Tạp chí Khoa học Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
ISSN 1859-2333 | e-ISSN 2815-5599

DOI:10.22144/ctujos.2023.181

MỞ RỘNG NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND CHO HÀM CÓ GIÁ TRỊ KHOẢNG DỰA TRÊN TÍNH NỬA LIÊN TỤC INNER

Nguyễn Trung Phát[1], Huỳnh Thanh Du[1], Phạm Công Danh[1], Đỗ Hồng Diễm[2] và Đinh Ngọc Quý[1*]
[1]Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
[2]Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Cơ bản, Đại học Y Dược Cần Thơ
**Tác giả liên hệ (Corresponding author): dnquy@ctu.edu.vn*

Thông tin chung (Article Information)

Nhận bài (Received): 06/03/2023
Sửa bài (Revised): 03/04/2023
Duyệt đăng (Accepted): 04/04/2023

Title: *On generalized Ekeland's variational principle for interval-valued functions based on the inner semicontinuity*

Author(s): *Nguyen Trung Phat[1], Huynh Thanh Du[1], Pham Cong Danh[1], Do Hong Diem[2] and Dinh Ngoc Quy[1*]*

Affiliation(s): *[1]Can Tho University, [2]Can Tho University of Medicine and Pharmacy*

TÓM TẮT

Trong bài báo này, tính nửa liên tục inner và tính bị chặn dưới yếu của hàm có giá trị khoảng được sử dụng để đưa ra phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland. Nhiều ví dụ cụ thể được đưa ra để làm rõ mối quan hệ giữa kết quả này với các kết quả đã công bố trước đó, bao gồm phân tích các thuận lợi của chúng.

Từ khoá: *Hàm có giá trị khoảng, nguyên lý biến phân Ekeland, tính bị chặn dưới yếu, tính nửa liên tục inner*

ABSTRACT

In this paper, the inner semicontinuity and weakly boundedness from below of interval-valued functions were used to get a generalized Ekeland's variational principle. Many example are provided to highlight relations of this results to existing ones, including their advantages

Keywords: *Interval-valued functions, Ekeland's variational principle, weakly boundedness from below, inner semicontinuity*

1. GIỚI THIỆU

Giải tích hàm khoảng ra đời từ những mô hình thực tế vì nhiều bài toán không thể đo đạc chính xác theo điểm mà chỉ có thể đo đạc xấp xỉ theo khoảng. Hàm có giá trị khoảng là ánh xạ có ảnh là các khoảng lồi đóng và bị chặn trên tập số thực. Giải tích hàm khoảng có vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực của toán học ứng dụng, đặc biệt trong lĩnh vực mờ hóa, có rất nhiều ứng dụng trong thống kê và thực tế. Giải tích hàm khoảng được giới thiệu đầu tiên trong quyển sách chuyên khảo nổi tiếng của Moore (1966).

Để giải các bài toán tối ưu với hàm mục tiêu có giá trị khoảng, Wu (2007) đã đề xuất các điều kiện tối ưu dạng Karush-Kuhn-Tucker (KKT) cho bài toán tối ưu hàm khoảng (Interval Optimization Problem-IOP) dựa trên cấu trúc sắp xếp thứ tự từng phần cho các khoảng được đề xuất trước đó bởi Ishibuchi and Tanka (1990). Trong nghiên cứu của Wu (2008a, 2008b), tác giả đã giải quyết bốn loại bài toán tối ưu hàm khoảng và đưa ra các định lý đối ngẫu mạnh và yếu cho bài toán IOP dựa trên đạo hàm Hukuhara. Bên cạnh đó, nhiều tác giả khác cũng đã đề xuất các điều kiện tối ưu và các khái niệm nghiệm tối ưu cho các bài toán tối ưu hàm khoảng (Wolf, 2000; Stefanini, 2009; Chalco-Cano et al., 2013; Singh et al., 2016; Zhang et. al., 2018; Ahmad et al., 2019; Ghosh, 2017, 2018, 2019, 2020a, 2020b). Bên cạnh việc nghiên cứu nghiệm chính xác, bài toán tìm nghiệm xấp xỉ của các bài toán tối ưu hàm khoảng cũng rất được quan tâm trong thời gian gần đây. Trong bài báo của Zhang and Huang (2022), một phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng lần đầu tiên được đề xuất. Nguyên lý biến phân Ekeland (Ekeland, 1974) là một trong những kết quả quan trọng của giải tích biến phân và lý thuyết tối ưu.

Nguyên lý này có rất nhiều kết quả tương đương nổi tiếng, cụ thể như Định lý giọt nước rơi của Daneš (1972), Định lý điểm bất động Caristi (1976), Định lý cánh hoa của Penot (1986), Định lý Zabreiko and Krasnoselski (1971) về tính giải được của phương trình toán, Bổ đề Phelps (1974), … Trong bài báo Zhang and Huang (2022), các tác giả đã đề xuất các định nghĩa mở rộng tự nhiên về tính nửa liên tục dưới, tính bị chặn dưới của hàm khoảng. Dựa trên cơ sở đó, phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm khoảng được đưa ra và áp dụng để nghiên cứu các kết quả tồn tại nghiệm cho bài toán tối ưu hàm khoảng và các bài toán liên quan như bài toán điểm bất động, bài toán cân bằng, bài toán điều khiển tối ưu …

Trong bài báo này, giả thiết tính nửa liên tục inner và tính bị chặn dưới yếu của hàm có giá trị khoảng được sử dụng để đưa ra một phiên bản mới cho nguyên lý biên phân Ekeland. Phiên bản này là mới và khác biệt so với các kết quả của Zhang and Huang (2022). Nhiều ví dụ số cụ thể được đưa ra để minh hoạ và làm rõ điều này.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trước tiên, chúng ta nhắc lại các định nghĩa cơ bản về tính nửa liên tục và tính bị chặn của hàm thực.

Định nghĩa 2.1. (Aubin & Ekeland, 1984**)** Cho X là không gian mêtric và hàm thực $f: X \to \mathbb{R}$. Khi đó,

(i) f được gọi là *nửa liên tục dưới* (lsc) tại điểm $x_0 \in X$ nếu

$$\liminf_{x \to x_0} f(x) \geq f(x_0);$$

(ii) f được gọi là *nửa liên tục trên* (usc) tại điểm $x_0 \in X$ nếu

$$\limsup_{x \to x_0} f(x) \leq f(x_0);$$

(iii) f được gọi là *liên tục* tại điểm $x_0 \in X$ khi và chỉ khi f đồng thời nửa liên tục trên và nửa liên tục dưới tại x_0.

Ta nói rằng f thỏa mãn một tính chất nào đó trên tập $A \subseteq X$ nếu f thỏa mãn tính chất đó tại mọi điểm của A. Nếu $A = X$ thì ta bỏ qua cụm từ "trên X" trong cách phát biểu.

Định nghĩa 2.2. (Aubin & Ekeland, 1984**)** Cho hàm thực $f: X \to \mathbb{R}$. Khi đó,

(i) f được gọi là *bị chặn dưới* trên X nếu $\inf_{x \in X} f(x) > -\infty$, tức là tồn tại một số thực hữu hạn $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) \geq a, \forall\, x \in X;$$

(ii) f được gọi là *bị chặn trên* trên X nếu $\sup_{x \in X} f(x) < +\infty$, tức là tồn tại một số thực hữu hạn $a \in \mathbb{R}$ sao cho

$$f(x) \leq a, \forall\, x \in X;$$

(iii) f được gọi là bị chặn trên X nếu f đồng thời bị chặn trên và bị chặn dưới trên X.

Dưới đây là nguyên lý biến phân Ekeland cổ điển, được đưa ra bởi Ivar Ekeland (1974). Đây là một trong các kết quả quan trọng của giải tích phi tuyến.

Định lí 2.1. (Ekeland, 1974) Cho (X, d) là không gian mêtric đủ và $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm thực. Giả sử, f là nửa liên tục dưới và bị chặn dưới. Khi đó, với $\varepsilon > 0$ và $x_0 \in X$ thoả

$$f(x_0) \leq \inf_{x \in X} f(x) + \varepsilon,$$

thì tồn tại $\overline{x} \in X$ sao cho,

(i) $f(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \leq f(x_0)$;

(ii) $d(x_0, \bar{x}) \leq 1$;

(iii) $f(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) > f(\overline{x}), \forall x \in X \backslash \{\overline{x}\}$.

Dưới đây là các định nghĩa cơ bản trong giải tích hàm khoảng được nhắc lại. Chúng ta gọi $\mathfrak{T}$ là tập hợp các khoảng đóng bị chặn của $\mathbb{R}$:

$$\mathfrak{T} = \{[a, b]: a \leq b; a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Trong trường hợp khoảng đóng chỉ có một phần tử, ta quy ước $a = [a, a]$ và $0 = [0,0]$.

Trước tiên, chúng ta nhắc lại các phép toán và định nghĩa quan hệ thứ tự của các khoảng.

Định nghĩa 2.3. (Moore, 1966) Cho hai khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{T}$, $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{T}$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Khi đó, phép cộng và phép nhân vô hướng trong $\mathfrak{T}$ được định nghĩa như sau:

(i) $A + B := [\underline{a} + \underline{b}; \overline{a} + \overline{b}]$.

(ii) $\lambda A := \begin{cases} [\lambda\underline{a}; \lambda\overline{a}] & \text{nếu } \lambda \geq 0, \\ [\lambda\overline{a}; \lambda\underline{a}] & \text{nếu } \lambda < 0. \end{cases}$

Định nghĩa 2.4. (Zhang & Huang, 2022) Cho khoảng $A = [\underline{a}; \overline{a}] \in \mathfrak{T}$ và $B = [\underline{b}; \overline{b}] \in \mathfrak{T}$. Ta xét quan hệ giữa hai khoảng trong $\mathfrak{T}$ dưới đây:

$$A \preccurlyeq B \text{ nếu và chỉ nếu } \underline{a} \leq \underline{b} \text{ và } \overline{a} \leq \overline{b}.$$

Khi đó, dễ dàng kiểm tra quan hệ $\preccurlyeq$ là một quan hệ thứ tự từng phần trong $\mathfrak{T}$. Khi A không nhỏ hơn B theo thứ tự $\preccurlyeq$ thì ta ký hiệu là $A \not\preccurlyeq B$. Vậy ta có,

$$A \not\preccurlyeq B \text{ nếu và chỉ nếu } \underline{a} > \underline{b} \text{ hoặc } \overline{a} > \overline{b}.$$

Dưới đây là định nghĩa về tính nửa liên tục dưới của hàm có giá trị khoảng được đề xuất bởi Zhang and Huang, 2022.

Định nghĩa 2.5. (Zhang & Huang, 2022) Cho X là không gian mêtric và hàm có giá trị khoảng $F: X \to \mathfrak{T}$. Khi đó, hàm F được gọi là $\preccurlyeq -$lsc trên X nếu với mọi khoảng đóng $A \in \mathfrak{T}$ thì tập mức dưới theo thứ tự khoảng $\{x \in X : f(x) \preccurlyeq A\}$ là tập đóng.

Mệnh đề 2.2. (Zhang & Huang, 2022) Cho X là không gian mêtric và hàm có giá trị khoảng $F: X \to \mathfrak{T}$, với $F(x) = \left[\underline{f}(x), \overline{f}(x)\right], \forall x \in X$. Khi đó F là $\preccurlyeq -$lsc trên X nếu và chỉ nếu cả hai hàm $\underline{f}$ và $\overline{f}$ đều là hàm nửa liên tục trên X.

Định nghĩa về tính nửa liên tục inner của ánh xạ đa trị được nhắc lại dưới đây.

Định nghĩa 2.6. (Rockafellar & Wets, 2009) Cho X, Y là không gian mêtric và $F: X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị. Khi đó, F được gọi là *nửa liên tục inner* (isc) tại x_0 nếu với tập mở U bất kỳ của Y thỏa mãn $F(x_0) \cap U \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận N của x_0 sao cho $F(x) \cap U \neq \emptyset$ với mọi $x \in N$.

Mệnh đề 2.3. (Rockafellar & Wets, 2009) Cho X, Y là không gian mêtric và $F: X \to 2^Y$ là ánh xạ đa trị. Khi đó F là ánh xạ nửa liên tục dưới tại x_0 nếu và chỉ nếu với mọi dãy $x_n \to x_0$ và mỗi điểm $y \in F(x_0)$ tồn tại một dãy $\{y_n\}$ với $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \to y$.

Trong trường hợp hàm đa trị F có giá trị ảnh là một phần tử (hàm đơn trị) thì ta có tính nửa liên tục inner trùng với tính liên tục của hàm thực. Trường hợp F là hàm có giá trị khoảng, ta có đặc trưng cơ bản sau đây của hàm nửa liên tục inner.

Mệnh đề 2.4. Cho X là không gian mêtric và hàm có giá trị khoảng $F: X \to \mathfrak{T}$, với $F(x) = \left[\underline{f}(x), \overline{f}(x)\right], \forall x \in X$. Khi đó, nếu F là nửa liên tục inner trên X thì $\overline{f}$ là lsc trên X và $\underline{f}$ là usc trên X.

Chứng minh

Cố định $\overline{x} \in X$. Trước hết ta chứng minh $\overline{f}$ là nửa liên tục dưới tại $\overline{x}$. Thật vậy, lấy $y = \overline{f}(\overline{x}) \in F(\overline{x})$. Do F là nửa liên tục inner tại $\overline{x}$ nên tồn tại $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \to y$. Vì $F(x_n) = \left[\underline{f}(x_n), \overline{f}(x_n)\right]$ và $y_n \in F(x_n)$ nên

$$y_n \leq \overline{f}(x_n).$$

Lấy qua giới hạn dưới ta được

$$\liminf y_n \leq \liminf \overline{f}(x_n).$$

Do $\liminf y_n = \lim y_n = y$, nên suy ra

$$\overline{f}(\overline{x}) \leq \liminf \overline{f}(x_n),$$

tức là $\overline{f}$ là nửa liên tục dưới tại $\overline{x}$.

Ta tiếp tục chứng minh $\underline{f}$ là nửa liên tục trên tại $\overline{x}$. Lấy $y = \underline{f}(\overline{x}) \in F(\overline{x})$. Do F là nửa liên tục inner tại $\overline{x}$ nên tồn tại $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \to y$. Vì $F(x_n) = \left[\underline{f}(x_n), \overline{f}(x_n)\right]$ và $y_n \in F(x_n)$ nên

$$\underline{f}(x_n) \leq y_n.$$

Lấy qua giới hạn dưới ta được

$$\limsup \underline{f}(x_n) \leq \limsup y_n.$$

Do $\limsup y_n = \lim y_n = y$, nên suy ra

$$\limsup \underline{f}(x_n) \leq \underline{f}(\overline{x}),$$

tức là $\underline{f}$ là nửa liên tục trên tại $\overline{x}$. ■

Tính nửa liên tục inner và tính $\preccurlyeq -$lsc của hàm khoảng là hai khái niệm khác biệt và không so sánh được. Điều đó được chỉ ra bởi ví dụ dưới đây.

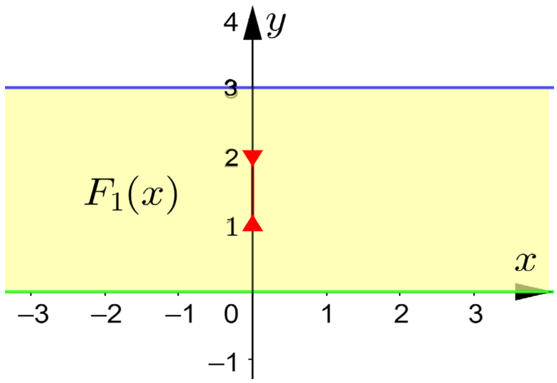
Ví dụ 2.1. Cho các hàm có giá trị khoảng $F_1: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ và $F_2: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa dưới đây:

$$F_1(x) = \begin{cases} [0,3], & \text{nếu } x \neq 0 \\ [1,2], & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$

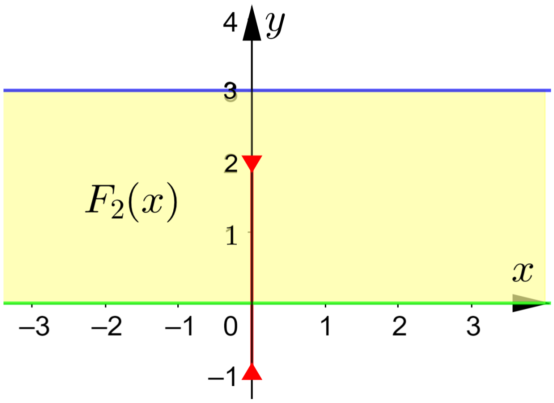
$$F_2(x) = \begin{cases} [0,3], & \text{nếu } x \neq 0 \\ [-1,2], & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$

Khi đó, F_1 là nửa liên tục inner tại $x = 0$ nhưng không $\preccurlyeq -$lsc tại $x = 0$. Ngược lại, hàm F_2 là $\preccurlyeq -$lsc tại $x = 0$ nhưng lại không nửa liên tục inner tại $x = 0$.

Tiếp theo, chúng ta khảo sát các định nghĩa về tính bị chặn của hàm có giá trị khoảng.



Hình 1. Đồ thị minh họa cho hàm số F_1(x) của ví dụ 2.1



Hình 2. Đồ thị minh họa cho hàm số F_2(x) của ví dụ 2.1

Định nghĩa 2.7. (Zhang & Huang, 2022) Cho X là không gian mêtric và $F: X \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó, F được gọi là *bị chặn dưới* trên X nếu tồn tại khoảng đóng $A \in \mathfrak{I}$ sao cho,

$$A \preccurlyeq F(x), \forall x \in X.$$

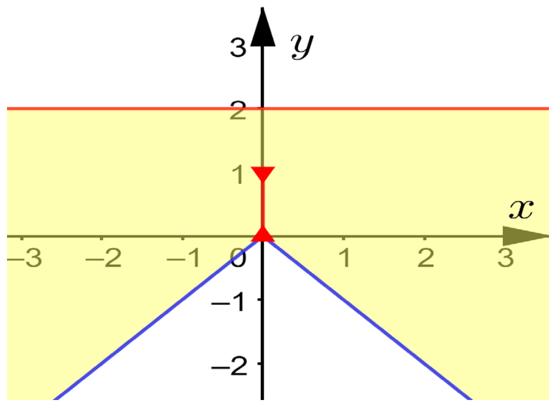
Định nghĩa 2.8. Cho X là không gian mêtric và $F: X \to \mathfrak{I}$ là hàm có giá trị khoảng. Khi đó F được gọi là *bị chặn dưới yếu* trên X nếu tồn tại một số thực hữu hạn a sao cho mọi $x \in X$, tồn tại $y \in F(x)$ thỏa

$$a \leq y.$$

Nhận xét 2.1. Từ định nghĩa, ta dễ dàng thấy rằng, nếu F bị chặn dưới trên X thì F là bị chặn dưới yếu trên X. Nhưng chiều ngược lại không đúng. Điều đó được chỉ ra bởi ví dụ dưới đây.

Ví dụ 2.2. Cho hàm có giá trị khoảng $F_3: \mathbb{R} \to \mathfrak{I}$ được định nghĩa dưới đây:

$$F_3(x) = \begin{cases} [x, 2], & x < 0 \\ [0,1], & x = 0. \\ [-x, 2], & x > 0 \end{cases}$$



Hình 3. Đồ thị minh họa cho hàm số F_3(x) của ví dụ 2.2

Khi đó, ta có $F_3(x)$ là bị chặn dưới yếu trên X nhưng không bị chặn dưới trên X. Thật vậy xét $a = 1$, ta có với mọi $x \in \mathbb{R}$, luôn tồn tại $y = 1 \in F_3(x)$ sao cho

$$a \leq y.$$

Trong Ví dụ 2.1, dễ thấy cả hai hàm F_1 và F_2 đều là hàm bị chặn dưới trên X nên cũng là hàm bị chặn dưới yếu trên X.

Mệnh đề 2.5. (Zhang & Huang, 2022) Cho X là không gian metric và hàm có giá trị khoảng $F: X \to \mathfrak{I}$, với $F(x) = \left[\underline{f}(x), \overline{f}(x)\right], \forall x \in X$. Khi đó, F là bị chặn dưới trên X khi và chỉ khi cả hai hàm $\underline{f}$ và $\overline{f}$ đều bị chặn dưới trên X.

Mệnh đề 2.6. Cho X là không gian metric và hàm có giá trị khoảng $F: X \to \mathfrak{I}$, với $F(x) = \left[\underline{f}(x), \overline{f}(x)\right], \forall x \in X$. Khi đó, F là bị chặn dưới yếu trên X khi và chỉ khi hàm $\overline{f}$ là bị chặn dưới trên X.

Chứng minh

Giả sử F là bị chặn dưới yếu trên X. Khi đó tồn tại một số thực hữu hạn a sao cho $\forall x \in X, \exists y \in F(x)$ thỏa

$$a \leq y.$$

Vì $F(x) = \left[\underline{f}(x), \overline{f}(x)\right]$ nên $y \leq \overline{f}(x)$. Từ đó kéo theo

$$a \leq \overline{f}(x), \forall x \in X.$$

Do đó, $\overline{f}(x)$ bị chặn dưới trên X.

Ngược lại, nếu $\overline{f}(x)$ bị chặn dưới trên X thì tồn tại một số thực a sao cho

$$a \leq \overline{f}(x), \forall x \in X.$$

Khi đó, với mọi $x \in X$, thì tồn tại $y = \overline{f}(x) \in F(x)$ thỏa

$$a \leq y.$$

Do đó, F là bị chặn dưới yếu trên X. ■

3. MỞ RỘNG NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND

Trong phần này, kết quả mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng được đưa ra dựa trên tính nửa liên tục inner và tính bị chặn dưới yếu.

Định lý 3.1. Cho (X, d) là không gian mêtric đủ và $F: X \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng. Giả sử F là hàm inner và bị chặn dưới yếu trên X. Khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho,

$$F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \npreceq F(\bar{x}), \forall x \in X \backslash \{\bar{x}\}.$$

Chứng minh

Với mỗi $x \in X$, ta đặt

$$\underline{f}(x) \coloneqq \min F(x) \text{ và } \overline{f}(x) \coloneqq \max F(x)$$

Khi đó, hàm F có dạng

$$F(x) = \left[\underline{f}(x), \overline{f}(x)\right], \forall x \in X.$$

Do F là hàm nửa liên tục inner và bị chặn dưới yếu trên X nên theo Mệnh đề 2.4 và 2.6, ta suy ra $\overline{f}$ là hàm nửa liên tục dưới và bị chặn dưới trên X. Chúng ta sẽ áp dụng nguyên lý biến phân Ekeland với hàm $\overline{f}$. Với số thực cố định $\varepsilon > 0$, vì hàm $\overline{f}$ bị chặn dưới nên $\inf_{x \in X} \overline{f}(x) > -\infty$. Do đó, theo định nghĩa của cận dưới đúng, tồn tại một điểm $x_0 \in X$ thoả

$$\overline{f}(x_0) \leq \inf_{x \in X} \overline{f}(x) + \varepsilon.$$

Khi đó mọi giả thiết của Định lý 2.1 đều thỏa mãn. Vậy tồn tại $\bar{x} \in X$, sao cho

(i) $\overline{f}(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \leq \overline{f}(x_0)$;

(ii) $d(x_0, \overline{x}) \leq 1$;

(iii) $\overline{f}(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) > \overline{f}(\overline{x}), \forall x \in X \backslash \{\overline{x}\}$.

Từ kết quả (iii), ta dễ dàng suy ra được,

$$F(x) + \varepsilon d(x, \bar{x}) \npreceq F(\bar{x}), \forall x \in X \backslash \{\bar{x}\}.$$

Vậy định lý được chứng minh xong. ■

Dưới đây là một phiên bản khác của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng.

Định lý 3.2. Cho (X, d) là không gian mêtric đủ và hàm $F: X \to \mathfrak{T}$ là hàm có giá trị khoảng. Giả sử rằng F là hàm nửa liên tục inner và bị chặn dưới yếu. Khi đó, với $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ và $x_0 \in X$ thoả

$$\max F(x_0) \leq \inf_{x \in X} (\max F(x)) + \varepsilon.$$

Đặt

$$S_0 := \left\{x \in X: F(x) + \tfrac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_0) \preceq F(x_0)\right\}.$$

Khi đó, nếu S_0 là tập đóng thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho,

(i) $F(\overline{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\bar{x}, x_0) \preceq F(x_0)$;

(ii) $d(\overline{x}, x_0) \leq \lambda$;

(iii) $F(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \overline{x}) \npreceq F(\overline{x}), \forall x \in X \backslash \{\overline{x}\}$.

Chứng minh

Đặt hàm khoảng cách $d'(.,.) = \frac{1}{\lambda} d(.,.)$. Nhận xét rằng, $x_0 \in S_0$ nên $S_0 \neq \emptyset$. Vì S_0 đóng và khác rỗng nên (S_0, d') cũng là một không gian mêtric đủ. Xét $\overline{F}: S_0 \to \mathfrak{T}$ là ánh xạ thu hẹp của F trên S_0. Áp dụng Định lý 3.1 với hàm khoảng $\overline{F}$ trên không gian metric (S_0, d'), khi đó, với mọi $\varepsilon > 0$ thì tồn tại $\bar{x} \in S_0$ sao cho,

$$F(x) + \tfrac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \bar{x}) \npreceq F(\bar{x}), \forall x \in S_0 \backslash \{\bar{x}\}.$$

Từ $\bar{x} \in S_0$, ta có (i) đúng. Ta kiểm tra (iii) đúng. Thật vậy, lấy $x \in X$, ta có hai trường hợp sau. Nếu $x \in S_0 \backslash \{\bar{x}\}$ thì theo kết quả trên ta có (iii) đúng. Nếu $x \notin S_0$, giả sử rằng (iii) không đúng, tức là

$$F(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \bar{x}) \preceq F(\bar{x}).$$

Theo đó, kết hợp với (i) và bất đẳng thức tam giác, ta có đánh giá sau,

$$\begin{aligned} F(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_0) &\preceq F(x) + \frac{\varepsilon}{\lambda}\left(d(x, x_0) + d(x, \bar{x})\right) \\ &\preceq \left(F(x) + \tfrac{\varepsilon}{\lambda} d(x, \bar{x})\right) + \varepsilon d(x, x_0) \\ &\preceq F(\bar{x}) + \tfrac{\varepsilon}{\lambda} d(x, x_0) \\ &\preceq F(x_0). \end{aligned}$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $x \notin S_0$. Vậy (iii) đúng trên X.

Để hoàn thành chứng minh, ta chỉ cần chứng minh (ii) đúng. Thật vậy, giả sử ngược lại $d(x_0, \overline{x}) > \lambda$. Khi đó, vì $\frac{1}{\lambda} d(x_0, \overline{x}) > 1$ nên suy ra

$$\inf_{x \in X}(\max F(x)) + \varepsilon < \inf_{x \in X}(\max F(x)) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\bar{x}, x_0)$$
$$\leq \max F(\overline{x}) + \tfrac{\varepsilon}{\lambda} d(\bar{x}, x_0).$$

Theo (i), ta lại có

$$\max F(\overline{x}) + \varepsilon d(\bar{x}, x_0) \leq \max F(x_0).$$

Do đó kéo theo,

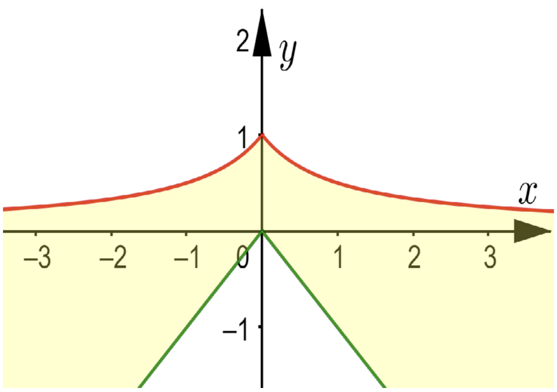
$$\inf_{x \in X}(\max F(x)) + \varepsilon < \max F(x_0).$$

Điều này mâu thuẫn với giả thiết ban đầu của điểm x_0. Do đó, ta có $d(\bar{x}, x_0) \leq \lambda$. ■

Nhận xét 3.1. Định lý 3.1 và 3.2 là các dạng mở rộng khác của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng dựa trên tính nửa liên tục inner và tính bị chặn dưới yếu. Các kết quả này khác biệt so với kết quả của Định lý 3.1 của Zhang and Huang (2022). Điều đó được chỉ ra bởi các ví dụ dưới đây.

Ví dụ 3.1. Cho hàm khoảng $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \left[-|x|, \frac{1}{|x|+1}\right], \forall x \in \mathbb{R}.$$



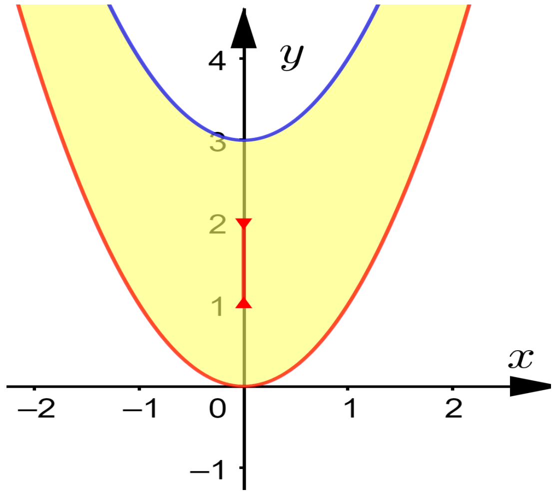
Hình 4. Đồ thị minh họa cho ví dụ 3.1

Ta có, F là $\preccurlyeq -$lsc trên $\mathbb{R}$. Tuy nhiên, F không bị chặn dưới trên $\mathbb{R}$ nên Định lý 3.1 của Zhang and Huang (2022) không áp dụng được. Trong trường hợp này, hàm F là hàm nửa liên tục inner và bị chặn dưới yếu bởi 0 nên các điều kiện của Định lý 3.1 thoả mãn. Tính toán trực tiếp, ta có được với $\varepsilon \in (0,1]$ thì mọi $\overline{x} \in (-\infty, 1 - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}] \cup [-1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, +\infty)$ đều thỏa

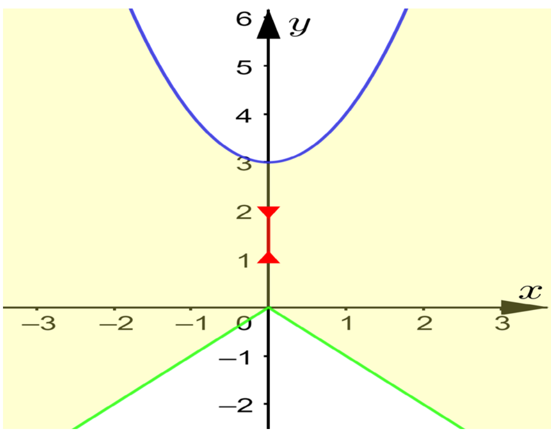
$$F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \not\preccurlyeq F(\overline{x}), \forall x \in X \backslash \{\overline{x}\}.$$

Ví dụ 3.2. Cho hàm khoảng $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [x^2, x^2 + 3], & \text{nếu } x \neq 0, \\ [1,2], & \text{nếu } x = 0. \end{cases}$$



Hình 5. Đồ thị minh họa cho ví dụ 3.2



Hình 6. Đồ thị minh họa cho ví dụ 3.3

Ta có, F là hàm bị chặn dưới trên X. Tuy nhiên, F là hàm không $\preccurlyeq -$lsc trên X nên Định lý 3.1 của Zhang and Huang (2022) không áp dụng được. Trong trường hợp này, hàm F là nửa liên tục inner nên các điều kiện của Định lý 3.1 thoả mãn. Tính toán trực tiếp ta có được với mọi $\varepsilon > 0$, thì mọi $\overline{x} \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ đều thỏa

$$F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \not\preccurlyeq F(\overline{x}), \forall x \in X \backslash \{\overline{x}\}.$$

Ví dụ 3.3. Cho hàm khoảng $F: \mathbb{R} \to \mathfrak{T}$ được định nghĩa bởi:

$$F(x) = \begin{cases} [-|x|, x^2 + 3], & \text{nếu } x \neq 0 \\ [1; 2] & \text{nếu } x = 0 \end{cases}.$$

Ta có, F không $\preccurlyeq -$lsc và không bị chặn dưới trên X nên Định lý 3.1 của Zhang & Huang (2022) không áp dụng được. Tuy nhiên, trong trường hợp này, hàm F là nửa liên tục inner và bị chặn dưới yếu nên các điều kiện của Định lý 3.1 thoả mãn. Tính toán trực tiếp ta có được với mọi $\varepsilon > 0$, thì mọi $\overline{x} \in [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ đều thỏa

$$F(x) + \varepsilon d(x, \overline{x}) \not\preccurlyeq F(\overline{x}), \forall x \in X \setminus \{\overline{x}\}.$$

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, một số phiên bản mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm có giá trị khoảng được đưa ra dựa trên tính nửa liên tục inner và tính bị chặn dưới yếu được đề xuất. Các kết quả này là mới và khác biệt so với các kết quả nghiên cứu gần đây. Nhiều ví dụ số được chỉ ra để minh họa cho các định nghĩa và kết quả đề xuất.

LỜI CẢM TẠ

Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, Mã số: TSV2023-21.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ahmad, I., Jayswal, A., Al-Homidan, S., & Banerjee, J. (2019). Sufficiency and duality in intervalvalued variational programming. *Neural Computing and Applications,* 31, 4423–4433. https://doi.org/10.1007/s00521-017-3307-y

Aubin, J. P., & Ekeland, I. (1984). *Applied Nonlinear Analysis*. Wiley, NewYork.

Caristi, J. (1976). Fixed point theorem for mappings satisfying inwardness conditions. *Transactions of the American Mathematical Society, 215*, 241-251. https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1976-0394329-4

Chalco-Cano, Y., Rufían-Lizana, A., Román-Flores, H., & Jiménez-Gamero, M.D. (2013). Calculus for interval-valued functions using generalized Hukuhara derivative and applications. *Fuzzy Sets and Systems*, 219, 49–6. https://doi.org/10.1016/j.fss.2012.12.004

Daneš, J. (1972). A geometric theorem useful in nonlinear analysis. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, 6*(4), 369-375.

Ekeland, I. (1974). On the variational principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 47*(3), 324-353. https://doi.org/10.1016/0022-247X(74)90025-0

Ghosh, D. (2017). Newton method to obtain efficient solutions of the optimization problems with interval-valued objective functions. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 53, 709–731. DOI:10.1007/s12190-016-0990-2

Ghosh, D., Bhuiya, S.K., & Patra, L.K. (2018). A saddle point characterization of efficient solutions for interval optimization problems. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 58, 193–217. DOI:10.1007/s12190-017-1140-1

Ghosh, D., Chauhan, R.S., Mesiar, R., & Debnath, A.K., (2020a). Generalized Hukuhara Gâteaux and Fréchet derivatives of interval-valued functions and their application in optimization with interval-valued functions. *Information Sciences*, 510, 317–340. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.09.023

Ghosh, D., Debnath, A.K., & Pedrycz, W. (2020b). A variable and a fixed ordering of intervals and their application in optimization with interval-valued functions. *International Journal of Approximate Reasoning*, 121, 187–205. https://doi.org/10.1016/j.ijar.2020.03.004

Ghosh, D., Singh, A., Shukla, K.K., & Manchanda, K. (2019). Extended Karush-Kuhn-Tucker condition for constrained interval optimization problems and its application in support vector machines. *Information Sciences*, 504, 276–292. https://doi.org/10.1016/j.ins.2019.07.017

Ishibuchi, H., & Tanaka, H. (1990). Multiobjective programming in optimization of the interval objective function. *European Journal of Operational Research,* 48, 219–225. https://doi.org/10.1016/0377-2217(90)90375-L

Penot, J. P. (1986). The drop theorem, the petal theorem and Ekeland's variational principle. *Nonlinear Analysis, 10*(9), 813-822. https://doi.org/10.1016/0362-546X(86)90069-6

Phelps, R. R. (1974). Support cones in Banach spaces and their applications. *Advances in Mathematics, 13*, 1-19. https://doi.org/10.1016/0001-8708(74)90062-0

Moore, R.E., (1966). *Interval Analysis*. New Jersey, Englewood Cliffs, Prentice-Hall.

Rockafellar, R. T., & Wets, R.J.-B. (2009). *Variational Analysis*. Springer, Berlin.

Stefanini, L., & Bede, B. (2009). Generalized Hukuhara differentiability of interval-valued functions and interval differential equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods &*

Applications, 71, 1311–1328. https://doi.org/10.1016/j.na.2008.12.005

Singh, D., Dar, B.A., & Kim, D. (2016). KKT optimality conditions in interval valued multiobjective programming with generalized differentiable functions. *European Journal of Operational Research*, 254, 29–39. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.03.042

Wu, H.C., (2007). The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function. *European Journal of Operational Research,* 176, 46–59. https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.09.007

Wu, H.C., (2008a). On interval-valued nonlinear programming problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338, 299–316. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2007.05.023

Wu, H.C. (2008b). Wolfe duality for interval-valued optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications,* 138, 497–509. https://doi.org/10.1007/s10957-008-9396-0

Wolfe, M., (2000). Interval mathematics, algebraic equations and optimization. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 124, 263–280. https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00421-0

Zabreiko, P. P., & Krasnoselski, M. A. (1971). Solvability of nonlinear operator equations. *Functional Analysis and Its Applications, 5*(3), 206-208. https://doi.org/10.1007/BF01078126

Zhang, C., & Huang, N. (2022). On Ekeland's variational principle for interval-valued functions with applications. *Fuzzy Sets and Systems,* 436,152–174. DOI:10.1016/j.fss.2021.10.003

Zhang, Z., Wang, X., & Lu, J. (2018). Multi-objective immune genetic algorithm solving nonlinear interval-valued programming. *Engineering Applications of Artificial Intelligence,* 67, 235–245. https://doi.org/10.1016/j.engappai.2017.10.004