Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ

Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long

website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2023.092

ĐIỀU KIỆN ĐẶT CHỈNH CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU TẬP THÔNG QUA MỐI QUAN HỆ THỨ TỰ GIỮA CÁC TẬP

Phạm Trần Anh Thư[1,2*], Lâm Thị Vân Khánh[1] và Phạm Thị Yến Nhi[1]

[1]*Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Bộ môn Toán, Trường Đại học FPT Cần Thơ*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Phạm Trần Anh Thư (email: thupta9@fe.edu.vn)*

Thông tin chung:

Ngày nhận bài: 03/02/2023

Ngày nhận bài sửa: 05/03/2023

Ngày duyệt đăng: 09/04/2023

Title:

Condition of well-posedness for set optimization problems via set order relations

Từ khóa:

Bài toán tối ưu tập, dãy nghiệm xấp xỉ, đặt chỉnh Hadamard, đặt chỉnh Levitin – Polyak, đặt chỉnh Tikhonov

Keywords:

Hadamard well-posedness, Levitin – Polyak well-posedness, minimizing sequence, set optimization problem, Tikhonov well-posedness

ABSTRACT

This paper considers optimization problems with a set-valued function based on the relationship between the sets given in a conical ordered space. First, the minimizing sequences for these problems and introduce types of well-posedness corresponding proposal types of minimizing lines were proposed. Using the continuity and generalized convexity properties of functions and sets, sufficient conditions for the well-posedness for the underlying problems were proved. Examples illustrating the applicability and essentiality of the proposed requirements were also given in this paper.

TÓM TẮT

Các bài toán tối ưu được xét với hàm mục tiêu có giá trị tập hợp dựa trên mối quan hệ giữa các tập được cho trong không gian sắp thứ tự theo nón. Trước hết, dãy nghiệm xấp xỉ được đề xuất cho bài toán đang xét và giới thiệu các khái niệm đặt chỉnh tương ứng với dãy nghiệm xấp xỉ vừa được đề xuất. Bằng cách sử dụng các tính chất liên tục và tính chất lồi suy rộng của các hàm và tập, các điều kiện đủ cho các dạng đặt chỉnh đang được xem xét đã được chứng minh. Các ví dụ minh họa cho khả năng áp dụng và tính cốt yếu của các giả thiết cũng được đưa ra trong bài báo này.

1. GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây, bài toán tối ưu tập đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học ở cả trong và ngoài nước. Đặc biệt, các công trình nghiên cứu tập trung khai thác tính ứng dụng của lớp bài toán này và áp dụng chúng vào các vấn đề trong thực tiễn ở nhiều lĩnh vực khác nhau như: kinh tế, kỹ thuật, lý thuyết trò chơi, lý thuyết điều khiển, ... (Kuroiwa, 2003; Khan et al., 2015).

Trong tối ưu hóa, sự đặt chỉnh đóng vai trò quan trọng trong cả lý thuyết và thuật toán. Tính đặt chỉnh của bài toán tối ưu kiểm soát phương hướng của các biến khi giá trị của hàm mục tiêu tương ứng gần với giá trị tối ưu. Nó có mối liên hệ mật thiết với việc nghiên cứu độ nhạy và tính ổn định của bài toán tối ưu. Nghiên cứu về sự đặt chỉnh của các bài toán tối ưu được bắt đầu với lớp các bài toán tối ưu vô hướng và chúng được chia thành hai loại chính: đặt chỉnh Hadamard và đặt chỉnh Tikhonov. Đặt chỉnh Hadamard được Hadamard giới thiệu lần đầu tiên vào năm 1902 trong nghiên cứu của ông về các mô hình toán học liên quan đến các hiện tượng vật lý. Nó đòi hỏi sự tồn tại, tính duy nhất và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm tối ưu (Hadamard, 1902). Đến năm 1966, đặt chỉnh Tikhonov được đề xuất trong việc giải quyết các nghiệm tối ưu của các bài toán ưu hóa không ràng buộc (Tikhonov, 1966). Về đặt chỉnh Levitin-Polyak, nó được đề xuất bởi Levitin và Polyak và được xem là sự mở rộng của đặt chỉnh Tikhonov (Levitin & Polyak, 1966). Trong đặt chỉnh Tikhonov, dãy nghiệm xấp xỉ phải nằm trong tập ràng buộc của bài toán. Điều kiện này được nới lỏng trong đặt chỉnh Levitin-Polyak, cụ thể dãy nghiệm xấp xỉ không bị yêu cầu phải nằm trong tập ràng buộc của bài toán, nghĩa là các phần tử của dãy nghiệm xấp xỉ có thể không thuộc tập ràng buộc của bài toán, tuy nhiên điều kiện này được bù lại bằng yêu cầu khoảng cách giữa các phần tử của dãy nghiệm xấp xỉ và tập ràng buộc của bài toán phải rất bé, cụ thể khoảng cách này dần về không. Dạng đặt chỉnh Levitin-Polyak đã được nghiên cứu cho nhiều lớp bài toán tối ưu (Virmani & Srivastava, 2015; Hu & Fang, 2016)

Về lớp bài toán tối ưu tập, nó có hàm mục tiêu nhận giá trị tập hợp và sử dụng các mối quan hệ giữa các tập hợp để so sánh giá trị của hàm mục tiêu. Sự đặt chỉnh của lớp bài toán này được khởi xướng bởi Zhang et al. (2009). Các tác giả đã giới thiệu các loại đặt chỉnh và thu được các điều kiện cần và đủ để bài toán tối ưu tập là đặt chỉnh. Kể từ đó, nhiều tác giả đã quan tâm nghiên cứu đến các loại đặt chỉnh cho lớp bài toán này như Zhang et al. (2009), Long et al. (2015), Vui et al. (2019), Anh et al. (2016), Anh et al. (2021), Duy (2021), Peng et al. (2022),... Các kết quả này với giả thiết là hàm mục tiêu liên tục hoặc nửa liên tục theo nghĩa của Berge. Tính C-liên tục Hausdorff giảm nhẹ hơn các điều kiện này và tương đồng về kỹ thuật. Phương pháp tiếp cận được điều chỉnh để thu được điều kiện đủ cho sự đặt chỉnh của bài toán tối ưu tập với giả thiết nới lỏng hơn.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Xét X, Y, Z và Δ là các không gian Banach thực. Giả sử nón $C \subseteq Y$ là một nón lồi, đóng, có đỉnh với phần trong khác rỗng. Chúng ta kí hiệu $P(Y)$ là họ các tập con khác rỗng của Y và B_Y là quả cầu đơn vị, mở trong Y.

Với $A, B \in P(Y)$, các quan hệ thứ tự giữa các tập hợp được định nghĩa như sau:

$$A \leq_C^l B \Leftrightarrow B \subseteq A + C,$$

$$A \ll_C^l B \Leftrightarrow B \subseteq A + \text{int}C,$$

$$A \leq_C^u B \Leftrightarrow A \subseteq B - C,$$

$$A \ll_C^u B \Leftrightarrow A \subseteq B - \text{int}C.$$

Nhận xét 2.1. Các quan hệ thứ tự $\leq_C^u$, $\ll_C^u$, $\leq_C^l$ và $\ll_C^l$ có tính chất bắc cầu nhưng không có tính phản xạ.

Cho ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$. Miền xác định và đồ thị của F được định nghĩa:

$$\text{dom}F = \{x \in X: F(x) \neq \emptyset\},$$

$$\text{gr}F = \{(x, y) \in X \times Y: y \in F(x)\}.$$

Cho M là một tập con khác rỗng của X và $M \subseteq \text{dom}F$. Ta xét bài toán tối ưu tập, viết tắt là SOP, như sau:

$$(SOP)\begin{cases}\min F(x)\\ \text{s.t.}\, x \in M\end{cases}.$$

Định nghĩa 2.1. Với mỗi $s \in \{u, l\}, \bar{x} \in M$ được gọi là

(i) s-nghiệm của SOP nếu $x \in M$ và $F(x) \leq_C^s F(\bar{x})$ thì $F(\bar{x}) \leq_C^s F(x)$,

(ii) s-nghiệm yếu của SOP nếu $x \in M$ và $F(x) \ll_C^s F(\bar{x})$ thì $F(\bar{x}) \ll_C^s F(x)$.

Để thuận lợi trong trình bày ở phần sau, các tập s-nghiệm và s-nghiệm yếu của SOP được viết tắt lần lượt là $E_s(F, M)$ và $W_s(F, M)$. Ngoài ra, ký hiệu l-SOP và u-SOP được dùng tương ứng cho bài toán tối ưu tập với quan hệ thứ tự tập đang xét lần lượt là l và u.

Do bài báo này tập trung nghiên cứu về sự đặt chỉnh của SOP, không đặt trọng tâm trình bày về điều kiện tồn tại nghiệm nên ta có thể giả sử tập nghiệm $E_s(F, M)$ $\big(W_s(F, M)\big)$ khác rỗng.

Bổ đề 2.1. (Mao et al., 2019) Giả sử $x_0 \in M$ và $F(x_0)$ là compắc. Khi đó, $x_0 \in E_s(F, M)$ khi và chỉ khi không tồn tại $x \in M$ sao cho $F(x) \leq_C^s F(x_0)$.

Kết quả thu được ngay sau đây đóng vai trò quan trọng trong phần tiếp theo.

Mệnh đề 2.1. Giả sử $x_0 \in M$ và $F(x_0)$ compắc. Khi đó, $x_0 \in W_s(F, M)$ khi và chỉ khi không tồn tại $x \in M$ sao cho $F(x) \ll_C^s F(x_0)$.

Chứng minh

Ta trình bày phần chứng minh cho trường hợp $s = u$ do phần chứng minh cho trường hợp $s = l$ là tương tự.

Phần thuận của mệnh đề là dễ thấy. Ta sẽ chứng minh phần đảo bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử rằng tồn tại $x \in M$ sao cho $F(x) \ll_C^u F(x_0)$. Khi đó, ta được $F(x_0) \ll_C^u F(x)$ vì

$x_0 \in W_u(F, M)$. Sử dụng hai quan hệ tập ở trên ta được:

$$\begin{aligned} F(x_0) &\subseteq F(x) - \mathrm{int}C \\ &\subseteq F(x_0) - \mathrm{int}C - \mathrm{int}C. \quad (2.1) \end{aligned}$$

Vì Y là không gian định chuẩn và $F(x_0)$ là compắc nên $F(x_0)$ là bị chặn, ta được điều mâu thuẫn với (2.1). Mệnh đề đã được chứng minh. □

Định nghĩa 2.2. Cho X và Y là hai không gian tôpô và $F: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị.

(i) F được gọi là Berge-nửa liên tục trên (viết tắt là B-usc) tại $x_0 \in X$, nếu với mỗi tập mở $V \subseteq Y$ thỏa $F(x_0) \subseteq V$ thì tồn tại một lân cận U của x_0 trong X sao cho $F(x) \subseteq V$ với mọi $x \in U$.

(ii) F được gọi là Berge-nửa liên tục dưới (viết tắt là B-lsc) tại $x_0 \in X$, nếu với mỗi tập mở $V \subseteq Y$ thỏa $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận U của x_0 trong X sao cho $F(x) \cap V \neq \emptyset$ với mọi $x \in U$.

(iii) F được gọi là B-usc (B-lsc) trên X, nếu nó B-usc (B-lsc) tại mỗi $x \in X$; F được gọi là Berge liên tục trên X nếu nó vừa B-usc vừa B-lsc trên X.

(iv) F được gọi là C-nửa liên tục trên Hausdorff (viết tắt là H-C-usc) tại $x_0 \in X$, nếu với mỗi lân cận V của 0_Y thì tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho:

$$F(x) \subseteq F(x_0) + V + C, \qquad \forall x \in U(x_0).$$

(v) F được gọi là C-nửa liên tục dưới Hausdorff (viết tắt là H-C-lsc) tại $x_0 \in X$, nếu với mỗi lân cận V của 0_Y thì tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho:

$$F(x_0) \subseteq F(x) + V + C, \qquad \forall x \in U(x_0).$$

(vi) F được gọi là H-C-usc (H-C-lsc) trên X nếu nó H-C-usc (H-C-lsc) tại mỗi $x \in X$; F là C-liên tục Hausdorff trên X nếu nó vừa H-C-usc vừa H-C-lsc trên X.

(vii) F được gọi là C-nửa liên tục dưới (viết tắt là C-lsc) tại $x_0 \in X$, nếu với bất kỳ $y \in F(x_0)$ và bất kỳ lân cận V của 0_Y, tồn tại một lân cận $U(x_0)$ của x_0 sao cho:

$$F(x) \cap (y + V - C) \neq \emptyset, \forall x \in U(x_0).$$

Bổ đề 2.2. (Berge, 1963) Cho X và Y là các không gian tôpô và $F: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. Khi đó

(i) F là B-lsc tại $x_0 \in X$ khi và chỉ khi với bất kỳ dãy $\{x_n\} \subset X$ với $x_n \to x_0$ và với $y_0 \in F(x_0)$, tồn tại $y_n \in F(x_n)$ sao cho $y_n \to y_0$.

(ii) Nếu $x_0 \in X$ và $F(x_0)$ compắc thì F là B-usc tại x_0 khi và chỉ khi với bất kỳ dãy $\{x_n\} \subset X$ với $x_n \to x_0$ và với $y_n \in F(x_n)$, tồn tại $y_0 \in F(x_0)$ và dãy con $\{y_{n_k}\}$ của $\{y_n\}$ sao cho $y_{n_k} \to y_0$.

Định nghĩa 2.3. (Khan et al., 2015) Cho X và Y là hai không gian metric. Ánh xạ đa trị $F: X \rightrightarrows Y$ được gọi là compắc tại $x_0 \in X$ nếu với mọi dãy $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{gr}F$ với $x_n \to x_0$ thì tồn tại một dãy con $\{y_{n_k}\}$ của $\{y_n\}$ hội tụ về y_0 nào đó thuộc $F(x_0)$.

Định nghĩa 2.4. (Yu, 1974) Cho A là một tập con lồi khác rỗng trong X, B là một tập con khác rỗng trong Y và $F: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. Ta gọi F là B-lồi trên A nếu với mọi $x_1, x_2 \in A$ và $\lambda \in [0,1]$, ta có:

$$\begin{aligned} &\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \\ &\subseteq F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + B. \end{aligned}$$

Bổ đề 2.3. (Rockafellar, 1998) Cho X và Y là hai không gian tôpô và $F: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị. F được gọi là có giá trị compắc nếu $F(x)$ compắc với mọi $x \in X$.

Bổ đề 2.4. (Luc, 1989) Cho Y là một không gian tôpô. Khi đó, với mỗi lân cận W của 0_Y, tồn tại các lân cận W_1 và W_2 của 0_Y sao cho $W_1 + W_2 \subseteq W$.

3. ĐẶT CHỈNH LEVITIN – POLYAK CỦA BÀI TOÁN SOP

Khái niệm về đặt chỉnh Levitin – Polyak (viết tắt là LP) cho bài toán SOP được đề cập. Thêm nữa, các tính chất của nghiệm và điều kiện đủ của đặt chỉnh LP cho bài toán SOP cũng được thiết lập.

Trước hết, định nghĩa về dãy nghiệm xấp xỉ LP suy rộng và đặt chỉnh LP suy rộng được trình bày, cụ thể:

Định nghĩa 3.1. Một dãy $\{x_n\} \subseteq \mathrm{dom}F$ được gọi là một dãy xấp xỉ LP suy rộng tương ứng với $e \in \mathrm{int}C$ của bài toán SOP nếu tồn tại một dãy $\{\varepsilon_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ với $\varepsilon_n \downarrow 0$ và một dãy $\{u_n\} \subseteq E_s(F, M)$, sao cho $d(x_n, M) \leq \varepsilon_n$ và $F(x_n) \leq_C^s F(u_n) + \varepsilon_n e$.

Định nghĩa 3.2. Bài toán SOP được gọi là đặt chỉnh LP suy rộng nếu với mỗi dãy xấp xỉ LP suy rộng $\{x_n\}$, tồn tại một dãy con $\{x_{n_k}\}$ của dãy $\{x_n\}$ hội tụ về một phần tử nằm trong $E_s(F, M)$.

Tiếp theo, tính đóng của $E_s(F, M)$ được chứng minh, cụ thể:

Định lí 3.1. Cho $M \subset domF$ là tập con đóng, khác rỗng. Giả sử $F(\cdot)$ có giá trị compắc trên M. Khi đó,

(a) $E_l(F,M)$ đóng nếu $F(\cdot)$ là H-C-usc trên M,

(b) $E_u(F,M)$ đóng nếu $-F(\cdot)$ là H-C-lsc trên M.

Chứng minh

Ta trình bày phần chứng minh cho mục (a) do phần chứng minh cho mục (b) là tương tự.

Giả sử $\{u_n\} \subseteq E_l(F,M)$ sao cho $u_n \to u_0$. Do M là tập đóng nên $u_0 \in M$. Ta sẽ chứng minh $u_0 \in E_l(F,M)$ bằng phương pháp phản chứng.

Giả sử tồn tại $\bar{u} \in M$ sao cho $F(\bar{u}) \leq_C^l F(u_0)$. Khi đó:

$$F(u_0) \subseteq F(\bar{u}) + C. \qquad (3.1)$$

Vì $F(\cdot)$ là H-C-usc tại u_0 nên với mỗi lân cận W của 0_Y thì tồn tại một lân cận $U(u_0)$ của u_0, sao cho:

$$F(u) \subseteq F(u_0) + W + C, \forall u \in U(u_0). \qquad (3.2)$$

Do $u_n \to u_0$ nên tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \in U(u_0)$ với mọi $n \geq n_1$. Kết hợp với (3.2), ta được:

$$F(u_n) \subseteq F(u_0) + W + C, \forall n \geq n_1.$$

Vì $F(\cdot)$ có giá trị compắc trên M và C là một nón đóng nên $F(u_0) + C$ đóng. Vì W là tùy ý, nên:

$$F(u_n) \subseteq F(u_0) + C, \forall n \geq n_1. \qquad (3.3)$$

Từ (3.1) và (3.3), với $n \geq n_1$, ta có:

$$\begin{aligned} F(u_n) &\subseteq F(u_0) + C \\ &\subseteq F(\bar{u}) + C + C \\ &\subseteq F(\bar{u}) + C. \end{aligned}$$

Tức là, $F(\bar{u}) \leq_C^l F(u_n), \forall n \geq n_1$. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $\{u_n\} \subseteq E_l(F,M)$.

Do đó, $u_0 \in E_l(F,M)$ và $E_l(F,M)$ đóng. Định lí được chứng minh. □

Định lí 3.2. Giả sử $\emptyset \neq M \subset \mathrm{dom}F$ là một tập con compắc. Khi đó, (a) bài toán l-SOP là đặt chỉnh LP suy rộng nếu $F(\cdot)$ là C-liên tục Hausdorff và có giá trị compắc trên M, (b) bài toán u-SOP là đặt chỉnh LP suy rộng nếu $-F(\cdot)$ là C-liên tục Hausdorff và có giá trị compắc trên M.

Chứng minh

Ta trình bày phần chứng minh cho mục (a) do phần chứng minh cho mục (b) là tương tự.

Cho $\{x_n\}$ là dãy xấp xỉ LP suy rộng tương ứng $e \in \mathrm{int}C$ của bài toán l-SOP. Khi đó, tồn tại dãy $\{\varepsilon_n\} \subseteq \mathbb{R}_+$ với $\varepsilon_n \downarrow 0$ và dãy $\{u_n\} \subseteq E_l(F,M)$ sao cho $d(x_n, M) \leq \varepsilon_n$ và $F(x_n) \leq_C^l F(u_n) + \varepsilon_n e$. Do đó, ta có:

$$F(u_n) + \varepsilon_n e \subseteq F(x_n) + C. \qquad (3.4)$$

Theo Định lí 3.1, $E_l(F,M)$ đóng. Hơn nữa, $E_l(F,M)$ là compắc vì M là tập compắc. Nhờ vào tính compắc của $E_l(F,M)$, không làm mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $\{u_n\}$ hội tụ về u nào đó thuộc $E_l(F,M)$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh dãy $\{x_n\}$ hội tụ trong M. Do $d(x_n, M) \leq \varepsilon_n$, ta có với mỗi n tồn tại $\bar{x}_n \in M$, sao cho:

$$d(x_n, \bar{x}_n) \leq d(x_n, M) + \frac{1}{n} \leq \varepsilon_n + \frac{1}{n}.$$

Dựa vào tính compắc của M, ta có thể giả sử $\{\bar{x}_n\}$ hội tụ về x nào đó trong M. Khi đó, với mỗi n, ta có:

$$\begin{aligned} d(x_n, x) &\leq d(x_n, \bar{x}_n) + d(\bar{x}_n, x) \\ &\leq \varepsilon_n + \tfrac{1}{n} + d(\bar{x}_n, x). \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) \leq \lim_{n\to\infty} \left(\varepsilon_n + \frac{1}{n} + d(\bar{x}_n, x)\right) = 0.$$

Do đó, $x_n \to x \in M$.

Kế tiếp, ta sẽ chứng minh $F(u) \subseteq F(x) + C$. Bằng phương pháp phản chứng, giả sử tồn tại $v \in F(u)$ sao cho $v \notin F(x) + C$. Rõ ràng, $F(x) + C$ đóng vì $F(x)$ compắc và C đóng. Vì thế tồn tại $\delta > 0$ sao cho $(v + \delta B_Y) \cap (F(x) + C) = \emptyset$. Do đó,

$$v \notin F(x) + C + \delta B_Y. \qquad (3.5)$$

Từ Bổ đề 2.4, với δB_Y ở trên, tồn tại các lân cận B_1, B_2 của 0_Y sao cho

$$B_1 + B_2 \subseteq \delta B_Y. \qquad (3.6)$$

Vì $F(\cdot)$ là H-C-usc tại $x \in M$ nên với B_1 ở trên, tồn tại lân cận $U(x)$ của x sao cho

$$F(x_0) \subseteq F(x) + B_1 + C, \forall x_0 \in U(x).$$

Vì $x_n \to x$, tồn tại $n_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in U(x)$ với mọi $n \geq n_1$. Do đó, ta có:

$$F(x_n) \subseteq F(x) + B_1 + C, \forall n \geq n_1. \qquad (3.7)$$

Vì $F(\cdot)$ là H-C-lsc tại $u \in M$ nên với B_2 ở trên, tồn tại lân cận $U(u)$ của u, sao cho:

$$F(u) \subseteq F(u_0) + B_2 + C, \forall u_0 \in U(u).$$

Từ $u_n \to u$, tồn tại $n_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $u_n \in U(u)$ với mọi $n \geq n_2$. Do đó, ta có:

$$F(u) \subseteq F(u_n) + B_2 + C, \forall n \geq n_2. \quad (3.8)$$

Lấy $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, kết hợp (3.4) và (3.6) - (3.8) ta suy ra được rằng với $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} F(u) + \varepsilon_n e &\subseteq F(u_n) + B_2 + C + \varepsilon_n e \\ &\subseteq F(x_n) + C + B_2 + C \\ &\subseteq F(x) + B_1 + C + C + B_2 + C \\ &\subseteq F(x) + \delta B_Y + C. \end{aligned}$$

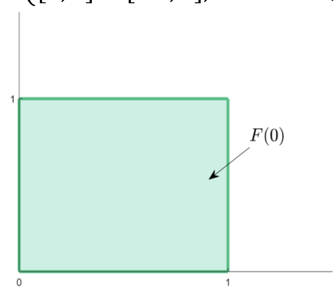
Tức là:

$$F(u) + \varepsilon_n e \subseteq F(x) + \delta B_Y + C, \forall n \geq n_0.$$

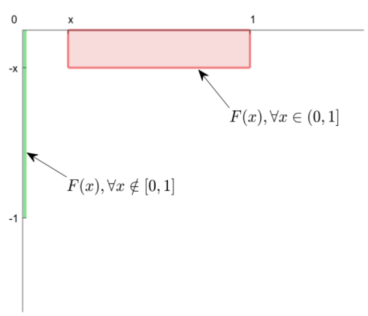
Điều này mâu thuẫn với (3.5). Do $F(u) \subseteq F(x) + C$ nên $F(x) \leq_C^l F(u)$. Kết hợp với $x \in M$ và $u \in E_l(F, M)$ ta được $x \in E_l(F, M)$. Định lí được chứng minh. □

Ví dụ 3.1. Cho $X = \mathbb{R}$ và $Y = \mathbb{R}^2$. Cho $M = [0,1]$ và $C = \mathbb{R}^2_+ + \left\{\left(\frac{1}{2}; 0\right)\right\}$. Ánh xạ $F: X \rightrightarrows Y$ được xác định như sau:

$$F(x) = \begin{cases} [0,1] \times [0,1], & \text{nếu } x = 0, \\ [x, 1] \times [-x, 0], & \text{nếu } x \in (0,1], \\ [0,0] \times [-1,0], & \text{nếu } x \notin [0,1]. \end{cases}$$



Hình 3.1. Đồ thị của $F(0)$



Hình 3.2. Đồ thị của $F(x)$ với $x \neq 0$

Ta kiểm tra được rằng $F(\cdot)$ là C-liên tục Hausdorff và có giá trị compắc trên M (xem Hình 3.1, 3.2). Rõ ràng, M là tập con compắc của $\mathrm{dom}F$. Do đó, tất cả các giả thiết của Định lí 3.2 (a) đều được thỏa mãn.

Bằng tính toán trực tiếp, ta được $E_l(F, M) = [0,1]$. Có thể thấy rằng l-SOP là đặt chỉnh LP suy rộng. Thật vậy, với $x_n = \frac{1}{2n}, u_n = 1 - \frac{1}{2n}$ và $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, ta có $\{x_n\}$ là dãy xấp xỉ LP suy rộng cho bài toán l-SOP và $-\frac{1}{2n} \to 0 \in E_l(F, M)$. Hơn nữa, bài toán l-SOP là đặt chỉnh LP suy rộng. Do đó, Định lí 3.2 (a) áp dụng được.

Tuy nhiên, $F(\cdot)$ không là B-lsc và $F(\cdot)$ rõ ràng cũng không là liên tục Berge. Thật vậy, lấy $x_0 = 0$ và

$V = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| (x-1)^2 + (y-1)^2 < \frac{1}{4}\right\}$, ta có $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$. Khi đó, với bất kỳ lân cận U của x_0 tồn tại $\bar{x} \in U$ sao cho $F(\bar{x}) \cap V = \emptyset$. Do đó, Định lí 4.5 (Duy, 2021) không áp dụng được cho trường hợp bài toán trong ví dụ này. Hơn nữa, giả thiết C-liên tục Hausdorff trong Định lí 3.2 là nhẹ hơn giả thiết Berge liên tục trong Định lí 4.5 (Duy, 2021). Kết quả của Định lí 3.2 là một sự cải thiện của kết quả đã có.

4. ĐẶT CHỈNH HADAMARD

Cho D là một nón lồi, đóng, có đỉnh với phần trong khác rỗng trong Z. Cho A là tập con khác rỗng của X và T là một tập con compắc khác rỗng của không gian tôpô Hausdorff thực. Gọi $\mathcal{O}$ là tập hợp tất cả ánh xạ có giá trị véctơ đi từ $A \times T$ vào Z. Gọi $\mathcal{L}$ là tập hợp tất cả các ánh xạ có giá trị tập hợp từ A vào Y. Ta xét họ các bài toán tối ưu tập được nhiễu bởi cả hàm mục tiêu và ràng buộc trên không gian tham số $\mathcal{P} = \mathcal{L} \times \mathcal{O}$ được xác định như sau: với mỗi $p = (F, h) \in \mathcal{P}$, ta xét bài toán tối ưu tập như sau (viết tắt là $ISOP$):

$$(ISOP)\begin{cases} \min F(x) \\ \text{s.t. } x \in K(p) \end{cases}$$

với

$$K(p) = \{x \in A: h(x,t) \notin \mathrm{int}D, \forall t \in T\},$$

"min" (cực tiểu hàm mục tiêu) ở đây được hiểu là cực tiểu theo quan hệ thứ tự tập với $\leq_C^s$ hoặc $\ll_C^s$ và $p \in \mathcal{P}$ được xem như là tham số nhiễu.

Để thuận tiện trong việc trình bày, ta kí hiệu tập s-nghiệm và s-nghiệm yếu của bài toán $ISOP$ lần lượt là $E_s(p)$ và $W_s(p)$.

Bổ đề 4.1. (Peng et al., 2022) Cho các ánh xạ đa trị $F_n: X \rightrightarrows Y$ và A và tập con khác rỗng trong X, $A \subseteq \mathrm{dom}F_n$. Khi đó,

(i) $F_n \xrightarrow{HCl} F$ trên A nếu với bất kỳ lân cận V của 0_Y thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$F(x) \subseteq F_n(x) + V - C, \forall x \in A, \forall n \geq n_0.$$

(ii) $F_n \xrightarrow{HCu} F$ trên A nếu với bất kỳ lân cận V của 0_Y thì tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho:

$$F_n(x) \subseteq F(x) + V - C, \forall x \in A, \forall n \geq n_0.$$

Ta nói rằng $F_n \xrightarrow{HC} F$ (còn gọi là C-hội tụ Hausdorff) trên A nếu $F_n \xrightarrow{HCl} F$ và $F_n \xrightarrow{HCu} F$ trên A.

Định nghĩa 4.1. Với $p = (F, h) \in \mathcal{P}$ cho trước, bài toán $ISOP$ được gọi là đặt chỉnh Hadamard suy rộng với nghiệm hữu hiệu (nghiệm hữu hiệu yếu) nếu các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $E_s(p) \neq \emptyset$ $(W_s(p) \neq \emptyset)$;

(ii) nếu $p_n \to p$, thì mỗi dãy $\{x_n\} \subseteq E_s(p_n)$ $(\{x_n\} \subseteq W_s(p_n))$ có dãy con hội tụ về $\bar{x}$ nào đó thuộc $E_s(p)$ $(W_s(p))$.

Tiếp theo, điều kiện đủ để bài toán $ISOP$ là đặt chỉnh Hadamard suy rộng sẽ được trình bày, cụ thể:

Định lí 4.1. Với $p = (F, h) \in \mathcal{P}$ cho trước. Giả sử các điều kiện sau được thỏa mãn:

(i) $K(\cdot)$ compắc tại p;

(ii) $K(\cdot)$ là B-lsc tại p;

(iii) $F_n \xrightarrow{HC} F$ trên A;

(iv) $F_n \xrightarrow{H(-C)} F$ trên A;

(v) $-F(\cdot)$ là C-liên tục Hausdorff và có giá trị compắc trên A;

(vi) $F(\cdot)$ là C-liên tục Hausdorff và có giá trị compắc trên A.

Khi đó, các khẳng định sau là đúng.

(a) Bài toán u-$ISOP$ là đặt chỉnh Hadamard suy rộng với nghiệm hữu hiệu nếu các điều kiện (i) – (iii) và (vi) được thỏa mãn.

(b) Bài toán l-$ISOP$ là đặt chỉnh Hadamard suy rộng với nghiệm hữu hiệu nếu các điều kiện (i) – (ii), (iv) và (vi) được thỏa mãn.

Chứng minh

Ta trình bày phần chứng minh cho mục (a) do phần chứng minh cho mục (b) là tương tự.

Với $p_n \to p$, lấy dãy $\{x_n\}$ với $x_n \in E_u(p_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Vì $K(p)$ compắc nên tồn tại $\bar{x} \in K(p)$ và $\{x_n\}$ có dãy con $\{x_{n_k}\}$ sao cho $x_{n_k} \to \bar{x}$.

Tiếp theo, ta sẽ chứng minh rằng $\bar{x} \in E_u(p)$.

Bằng phương pháp phản chứng, ta giả sử $\bar{x} \notin E_u(p)$. Khi đó, tồn tại $x \in K(p)$ sao cho $F(x) \leq_C^u F(\bar{x})$, tức là

$$F(x) \subseteq F(\bar{x}) - C. \quad (4.1)$$

Do $K(\cdot)$ là B-lsc tại p, theo Bổ đề 2.2 (i) tồn tại dãy $\{\hat{x}_{n_k}\}$ với $\hat{x}_{n_k} \in K(p_{n_k})$ sao cho $\hat{x}_{n_k} \to x$. Vì $-F(\cdot)$ là H-C-usc trên A, với $-\varepsilon e + \mathrm{int}C$ là lân cận của 0_Y, tồn tại một lân cận $U(x)$ của x sao cho

$$-F(x_0) \subseteq -F(x) - \varepsilon e + \mathrm{int}C + C, \forall x_0 \in U(x).$$

Do $\hat{x}_{n_k} \to x$ nên tồn tại $k_1 \in \mathbb{N}$ sao cho $\hat{x}_{n_k} \in U(x)$ với $k \geq k_1$. Điều này dẫn đến

$$F(\hat{x}_{n_k}) \subseteq F(x) + \varepsilon e - \mathrm{int}C - C, \ \forall k \geq k_1.$$

Cho $\varepsilon \to 0$ và kết hợp với $F(x) - C$ là đóng thì ta được

$$F(\hat{x}_{n_k}) \subseteq F(x) - C, \ \forall k \geq k_1. \quad (4.2)$$

Kết hợp (4.1) và (4.2), ta được

$$\begin{aligned} F(\hat{x}_{n_k}) &\subseteq F(x) - C \\ &\subseteq F(\bar{x}) - C, \ \forall k \geq k_1. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Vì $-F(\cdot)$ là H-C-lsc trên A, với $-\varepsilon e + \mathrm{int}C$ là lân cận của 0_Y thì tồn tại một lân cận $U(\bar{x})$ của $\bar{x}$ sao cho

$$-F(\bar{x}) \subseteq -F(x) - \varepsilon e + \mathrm{int}C + C, \forall x \in U(\bar{x}).$$

Do $x_{n_k} \to \bar{x}$ nên tồn tại $k_2 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_{n_k} \in U(\bar{x})$ với mọi $k \geq k_2$. Do đó:

$$F(\bar{x}) \subseteq F(x_{n_k}) + \varepsilon e - \mathrm{int}C - C, \ \forall k \geq k_2.$$

Cho $\varepsilon \to 0$ và sử dụng tính đóng của $F(x_{n_k}) - C$, ta được

$$F(\bar{x}) \subseteq F(x_{n_k}) - C, \ \forall k \geq k_2. \quad (4.4)$$

Lấy $k_3 = \max\{k_1, k_2\}$, kết hợp (4.3) và (4.4), ta được

$$F(\hat{x}_{n_k}) \subseteq F(x_{n_k}) - C,\ \forall k \geq k_3. \qquad (4.5)$$

Theo Bổ đề 2.4, với mỗi lân cận W của 0_Y, tồn tại các lân cận của W_1 và W_2 của 0_Y sao cho

$$W_1 + W_2 \subseteq W. \qquad (4.6)$$

Từ điều kiện (iii) ta có $F_n \xrightarrow{HCu} F$ trên A. Khi đó, với W_1 ở trên, tồn tại $k_4 \in \mathbb{N}$ sao cho với mọi $k \geq k_4$ thì

$$F_{n_k}(\hat{x}_{n_k}) \subseteq F(\hat{x}_{n_k}) + W_1 - C. \qquad (4.7)$$

Do $F_n \xrightarrow{HCl} F$ trên A, với W_2 ở trên, tồn tại $k_5 \in \mathbb{N}$ sao cho với $k \geq k_5$ thì

$$F(x_{n_k}) \subseteq F_{n_k}(x_{n_k}) + W_2 - C. \qquad (4.8)$$

Lấy $k_6 = \max\{k_3, k_4, k_5\}$, kết hợp (4.5) - (4.8), ta suy ra rằng với mọi $k \geq k_6$ thì

$$\begin{aligned} F_{n_k}(\hat{x}_{n_k}) &\subseteq F(\hat{x}_{n_k}) + W_1 - C \\ &\subseteq F(x_{n_k}) + W_1 - C - C \\ &\subseteq F_{n_k}(x_{n_k}) + W_2 + W_1 - C - C \\ &\subseteq F_{n_k}(x_{n_k}) + W - C. \end{aligned}$$

Như vậy, với mọi $k \geq k_6$, ta thu được kết quả

$$F_{n_k}(\hat{x}_{n_k}) \subseteq F_{n_k}(x_{n_k}) + W - C.$$

Do W được lấy tùy ý và $F_{n_k}(x_{n_k}) - C$ là đóng nên ta được

$$F_{n_k}(\hat{x}_{n_k}) \subseteq F_{n_k}(x_{n_k}) - C, \forall\ k \geq k_6,$$

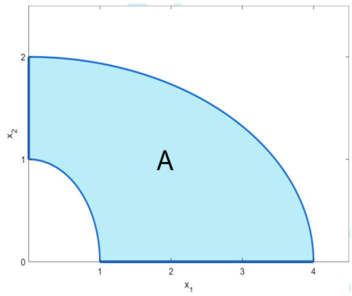
tức là $F_{n_k}(\hat{x}_{n_k}) \leq_C^u F_{n_k}(x_{n_k})$, điều này mâu thuẫn với $x_{n_k} \in E_u(p_{n_k})$ và $F(x_{n_k})$ là compắc theo Bổ đề 2.1. Do đó, bài toán *u-ISOP* là đặt chỉnh Hadamard. Định lí được chứng minh. □

Ví dụ sau đây minh họa cho kết quả của Định lí ở trên.

Ví dụ 4.1. Cho $X = Y = Z = \mathbb{R}^2$, $D = \mathbb{R}^2_+ + \{(0,1)\}$, $C = \mathbb{R}^2_+ + \{(0,1)\}$. Cho $T = [0,1]$ và

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in X \middle| x_1^2 + x_2^2 \geq 1, \frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{4} \leq 1, x_1, x_2 \geq 0\right\}.$$

Đồ thị của A được biểu diễn dưới dây.



Hình 4.1. Đồ thị của A

Ta xét $h, h_n: A \times T \to \mathbb{R}^2$ và $F, F_n: A \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ với $x = (x_1, x_2) \in A, t \in T$, ta có

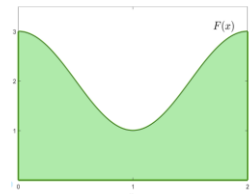
$$h(x,t) = (x_1^2 - 2x_1 - t, x_1 + x_2 + t),$$

$$h_n(x,t) = \left(x_1^2 - 2x_1 - t + \frac{1}{n}, x_1 + x_2 + t + \frac{1}{n}\right),$$

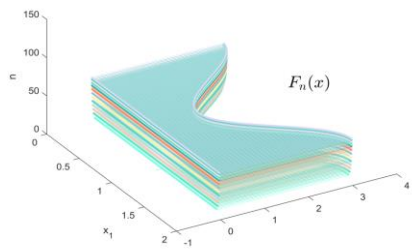
$$F(x) = [(x_1, 0), (x_2, 2 + \cos \pi x_1)],$$

$$F_n(x) = \left[\left(x_1 + \frac{1}{n}, 0\right), \left(x_1 + \frac{1}{n}, 2 + \cos \pi\left(x_1 + \frac{1}{n}\right)\right)\right].$$

Đồ thị của F và F_n được biểu diễn dưới đây.



Hình 4.2. Đồ thị của F



Hình 4.3. Đồ thị của F_n

Ta kiểm tra được rằng $-F(\cdot)$ là C-liên tục Hausdorff, có giá trị compắc trên A và thỏa mãn các điều kiện (i)-(iii) của Định lí 4.1. Bằng tính toán trực tiếp, ta có

$$K(p) = \{x = (x_1, x_2) \in A | 0 \leq x_1 \leq 2\},$$

$$K(p_n) = \left\{x = (x_1, x_2) \in A \middle| 1 - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \leq x_1 \leq 1 + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right\},$$

và

$$E_u(p) = \left\{(x_1, x_2) \in A \middle| 0 \leq x_1 < \frac{3}{2}\right\},$$

$$E_u(p_n) = \left\{(x_1, x_2) \in A \middle| 1 - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \leq x_1 < \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{n-1}{n}}\right\}.$$

Định nghĩa 4.1 được thỏa mãn nên u-$ISOP$ đặt chỉnh Hadamard suy rộng. Do đó, Định lý 4.1 áp dụng được.

Kết quả sau đây có đóng góp quan trọng để đạt được các kết quả về đặt chỉnh cho bài toán $ISOP$.

Hệ quả 4.1. Cho $A \subseteq \mathrm{dom}F_n$, dãy $\{x_n\} \subseteq A$ với $x_n \to x \in A$, $\{y_n\} \subseteq A$ với $y_n \to y \in A$ và $F_n(\cdot)$ là $-C$-lồi trên A. Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $F(y)$ là compắc và $F(y) \ll_C^u F(x)$;

(ii) $-F(\cdot)$ là H-C-usc tại y và $-F(\cdot)$ là C-lsc tại x;

(iii) $F_n \overset{HC}{\rightarrow} F$ trên A.

Khi đó, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$F_n(y_n) \ll_C^u F(x_n), \forall n \geq n_0.$$

Định lí 4.2. Cho $p = (F, h) \in \mathcal{P}$ và F có giá trị compắc trên A. Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $K(p)$ là compắc và $K(\cdot)$ là B-lsc tại p,

(ii) $-F(\cdot)$ là H-C-usc trên A và $-F(\cdot)$ là C-lsc trên A,

(iii) $F_n \overset{HC}{\rightarrow} F$ trên A,

(iv) $F_n(\cdot)$ là $-C$-lồi trên A.

Khi đó, bài toán u-$ISOP$ là đặt chỉnh Hamamard suy rộng với nghiệm yếu.

Chứng minh

Với $p_n \to p$, lấy $\{x_n\} \subseteq W_u(p_n)$. Vì $K(p)$ là compắc nên dãy $\{x_n\}$ có dãy con $\{x_{n_k}\}$ sao cho $x_{n_k} \to \bar{x} \in K(p)$. Ta sẽ chứng minh rằng $\bar{x} \in W_u(p)$.

Bằng phương pháp phản chứng, giả sử $\bar{x} \notin W_u(p)$. Khi đó, tồn tại $x \in K(p)$ sao cho $F(x) \ll_C^u F(\bar{x})$, tức là ta có

$$F(x) \subseteq F(\bar{x}) - \mathrm{int}C.$$

Từ $K(\cdot)$ là B-lsc tại p và Bổ đề 2.2 (i), tồn tại dãy $\{\hat{x}_{n_k}\} \subseteq K(p_{n_k})$ sao cho $\hat{x}_{n_k} \to x$. Từ Hệ quả 4.1 ta có thể kết luận rằng tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho

$$F_{n_k}(\hat{x}_{n_k}) \subseteq F_{n_k}(x_{n_k}) - \mathrm{int}C, \forall k \geq k_0,$$

tức là $F_{n_k}(\hat{x}_{n_k}) \ll_C^u F_{n_k}(x_{n_k})$. Điều này mâu thuẫn vì $x_n \in W_u(p_n)$ với mọi n.

Do đó, bài toán u-$ISOP$ là đặt chỉnh Hadamard suy rộng với nghiệm yếu. Định lí được chứng minh. □

Hệ quả 4.2. Với $p = (F, h) \in \mathcal{P}$ và F có giá trị compắc trên A. Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn:

(i) $K(p)$ là compắc và $K(\cdot)$ là B-lsc tại p;

(ii) $F(\cdot)$ là H-C-usc trên A và $F(\cdot)$ là C-lsc trên A;

(iii) $-F_n \xrightarrow{H(-C)} -F$ trên A;

(iv) $F_n(\cdot)$ là C-lồi trên A.

Khi đó, bài toán l-$ISOP$ là đặt chỉnh Hamamard suy rộng với nghiệm yếu.

5. KẾT LUẬN

Với giả thiết được giảm nhẹ từ tính liên tục theo nghĩa của Berge thành C-liên tục Hausdorff, chúng tôi đã thu được điều kiện đủ cho sự đặt chỉnh của bài toán tối ưu tập. Đây là kết quả cải thiện so với các kết quả nghiên cứu đã có. Về quan hệ thứ tự giữa các tập hợp, ngoài hai quan hệ thứ tự l và u trang bị cho bài toán tối ưu tập được nghiên cứu trong bài báo này, còn có nhiều loại quan hệ thứ tự khác, và các kết quả trên có thể tiếp tục được xem xét cho các loại quan hệ thứ tự tập còn lại.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo này là một phần trong đề tài nghiên cứu của các tác giả. Đề tài này được tài trợ bởi Trường Đại học Cần Thơ, Mã số: TSV2023-81.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Anh, L. Q., Duy, T. Q., & Khanh, P. Q. (2016) Continuity properties of solution maps of parametric lexicographic equilibrium problems. *Positivity, 20*(1), 61-80.

Anh, L. Q., Duy, T. Q., & Khanh, P. Q. (2021). Levitin-Polyak well-posedness for equilibrium problems with the lexicographic order. *Positivity, 25*(4), 1323-1349.

Berge, C. (1963). *Topological Spaces.* Oliver and Boyd, London.

Duy, T. Q. (2021). Levitin-Polyak well-posedness in set optimization concerning Pareto efficiency. *Positivity*, *25*(5), 1923-1942.

Hadamard, J. (1902). Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique. *Princeton university bulletin*, *13*, 49-52.

Hu, R., & Fang, Y. P. (2016). Characterizations of Levitin-Polyak well-posedness by perturbations for the split variational inequality problem. *Optimization*, *65*(9), 1717-1732.

Khan, A. A., Tammer, C., & Zălinescu, C. (2015). *Set-Valued Optimization*. Springer, Heidelberg.

Kuroiwa, D. (2003). Existence theorems of set optimization with set-valued maps. *Journal of Information and Optimization Sciences*, *24*, 73-84.

Levitin, E. S., & Polyak, B. T. (1966). Convergence of minimizing sequences in conditional extremum problems. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, *168*(5), 997-1000.

Long, X. J., Peng, J. W., & Peng, Z. Y. (2015). Scalarization and pointwise well-posedness for set optimization problems. *Journal of Global Optimization*, *62*(4), 763-773.

Luc, D. T. (1989). *Theory of Vector Optimization*. Springer.

Mao, J. Y., Wang, S. H., & Han, Y. (2019). The stability of the solution sets for set optimization problems via improvement sets. *Optimization*, 68, 2171-2193.

Peng, Z. Y., Chen, X. J., Zhao, Y. B., & Li, X.B. (2022). Painlevé–Kuratowski convergence of minimal solutions for set-valued optimization problems via improvement sets. *Journal of Global Optimization*, 1-23.

Rockafellar, R. T., & Wets, R. J. B. (1998). *Variational Analysis*. Springer, Berlin.

Tikhonov, A. N. (1966). On the stability of the functional optimization problems. *USSR Computational Mathematics and Mathematical*, 6, 28-33.

Virmani, G., & Srivastava, M. (2015). On Levitin-Polyak α-well-posedness of perturbed variational-hemivariational inequality. *Optimization*, *64*(5), 1153-1172.

Vui, P. T., Anh, L. Q., & Wangkeeree, R. (2019). Levitin-Polyak well-posedness for set optimization problems involving set order relations. *Positivity*, *23*(3), 599-616.

Yu, P. L. (1974). Cone convexity, cone extreme points and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and* Applications, 14, 319-377.

Zhang, W.Y., Li, S. J., & Teo, K. L. (2009). Well-posedness for set optimization problems. *Nonlinear Analysis*, 71, 3769-3778.