxian sẽ chứa 2-maxian. Do đó, bài toán p-maxian có thể được giải trong thời gian tuyến tính bằng cách tìm đường đi dài nhất trên cây. Tương tự, Cheng and Kang (2010) phát triển một cách tiếp cận trong thời gian tuyến tính cho bài toán p-maxian trên một đồ thị khoảng. Kang and Cheng (2010) cũng xem xét bài toán liên quan trên đồ thị khối và chỉ ra rằng bài toán có thể được giải trong thời gian tuyến tính. Gần đây, Kang et al. (2014) đã giải bài toán 2-maxian trên đồ thị xương rồng trong thời gian bậc hai dựa vào tính chất trung điểm của 2-maxian. Nguyen et al. (2020) đã tiếp tục phát triển một thuật toán trong thời gian tuyến tính cho bài toán p-maxian trên cây với sự ràng buộc về khoảng cách giữa các cơ sở bằng cách xây dựng tập trội các trung điểm.

Trong những nghiên cứu gần đây, các bài toán vị trí liên thông cùng với bài toán vị trí maxian trên mạng lưới đã thu hút nhiều sự chú ý của cộng đồng nghiên cứu lý thuyết vị trí. Tuy nhiên, chưa có nghiên cứu nào về bài toán vị trí maxian liên thông mặc dù nó có nhiều ý nghĩa thực tế. Điển hình là khi chúng ta cần tìm vị trí cho các vật thể không mong muốn mà phải kết nối với nhau để thuận tiện cho liên lạc và vận chuyển. Dựa vào từng trường hợp cụ thể, bài toán vị trí *maxian liên thông* có thể được mô hình hóa. Nghiên cứu được thực hiện nhằm tìm hiểu bài toán p-maxian liên thông trên cây. Cụ thể là, tập $X=\left\{v_1,v_2,...,v_p\right\}$ của p đỉnh được tìm để $\sum_{v\in V}w_v.\max_{j=1}^{p}d(v,v_j)$ đạt tối đa và đồ thị sinh bởi X là một cây con của T.

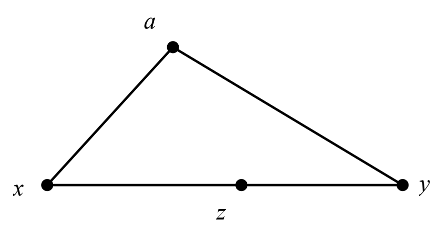
Tính chất của p-maxian liên thông trên cây được nghiên cứu và chỉ ra kết quả của tập trội ở Phần 2. Sau đó, một thuật toán tổ hợp được phát triển để giải bài toán p-maxian liên thông trên cây trong thời gian $O(ns\log p)$, với n là số đỉnh trên cây, s là số lá, p là số đỉnh của p-maxian.

2. TẬP TRỘI HỮU HẠN

Trước tiên, ta nhắc lại một số tính chất cơ bản của đồ thị cây. Với hai điểm x, y gọi $P(x,y)$ là đường đi nối x và y.

Bổ đề 1. Đặt a,x,y,z là 4 điểm phân biệt nằm trên cây T sao cho $z\in P(x,y)$ thì $z\in P(a,x)$ hoặc $z\in P(a,y)$.

Chứng minh. Theo giả thiết ta có $z\in P(x,y)$. Ta giả sử $z\notin P(a,x)$ và $z\notin P(a,y)$ (như hình vẽ)



Hình 1. Phản chứng của Bổ đề 1

Bởi vì đường đi kết nối x, y đi qua a nhưng không chứa z, trong khi đó đường đi $P(x,y)$ chứa z. Vì vậy, tồn tại hai con đường nối x và y và điều này mâu thuẫn với tính chất của đồ thị cây. ■

Mục đích của ta là tìm một cây con T_p với p đỉnh liên thông ($p > 1$) trên cây T sao cho hàm *maxian* là lớn nhất $F(V(T_p)) = \sum_{v\in V} w_v \max_{v'\in T_p} d(v,v')$.

Cho một cặp gồm hai đỉnh u và v, ta viết $S_u^{\{u,v\}} = \{v' \in V : d(v',u) \geq d(v',v)\}$. Nghĩa là tập hợp tất cả các đỉnh v', sao cho khoảng cách từ v' đến u không nhỏ hơn so với khoảng cách từ v' đến v. Ngược lại, $V \setminus S_u^{\{u,v\}} := \{v' \in V : d(v',v) > d(v',u)\}$ là tập hợp tất cả các đỉnh v' sao cho v' gần u hơn so với v.

Mệnh đề 1: Đặt là $P(a,b)$ đường đi dài nhất của T_p. Hàm maxian của T_p là

$$F(V(T_p)) = F(\{a,b\}) = \sum_{v\in S_a^{\{a,b\}}} w_v d(v,a) + \sum_{v\in V\setminus S_a^{\{a,b\}}} w_v d(v,b)$$

Chứng minh. Đặt m là trung điểm của $P(a,b)$.

Bước 1: Trước tiên, ta nhận thấy rằng $d(m,u) \leq d(m,a) = d(m,b)$ với mọi $u \in V(T_p)$. Giả sử $d(m,u) > d(m,b)$. Theo Bổ đề 1, $m \in P(a,b)$ và m, u, a, b phân biệt nên $m \in P(a,u)$ hoặc $m \in P(u,b)$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử $m \in P(a,u)$

Ta có $d(a,u) = d(a,m) + d(m,u) > d(a,m) + d(m,b) = d(a,b).$

(Mâu thuẫn)

Vậy $d(m,u) \leq d(m,a) = d(m,b).$

Bước 2: Ta quan sát thấy rằng $d(v,u) \leq \max\{d(v,a), d(v,b)\}$ với $v \in V, u \in V_p$. Từ *Bổ đề 1*, ta có $m \in P(v,b)$ hoặc $m \in P(v,a)$.

Không mất tính tổng quát, ta giả sử rằng $m \in P(v,a)$.

$$d(u,v) \leq d(v,m) + d(m,u) \leq d(v,m) + d(m,a) = d(v,a).$$

Bước 3: Từ *bước 2*, ta có thể viết

$$F(T_p) = \sum_{v\in V} w_{v'} \max\{d(v,a), d(v,b)\}$$
$$= \sum_{v\in S_a^{\{a,b\}}} w_v d(v,a) + \sum_{v\in V\setminus S_a^{\{a,b\}}} w_v d(v,b).$$ ■

Mệnh đề 2: (Tập trội của T_p). Tồn tại một p-maxian liên thông của T, gọi là cây con T_p, thỏa một trong hai tính chất sau:

1. T_p là một đường đi cơ bản,

2. Gọi $P(a,b)$ là đường đi dài nhất của cây T_p thì a, b là hai lá của cây T.

Chứng minh. Giả sử mọi p-maxian liên thông T_p đều không phải là đường đi cơ bản và đường đi dài nhất trên cây con T_p không nối hai lá trên cây T.

$\{a,b\}$ là tập hai đầu mút của đường đi dài nhất trên cây con T_p. Khi đó, tồn tại đỉnh $v \in T$ sao cho $v \notin P(a,b)$ và v kề với a hoặc b.

T_p không phải là đường đi nên tồn tại đỉnh $u \in T_p$ nhưng $u \notin P(a,b)$.

Đặt $T_p' = (T_p \setminus \{u\}) \cup \{v\}$. Khi đó T_p' cũng là một cây con liên thông của T. Giả sử v kề với b, khi đó $P(a,v)$ trở thành đường đi dài nhất trên T_p' vì $P(a,b)$ là đường đi dài nhất trên T_p.

Từ đó, ta có thể viết:

$$F(V(T_p')) = \sum_{v'\in S_a^{\{a,v\}}} w_{v'} d(v',a) + \sum_{v'\in V\setminus S_a^{\{a,v\}}} w_{v'} d(v',v)$$

(Theo mệnh đề 1) (*)

Vì $V \setminus S_a^{\{a,v\}} = \left(V \setminus S_a^{\{a,v\}} \cap S_a^{\{a,b\}}\right) \cup V \setminus S_a^{\{a,b\}}$ (do $S_a^{\{a,v\}} \subset S_a^{\{a,b\}}$) nên

$$F(V(T_p')) = \sum_{v'\in S_a^{\{a,v\}}} w_{v'} d(v',a) + \sum_{v'\in V\setminus S_a^{\{a,v\}} \cap S_a^{\{a,b\}}} w_{v'} d(v',v) + \sum_{v'\in V\setminus S_a^{\{a,b\}}} w_{v'} d(v',v)$$

Với $v' \in V \setminus S_a^{\{a,b\}}$, áp dụng Bổ đề 1 cho bốn đỉnh không trùng nhau a, b, v, v' ta được $b \in P(v',v)$ hoặc $b \in P(v',a)$. Nếu $b \in P(v',v)$ thì

$d(v',a) = d(v',b) + d(b,a) > d(v',b)$ (vô lí do $v' \in V \setminus S_a^{\{a,b\}}$). Do đó $b \in P(v',a)$ suy ra $d(v',v) > d(v',b)$.

Chú ý rằng $d(v',v) > d(v',a)$ với $v' \in \left(V \setminus S_a^{\{a,v\}}\right) \cap S_a^{\{a,b\}}$ và $v' \in V \setminus S_a^{\{a,b\}}$ với $d(v',v) > d(v',b)$, ta có

$$F\left(V\left(T_p'\right)\right) > \sum_{v' \in S_a^{\{a,v\}}} w_{v'} d(v',a)$$
$$+ \sum_{v' \in V \setminus S_a^{\{a,v\}} \cap S_a^{\{a,b\}}} w_{v'} d(v',a) + \sum_{v' \in V \setminus S_a^{\{a,b\}}} w_{v'} d(v',b)$$
$$= \sum_{v' \in S_a^{\{a,b\}}} w_{v'} d(v',a) + \sum_{v' \in V \setminus S_a^{\{a,b\}}} w_{v'} d(v',b) = F\left(V\left(T_p\right)\right)$$

Suy ra T_p không phải là một p-maxian, mâu thuẫn giả thiết. Vậy mệnh đề được chứng minh xong. ■

Từ Mệnh đề 2, chúng ta có thể đưa ra kết quả sau.

Hệ quả 1. Nếu tồn tại đường đi dài nhất $P(a,b)$ trên T có nhiều nhất p đỉnh, thì bất kỳ tập liên thông nào với cây dẫn xuất T_p thỏa $P(a,b) \subset T_p$ cũng là p-maxian liên thông trên cây T.

Chứng minh. Dựa trên kết quả của Burkard et al. (2007), ta có giá trị p-maxian (với p đỉnh không nhất thiết liên thông) là $F(\{a,b\})$. Vì $F\left(V\left(T_p\right)\right) = F(\{a,b\})$ nên $F\left(V\left(T_p\right)\right)$ là giá trị p-maxian trên cây T và tập p đỉnh liên thông chứa hai đỉnh a, b sao cho $P(a,b)$ là đường đi dài nhất trên cây T là p-maxian liên thông trên T. ■

3. THUẬT TOÁN TỔ HỢP

Ta lấy gốc của cây T tại lá r và ta được cây có hướng $\vec{T}$. Đặt $Child(v)$ là tập gồm tất cả các con của đỉnh v và $Des(v)$ là tập gồm tất cả con cháu của v trên cây $\vec{T}$. Ta định nghĩa $T(v)$ là cây con gồm v và con cháu của nó $V(T(v)) = Des(v) \cup \{v\}$.

Cho đỉnh cố định $v \in V$, mục đích của ta là tìm một p-maxian liên thông $T_p(v) \subset T(v)$ với tính chất v là đỉnh đầu mút của đường đi dài nhất trong $T_p(v)$. Ta gọi $T_p(v)$ với giá trị *maxian* lớn nhất là

p-maxian liên thông địa phương tương ứng với v trên $\vec{T}$.

Đặt $P(v',v)$ là đường đi dài nhất của $T_p(v)$. Dễ thấy rằng $T_p(v)$ có thể được khôi phục ngay sau khi *v'* được xác định. Mệnh đề bên dưới sẽ cho ta sự phụ thuộc của *v'* vào *v*. Trước tiên, ta trình bày một số kí hiệu quan trọng cho mệnh đề. Đặt L là tập tất cả các lá trên T. Trên $\vec{T}$, ta kí hiệu cấp của mỗi đỉnh t là $lev(t)$. Chú ý rằng $lev(r) = 0$ với r là gốc và $lev(u) = lev(t) + 1$ với $u \in Child(t)$.

Mệnh đề 3: *(Mối quan hệ giữa v và v').* Đặt $P(v,v')$ là đường đi dài nhất của $T_p(v)$ và định nghĩa $S = \{r\} \cup \left\{\begin{matrix} v \in V \setminus L : \max_{u \in L \cap Des(v)} lev(u) \\ \geq lev(v) + p - 1 \end{matrix}\right\}$.

Ta được:

Nếu $v = r$ thì $v' \in \vec{T}$ sao cho $lev(v') = lev(v) + p - 1$ hoặc $v' \in L \setminus \{r\}$ với $lev(v') < lev(v) + p - 1$.

- Nếu $v \in S \setminus \{r\}$ thì $lev(v') = lev(v) + p - 1$.
- Nếu $v \notin S$ thì $T_p(v)$ không tồn tại.

Chứng minh. Từ Mệnh đề 2, ta biết được rằng v, v' đều là lá hoặc là $P(v,v') = T_p(v)$, trong trường hợp này, ta nhận thấy rằng $lev(v') = lev(v) + p - 1$.

- Đầu tiên ta xem xét $v = r$. Nếu $P(v,v')$ chứa chính xác p đỉnh, thì $lev(v') = lev(v) + p - 1$. Ngược lại, ta phải có $v' \in L \setminus \{r\}$ và $lev(v') < lev(v) + p - 1$.
- Với $v \in S \setminus \{r\} \subset V \setminus L$, dễ thấy $lev(v') = lev(v) + p - 1$. (Do v không phải là lá nên xảy ra trường hợp $P(v,v') = T_p(v)$).
- Việc còn lại là xem xét $v \notin S$, nghĩa là $v \in \{v \in V \setminus L : \max_{u \in L \cap Des(v)} lev(u) < lev(v) + p - 1\} \cup (L \setminus \{r\})$

Nếu $v \in L \setminus \{r\}$ thì $T(v) = \{v\}$ vì vậy $T_p(v)$ không tồn tại. (Do ta giả thiết $p > 1$)

Nếu $v \in \left\{ \begin{array}{l} v \in V \setminus L : \max_{u \in L \cap \mathrm{Des}(v)} lev(u) < \\ lev(v) + p - 1 \end{array} \right\}$

Ta có:

$$lev(v') \le \max_{u \in T(v)} lev(u) = \max_{u \in L \cap Des(v)} lev(u) < lev(v) + p - 1.$$

Từ đó dẫn đến mâu thuẫn nếu $T_p(v)$ tồn tại.■

Khoảng cách từ gốc *r* đến mọi đỉnh trên cây có thể được tính bằng thuật toán tìm kiếm theo chiều rộng. Để khôi phục lại khoảng cách $d(v,u)$ với *v* là tổ tiên của *u*, ta có $d(v,u) = d(r,u) - d(r,v)$ trong thời gian hằng. Hơn nữa, ta đặt $W := \sum_{v \in V(T)} w_v$ là tổng trọng số của cây có hướng và $W(v) := \sum_{v' \in Des(v)} w_v + w_{v'}$ là tổng trọng số của một nhánh cây có gốc tại *v*. Có thể thấy rằng $W = W(r)$. Ta có thể dễ dàng tính được $f(r) = \sum_{v \in V} w_v d(r,v)$ trong thời gian tuyến tính do $d(r,v)$ đã biết với mọi $v \in V$. Giả sử là $f(v)$ đã tính được, khi đó ta có thể tính $f(u)$ với mọi *u* là con của *v* dựa vào $f(v)$, W, $W(r)$ và $l_{(u,v)}$. Thật vậy,

$$\begin{aligned} f(u) &= \sum_{v' \in T_u} \mathrm{w}_{v'} d(u,v') + \sum_{v' \notin T_u} \mathrm{w}_{v'} d(u,v') \\ &= \sum_{v' \in T_u} \mathrm{w}_{v'} \left(d(v',v) - l_{(u,v)} \right) \\ &\quad + \sum_{v' \notin T_u} \mathrm{w}_{v'} \left(d(v',v) + l_{(u,v)} \right) \\ &= f(v) + \left(-\sum_{v' \in T_u} \mathrm{w}_{v'} + \sum_{v' \notin T_u} \mathrm{w}_{v'} \right) l_{(u,v)} \\ &= f(v) + \left(W - 2W(u) \right) l_{(u,v)}. \quad (6) \end{aligned}$$

Do đó, ta có thể tính và lưu lại giá trị trung vị tại mỗi đỉnh của cây trong thời gian tuyến tính bằng cách đệ quy theo hướng từ trên xuống dưới.

Bây giờ ta xem sự biểu diễn của hàm maxian của một tập liên thông là một cây con $T_p(v)$ có gốc tại *v* và $P(u,v)$ là đường đi dài nhất trên $T_p(v)$. Gọi $m_{\{u,v\}}$ là trung điểm của đường đi $P(u,v)$ khi đó theo Mệnh đề 1, ta có:

$$\begin{aligned} F(V(T_p)) &= \sum_{v' \in S_u^{\{u,v\}}} w_{v'} d(v',u) + \sum_{v' \in T \setminus S_u^{\{u,v\}}} w_{v'} d(v',v) \\ &= \sum_{v' \in S_v^{\{u,v\}}} w_{v'} \left(d(v', m_{\{u,v\}}) + \frac{d(u,v)}{2} \right) \\ &\quad + \sum_{v' \in T \setminus S_v^{\{u,v\}}} w_{v'} \left(d(v', m_{\{u,v\}}) + \frac{d(u,v)}{2} \right) \\ &= f(m_{\{u,v\}}) + \frac{Wd(u,v)}{2}. \quad (7) \end{aligned}$$

Hơn nữa, nếu trung điểm $m_{\{u,v\}}$ nằm trên một cạnh $e = (\alpha, \beta)$ với α là đỉnh cha của β, khi đó $f(m_{\{u,v\}}) = f(\alpha) + \left(W - 2W(\beta) \right) d(m_{\{\alpha,\beta\}}, \alpha)$

do (6). Do đó, kết hợp với (7), ta được

$$\begin{aligned} &F(V(T_p)) = f(\alpha) + \\ &\left(W - 2W(\beta) \right) d(m_{\{\alpha,\beta\}}, \alpha) + \frac{Wd(u,v)}{2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Dựa vào những dữ liệu liên quan đến các giá trị trung vị, trọng số của các nhánh của cây có hướng $\vec{T}$ và sự biểu diễn của hàm maxian ở (8), ta phát triển một thuật toán tổ hợp để tìm *p*-maxian liên thông địa phương trên cây $\vec{T}$. Ta lưu gốc *v* của nhánh cây đang xét vào tập *S*. Ở mỗi vòng lặp, ta tính giá trị của $F(\{v', v\})$ với mọi v' phụ thuộc vào *v* sao cho $lev(v') = lev(v) + p - 1$, suy ra $P(v,v')$ là một đường đi chứa *p* đỉnh, rồi lưu giá trị lớn nhất của chúng vào $tempt_1$. Chúng ta cũng tính $F(\{v', v\})$ với mọi lá v' của cây theo Mệnh đề 3 rồi lưu giá trị lớn nhất của chúng vào $tempt_2$. Để tính $F(\{v', v\})$, ta cần tìm trung điểm $m_{\{v,v'\}}$ và cạnh (α, β) chứa $m_{\{v,v'\}}$ với α là đỉnh cha của β. Dựa vào (8), ta có thể tính được $F(\{v', v\}) = F(V(T_p))$. Chúng ta lưu giá trị maxian lớn nhất vào *Max* và hai đỉnh đầu mút của đường đi dài nhất vào *Pair*. Cuối cùng, giá trị lớn nhất của $F(\{v, v^{\max}\})$ với mọi đỉnh *v* là mục tiêu *p*-maxian liên thông địa phương. Cụ thể hơn, ta sẽ đi vào phần Thuật toán 1.

Thuật toán 1. Tìm *p*-maxian liên thông địa phương trên cây có hướng.

Input: Một cây có hướng $\vec{T}$ gốc *r*.

Tính $W,\ f(v),\ W(v),\ lev(v)$ với mọi $v \in \vec{T}$.

Đặt tập *S* như ở (5), giá trị maxian là $Max = -\infty$, hai đỉnh đầu mút của đường đi dài nhất là $Pair := \varnothing$.

for $v \in S$ **do**

Đặt $tempt_1 := \max\left\{F\left(\{v,v'\}\right) : v' \in V, lev(v') = lev(v) + p - 1\right\}$.

if $v = r$ **then**

Đặt $tempt_2 := \max\left\{F\left(\{v,v'\}\right) : v' \in L, lev(v') < lev(v) + p - 1\right\}$.

Đặt $Fmax := \max\{tempt_1, tempt_2\}$ và $v^{\max}$ sao cho $F(v,v^{\max}) := Fmax.$

else

Đặt $Fmax := tempt_1$ và $v^{\max}$ sao cho $F(v,v^{\max}) := Fmax.$

end if

if $Fmax > Max$ **then**

Đặt $Max := Fmax$ và $Pair := \{v, v^{\max}\}$.

end if

end for

Output: Giá trị *Max* là *p*-maxian liên thông địa phương và cặp đỉnh đầu mút của đường đi dài nhất trên cây là *Pair*.

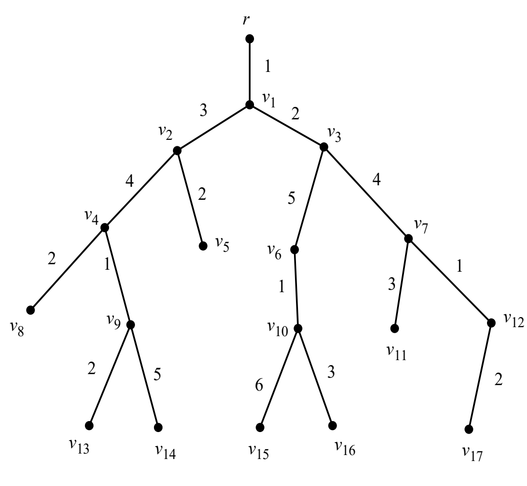
Chú ý rằng trong Output, nếu $Pair := \{v, v^{\max}\}$ với $P(v,v^{\max})$ chứa *p* đỉnh, thì *p*-maxian liên thông của *T* là tập đỉnh nằm trên đường đi đó. Mặt khác, nếu $P(v,v^{\max})$ chứa *q* đỉnh với $q < p$ thì ta thêm $p-q$ đỉnh gần kề với đường đi sao cho $P(v,v^{\max})$ vẫn là đường đi dài nhất để được kết quả là một tập chính là *p*-maxian liên thông của *T*.

Tiếp theo, chúng ta xem xét độ phức tạp của thuật toán. Ở bước đầu, chúng ta tính *S*, *W*, $f(v)$, $W(v)$, $lev(v)$ với mỗi đỉnh $v \in \vec{T}$ trong thời gian tuyến tính bằng cách tiếp cận đã được đưa ra trước đó. Ở các bước lặp của vòng while, ta tìm $tempt_1$ và $tempt_2$ bằng cách tính hàm maxian của cặp $\{v,v'\}$. Để tính giá trị của $F\left(\{v,v'\}\right)$, ta tìm trung điểm $m_{\{v,v'\}}$ trong thời gian $O(\log p)$ bằng phương pháp tìm kiếm nhị phân và sau đó áp dụng (8). Vì mỗi đỉnh được xem xét nhiều nhất một lần, nên trong trường hợp xấu nhất, độ phức tạp của thuật toán là $O(\sum_{v\in V} \deg(v)\log p) = O(n\log p)$.

Để giải bài toán *p*-maxian liên thông trên cây *T*, ta tìm *p*-maxian liên thông địa phương đối với mọi cây có hướng có gốc tại lá của cây *T*. Vì mọi phần tử trong tập trội có thể được xem xét bằng cách áp dụng Thuật toán 1 cho mọi cây có hướng tại lá, giá trị lớn nhất trong số các giá trị *p*-maxian địa phương là giá trị mục tiêu tối ưu và nghiệm tương ứng là *p*-maxian liên thông của *T*. Đó chính là kết quả của nghiên cứu.

Định lý 1. Bài toán *p*-maxian liên thông trên cây *T* có thể được giải thời gian $O(ns\log p)$ với *n* là số đỉnh của cây và *s* là số lá của nó. Thuật toán 1 được trình bày bằng ví dụ sau:

Ví dụ 1. *Cho cây* $T = (V,E)$ *với trọng số đỉnh đơn vị. Trên mỗi cạnh của cây, ta chỉ định một độ dài dương. Chúng ta sẽ đi tìm 4-maxian liên thông địa phương trên cây* $\vec{T}$. *Cây có hướng* $\vec{T}$ *được miêu tả ở Hình 2.*



Hình 2. Một ví dụ cho cây có hướng

Ta có $W(r) = W = 18$ và $f(r) = 145$. Bằng cách tính đã được trình bày trước đó, ta nhận được trọng số của nhánh có hướng và giá trị trung vị tại các đỉnh như trong Bảng 1.

Bảng 1. Trọng số của các nhánh có hướng và giá trị trung vị tại các đỉnh

v_i	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_{12}	v_{13}	v_{14}	v_{15}	v_{16}	v_{17}
$W(v_i)$	17	7	9	5	1	4	4	1	3	3	1	2	1	1	1	1	1
$f(v_i)$	129	141	129	173	173	179	169	213	185	191	217	183	217	265	287	239	215

Bảng 2. Dữ liệu cập nhật tại mỗi vòng lặp

Iter.	v	v'	$m(v,v')$	$F(\{v,v'\})$	*Tempt1*	*Tempt2*	*Max*	*Pair*
1	r	v_4	v_2	168	184	164	184	$\{r,v_6\}$
		v_5	$\text{in}(v_1,v_2)$	164				
		v_6	$\text{in}(v_3,v_6)$	184				
		v_7	$\text{in}(v_3,v_7)$	170				
2	v_1	v_8	$\text{in}(v_2,v_4)$	189	194	-	194	$\{v_1,v_{10}\}$
		v_9	$\text{in}(v_2,v_4)$	185				
		v_{10}	$\text{in}(v_3,v_6)$	194				
		v_{11}	$\text{in}(v_3,v_7)$	190				
		v_{12}	$\text{in}(v_3,v_7)$	180				
3	v_2	v_{13}	$\text{in}(v_2,v_4)$	205	205	-	205	$\{v_2,v_{13}\}$
		v_{14}	v_9	194				
4	v_3	v_{15}	v_{10}	200	219	-	219	$\{v_3,v_{16}\}$
		v_{16}	$\text{in}(v_3,v_6)$	219				
		v_{17}	$\text{in}(v_3,v_7)$	200				

Vậy, 4-maxian liên thông địa phương của cây $\vec{T}$ là $\{v_3,v_6,v_{10},v_{16}\}$ với giá trị mục tiêu là 219.

4. KẾT LUẬN

Một biến thể của bài toán *p*-maxian trên cây được đề cập trong nghiên cứu khi các cơ sở là liên thông. Biến thể này được gọi là bài toán *p*-maxian liên thông trên cây. Để giải bài toán, đầu tiên chúng ta rút ra các kết quả liên quan đến tập trội của *p*-maxian liên thông. Dựa trên kết quả đó, một thuật toán tổ hợp thông qua các phần tử của tập trội của cây có hướng được phát triển. Bài toán có thể được giải trong thời gian $O(ns\log p)$ với *n* là số đỉnh của cây và *s* là số lá của cây. Những nghiên cứu trong tương lai liên quan đến bài toán vị trí liên thông không mong muốn trên các loại đồ thị khác là một đề tài hứa hẹn về cả mặt lý thuyết và thực hành.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo được tài trợ bởi đề tài nghiên cứu của Trường Đại học Cần Thơ, mã số: TSV2023-82.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bai, C., Kang, L., & Shan, E. (2018). The connected *p*-center problem on cactus graphs. *Theoretical Computer Science*, *749*, 59-65. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.09.028

Burkard, R. E., Fathali, J., & Kakhki, H. T. (2007). The *p*-maxian problem on a tree. *Operations Research Letters*, *35*, 331-335. https://doi.org/10.1016/j.orl.2006.03.016

Chang, S. C., Yen, W. C. K., Wang, Y. L., & Liu, J. J. (2016). The connected *p*-median problem on block graphs. *Optimization Letters*, *10*, 1191-1201. https://doi.org/10.1007/s11590-015-0912-5

Cheng, Y., & Kang, L. (2010). The *p*-maxian problem on interval graphs. *Discrete Applied Mathematics*, *158*, 1986-1993. https://doi.org/10.1016/j.dam.2010.08.021

Church, R. L., & Garfinkel, R. S. (1978). Locating an obnoxious facility on a network. *Transportation Science*, *12*, 107-118. https://doi.org/10.1287/trsc.12.2.107

Drezner, Z., & Hamacher, H. W. (2002). *Facility location - Applications and Theory*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg. https://doi.org/10.1007/978-3-642-56082-8

Kang, L., & Cheng, Y. (2010). The p-maxian problem on block graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, *20*, 131-141. https://doi.org/10.1007/s10878-008-9198-1

Kang, L., Bai, C., Shan, E., & Nguyen, K. (2014). The 2-maxian problem on cactus graphs. *Discrete Optimization*, *13,*16-22. https://doi.org/10.1016/j.disopt.2014.04.001

Kang, L., Zhou, L., & Shan, E. (2018). Algorithms for connected p-centdian problem on block graphs. *Journal of Combinatorial Optimization*, *36*, 252-263. https://doi.org/10.1007/s10878-016-0058-0

Kariv, O., & Hakimi, S. L. (1979). An algorithmic approach to network location problems. I: The p-centers. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *37*, 513-538. https://doi.org/10.1137/0137040

Kariv, O., & Hakimi, S. L. (1979). An algorithmic approach to network location problems. II: The p-medians. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, *37*, 539-560. https://doi.org/10.1137/0137041

Nguyen, K. T., Hung, N. T., & Huong, N. T. (2020). A linear time algorithm for the p-maxian problem on trees with distance constraint. *Journal of Combinatorial Optimization*, *40*, 1030-1043. https://doi.org/10.1007/s10878-020-00650-9

Tamir, A. (1991). Obnoxious facility location on graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, *4*, 550-567. https://doi.org/10.1137/0404048

Ting, S. S. (1984). A linear-time algorithm for maximum facility location on tree networks. *Transportation Science*, *18*, 76-84. https://doi.org/10.1287/trsc.18.1.76

Yen, W. C. K. (2012). The connected p-center problem on block graphs with forbidden vertices. *Theoretical Computer Science*, *47*, 13-24. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.12.013