Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Số chuyên đề: Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2023.088

TÍNH LIÊN THÔNG CỦA TẬP NGHIỆM HỮU HIỆU YẾU CHO BÀI TOÁN TỐI ƯU TẬP KHÔNG LỒI

Nguyễn Thái Anh[1*], Phạm Thanh Dược[2] và Nguyễn Thị Ngọc Tuyết[1]
[1]*Bộ môn Toán, Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ*
[2]*Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Kỹ thuật - Công nghệ Cần Thơ*
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Thái Anh (email: anhm0721005@gsudent.ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 14/01/2023
Ngày nhận bài sửa: 12/03/2023
Ngày duyệt đăng: 27/03/2023

Title:
Connectedness of weakly efficient solution set of a non-convex set optimization problem

Từ khóa:
Bài toán tối ưu tập, hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty, phương pháp vô hướng hóa, tính liên thông

Keywords:
Connectedness, Hiriart-Urruty oriented distance function, scalar method, set optimization problem

ABSTRACT

This paper considers a nonconvex set optimization problem and discusses connectedness conditions for its weakly efficient solution set. Firstly, various concepts of connectedness for a set-valued map are proposed. Secondly, sufficient conditions for the connectedness of an extension of the oriented distance of Hiriart-Urruty are formulated. Finally, the connectedness properties of a weakly efficient solution set to such problem are investigated via the extension of the oriented distance of Hiriart-Urruty.

TÓM TẮT

Bài báo này xem xét một bài toán tối ưu tập không lồi và thảo luận các điều kiện liên thông cho tập nghiệm hữu hiệu yếu của nó. Đầu tiên, các khái niệm khác nhau về tính liên thông cho ánh xạ có giá trị tập được đề xuất. Thứ hai, các điều kiện đủ cho tính liên thông cho một dạng mở rộng của hàm khoảng cách định hướng của Hiriart-Urruty được trình bày. Cuối cùng, tính liên thông của tập nghiệm hữu hiệu yếu cho bài toán trên được nghiên cứu thông qua dạng mở rộng của hàm khoảng cách định hướng của Hiriart-Urruty.

1. GIỚI THIỆU

Lý thuyết tối ưu là một trong những lĩnh vực phát triển mạnh của toán ứng dụng. Trong những năm qua, lý thuyết này đã cho thấy được tầm ảnh hưởng của nó đến nhiều lĩnh vực khác nhau như kinh tế, y học, kỹ thuật,... thông qua nhiều loại mô hình khác nhau như mô hình bài toán cân bằng, bài toán tối ưu vector, bài toán bất đẳng thức biến phân,... (Kassay & Radulescu, 2018). Trong những thập niên gần đây, mô hình bài toán tối ưu tập đang được rất nhiều nhà nghiên cứu quan tâm (Alonso & Rodríguez-Marín, 2005; Gutiérrez et al., 2012; Kuroiwa, 2003; Karuna & Lalitha, 2019; Khoshkhabar-amiranloo, 2019; Xu & Li, 2014) bởi tính ứng dụng cao của nó trong lý thuyết và thực tiễn (Khan et al., 2016).

Trong tối ưu, một trong những vấn đề quan trọng trong nghiên cứu là khảo sát các tính chất topo của tập nghiệm. Tính liên thông của tập nghiệm được nhiều nhà toán học quan tâm, vì nó bảo đảm cho việc di chuyển từ một nghiệm hữu hiệu này sang một nghiệm hữu hiệu khác. Nhiều nhà nghiên cứu đã sử dụng kỹ thuật vô hướng hóa để khảo sát tính liên thông của tập nghiệm bài toán tối ưu vector (Anh et al., 2022b; Anh et al., 2022; Gong 1994; Qiu & Yang, 2012) và bài toán cân bằng vector (xem Anh et al., 2022a; Gong, 2007; Han & Huang, 2016,). Đối với bài toán tối ưu tập, một công trình tiêu biểu nghiên cứu về điều kiện liên thông cho tập nghiệm là Han & Huang (2020), trong đó các điều kiện liên quan đến tính lồi của tập ràng buộc và hàm mục tiêu là giả thiết cốt yếu.

Từ quan sát trên, điều kiện đủ cho tính liên thông của tập nghiệm hữu hiệu yếu đối với bài toán tối ưu tập được nghiên cứu mà không sử dụng bất kỳ điều kiện nào liên quan tính lồi của tập ràng buộc và hàm mục tiêu. Cụ thể, các khái niệm về tính tựa lồi tự nhiên tổng quát cho ánh xạ đa trị được giới thiệu. Sau đó, tính tựa lồi tự nhiên tổng quát cho dạng mở rộng của hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty được nghiên cứu. Cuối cùng, tính liên thông của tập nghiệm hữu hiệu yếu đối với bài toán tối ưu tập không lồi được thiết lập bằng phương pháp vô hướng hóa.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Một số trường hợp đặc biệt được ngoại trừ trong bài viết này. Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ là các không gian định chuẩn, $\mathcal{C}$ là một nón trong $\mathbb{Y}$. $\mathcal{P}(\mathbb{Y})$ là tập hợp tất cả các tập con khác rỗng của $\mathbb{Y}$ và $\mathbb{R}_+$ là tập hợp tất cả các số thực không âm.

Định nghĩa 2.1. (Araya, 2012; Kuroiwa, 1998) Cho $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Y})$. Các quan hệ thứ tự tập $\preccurlyeq_u$ và $\prec_u$ lần lượt được định nghĩa như sau

$$\mathcal{N} \preccurlyeq_u \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{N} \subset \mathcal{M} - \mathcal{C},$$

và nếu $\operatorname{int}\mathcal{C} \neq \emptyset$ thì

$$\mathcal{N} \prec_u \mathcal{M} \Leftrightarrow \mathcal{N} \subset \mathcal{M} - \operatorname{int}\mathcal{C}.$$

Định nghĩa 2.2. (Luc, 1989) Một phần tử $\mathcal{M}$ của $\mathcal{P}(\mathbb{Y})$ được gọi là

(a) *$\mathcal{C}$-chính thường* nếu $\mathcal{M} + \mathcal{C} \neq \mathbb{Y}$;
(b) *$\mathcal{C}$-compact* nếu mọi phủ của $\mathcal{M}$ có dạng

$$\{\mathcal{V}_\alpha + \mathcal{C}: \alpha \in \mathcal{I}, \mathcal{V}_\alpha \text{ là mở}\}$$

đều trích được một phủ con hữu hạn;
(c) *$\mathcal{C}$-lồi* nếu $\mathcal{M} + \mathcal{C}$ là lồi.

Nhận xét 2.1.

(i) Nếu $\mathcal{C} = \{0\}$ thì các khái niệm trong Định nghĩa 2.2 trở thành các khái niệm cổ điển.
(ii) Mọi tập $\mathcal{C}$-compact đều là $\mathcal{C}$-chính thường.

Định nghĩa 2.3. (Gopfert et al., 2003) Một ánh xạ đa trị $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) *$\mathcal{C}$-nửa liên tục trên* ($\mathcal{C}$-usc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mọi lân cận $\mathcal{V}$ của $G(x_0)$, tồn tại lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho

$$G(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V} + \mathcal{C};$$

(b) *$\mathcal{C}$-nửa liên tục dưới* ($\mathcal{C}$-lsc) tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu với mọi tập con mở $\mathcal{V}$ của $\mathbb{Y}$ với $\mathcal{V} \cap G(x_0) \neq \emptyset$ thì tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của x_0 sao cho $G(x) \cap (\mathcal{V} - \mathcal{C}) \neq \emptyset$ với mọi $x \in \mathcal{U}$.
(c) *$\mathcal{C}$-liên tục* tại $x_0 \in \mathbb{X}$ nếu nó vừa là $\mathcal{C}$-usc vừa là $\mathcal{C}$-lsc tại x_0.

Định nghĩa 2.4. Cho $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$

(a) Với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, tập $\mathcal{T}_{x_1,x_2} := \cup_{t\in[0,1]} \mathcal{L}_{x_1,x_2}(t)$ được gọi là *đoạn thẳng* nối hai điểm x_1 và x_2, trong đó $\mathcal{L}_{x_1,x_2}(t) := (1-t)x_1 + tx_2$. Khi đó, $\mathcal{X}$ được gọi là *lồi* nếu $\mathcal{T}_{x_1,x_2} \subset \mathcal{X}$ với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ (Rockafellar, 1970).
(b) Với mỗi cặp điểm $x_1, x_2 \in \mathbb{X}$, cho $\mathcal{A}_{x_1,x_2}: [0,1] \to \mathbb{X}$ là một ánh xạ liên tục có giá trị vector sao cho

$$\mathcal{A}_{x_1,x_2}(0) = x_1 \text{ và } \mathcal{A}_{x_1,x_2}(1) = x_2.$$

Khi đó, $\mathcal{A}_{x_1,x_2}$ được gọi là một *cung* trong $\mathbb{X}$ với điểm đầu và điểm cuối là x_1 và x_2. Tập $\mathcal{X}$ được gọi là *liên thông cung* nếu với mỗi cặp điểm x_1, x_2 trong $\mathcal{X}$, tồn tại một cung $\mathcal{A}_{x_1,x_2} \subset \mathcal{X}$ (Avriel and Zang, 1980).

(c) Tập $\mathcal{X}$ được gọi là *tách được* nếu có hai tập con mở $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ của $\mathbb{X}$ sao cho $\mathcal{X} \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$, $\mathcal{X} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset, \mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$ và $\mathcal{X} \subset \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$. Tập $\mathcal{X}$ được gọi là *liên thông* nếu nó không tách được (Warburton, 1983).

Nhận xét 2.2. Các mệnh đề dưới đây được suy ra từ Định nghĩa 2.4.

(i) Mọi tập lồi đều là liên thông cung.
(ii) Mọi tập liên thông cung đều là liên thông.

Lấy cảm hứng từ Anh et al. (2022a), các khái niệm lồi tổng quát cho ánh xạ đa trị được trình bày như sau:

Định nghĩa 2.5. Một ánh xạ đa trị $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ được gọi là

(a) *$\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn* trong tập con lồi $\mathcal{X}$ của $\mathbb{X}$ nếu với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ và $\lambda \in [0,1]$, tồn tại $\mu \in [0,1]$ sao cho

$$G\left(\mathcal{L}_{x_1,x_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_u (1-\mu)G(x_1) + \mu G(x_2);$$

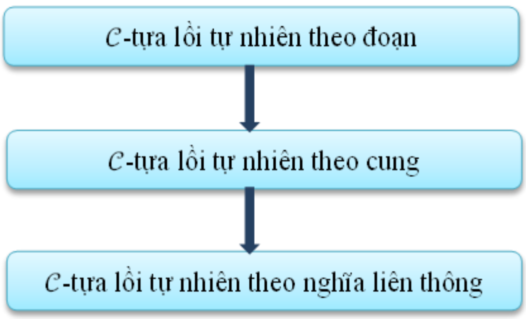
(b) *$\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo cung* trong tập con liên thông cung $\mathcal{X}$ của $\mathbb{X}$ nếu với mỗi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, tồn tại một cung $\mathcal{A}_{x_1,x_2}$ trong $\mathcal{X}$ sao cho với mỗi $\lambda \in [0,1]$, ta có thể tìm được một $\mu \in [0,1]$,

$$G\left(\mathcal{A}_{x_1,x_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_u (1-\mu)G(x_1) + \mu G(x_2);$$

(c) *$\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông* trong tập con liên thông $\mathcal{X}$ của $\mathbb{X}$ nếu với bất kì $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$, tồn tại một tập con liên thông $\mathcal{S}_{x_1,x_2} \subset \mathcal{X}$ chứa hai điểm x_1, x_2 sao cho với mỗi $x \in \mathcal{S}_{x_1,x_2}$, ta có thể tìm được một $\mu \in [0,1]$,

$$G(x) \preccurlyeq_u (1-\mu)G(x_1) + \mu G(x_2).$$

Từ Định nghĩa 2.5, ta thu được sơ đồ sau.



Hình 2.1. Liên hệ giữa các dạng tựa lồi tự nhiên

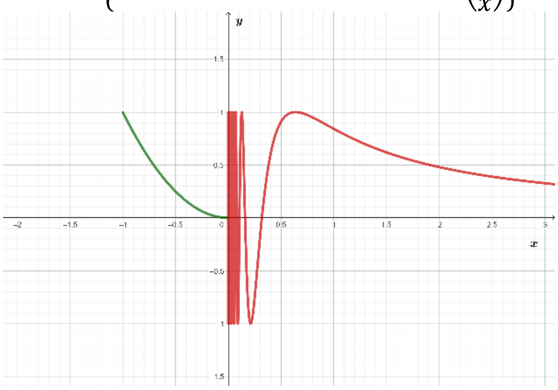
Các chiều ngược lại của sơ đồ trên là không đúng. Điều này được minh họa qua hai ví dụ sau.

Ví dụ 2.1. Cho $\mathbb{X} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^2, \mathbb{Y} = \mathbb{R}, \mathcal{C} = \mathbb{R}_+$. Tập $\mathcal{V} \subset \mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$, với

$$\mathcal{V}_1 := \{a = (x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0\}$$

và

$$\mathcal{V}_2 := \left\{a = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right\}.$$



Hình 2.2. Biểu diễn $\mathcal{V}$ trong $\mathbb{R}^2$

Khi đó, $\mathcal{V}$ là tập liên thông, nhưng không liên thông cung. Tiếp theo, ta xét hàm $G: \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ được cho bởi

$$G(x) = \begin{cases} 0, \text{nếu } a \in \mathcal{V}, \\ [0,1], \text{nếu } a \notin \mathcal{V}. \end{cases}$$

Khi đó, G là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông trong $\mathbb{R}^2$, nhưng nó không là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathbb{R}^2$. Thật vậy

- *G là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông trong $\mathbb{R}^2$*: Với mỗi cặp $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^2$, ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu $a_1, a_2 \in \mathcal{V}$, thì $\mathcal{S}_{a_1,a_2} := \mathcal{V}$. Khi đó, với mỗi $a \in \mathcal{S}_{a_1,a_2}$, ta được

$$G(a) \preccurlyeq_u (1-\mu)G(a_1) + \mu G(a_2),$$

với mọi $\mu \in [0,1]$.

Trường hợp 2. Nếu $a_1 \notin \mathcal{V}$ hoặc $a_2 \notin \mathcal{V}$, không mất tính tổng quát, giả sử rằng $a_1 \notin \mathcal{V}$. Đặt $\mathcal{S}_{a_1,a_2} := \mathbb{R}^2$, ta có

$$\begin{aligned} G(a) \preccurlyeq_u [0,1] &= G(a_1) \\ &= (1-0)G(a_1) + 0G(a_2), \end{aligned}$$

với mọi $a \in \mathcal{S}_{a_1,a_2}$.

- *G không là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathbb{R}^2$*: Với $a_1 = (-1,1) \in \mathcal{V}_1$ và $a_2 = \left(\frac{2}{\pi}, 1\right) \in \mathcal{V}_2$. Vì $\mathcal{V}$ không là tập liên thông cung, nên với mỗi cung $\mathcal{A}_{a_1,a_2}$ trong $\mathbb{R}^2$, tồn tại $\bar{\lambda} \in [0,1]$ sao cho $\mathcal{A}_{a_1,a_2}(\bar{\lambda}) \notin \mathcal{V}$ hay tương đương

$$\begin{aligned} G\left(\mathcal{A}_{a_1,a_2}(\bar{\lambda})\right) = [0,1] &\not\preccurlyeq_u 0 \\ &= (1-\mu)G(a_1) + \mu G(a_2). \end{aligned}$$

Vậy G không là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathbb{R}^2$.

Ví dụ 2.2. Cho $\mathbb{X} = \mathcal{X} = \mathbb{R}^2, \mathbb{Y} = \mathbb{R}, \mathcal{C} = \mathbb{R}_+$ và $G: \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}$ được định nghĩa bởi $G(a) = [0, (xy)^2]$ với mọi $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Khi đó, G là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung nhưng nó không $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn. Thật vậy,

- *G là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathbb{R}^2$*. Với mỗi $a_1 = (x_1, y_1)$ và $a_2 = (x_2, y_2)$ trong $\mathbb{R}^2$, xét cung $\mathcal{A}_{a_1,a_2}: [0,1] \to \mathbb{R}^2$ được định nghĩa như sau

$$\mathcal{A}_{a_1,a_2}(\lambda) = \begin{cases} (1-2\lambda)a_1, \text{nếu } 0 \le \lambda \le 0.5, \\ (2\lambda - 1)a_2, \text{nếu } 0.5 \le \lambda \le 1. \end{cases}$$

Tiếp theo, với mỗi $\lambda \in [0,1]$, ta sẽ chứng minh rằng luôn tìm được $\mu \in [0,1]$ sao cho

$$G\left(\mathcal{A}_{a_1,a_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_u (1-\mu)G(a_1) + \mu G(a_2). \quad (2.1)$$

Xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. Nếu $\lambda \in [0{,}0.5]$, thì

$$G\left(\mathcal{A}_{a_1,a_2}(\lambda)\right) = (1-2\lambda)^4[0,(x_1y_1)^2] \preccurlyeq_u [0,(x_1y_1)^2] = G(a_1).$$

Do đó, với $\mu = 0$ thì (2.1) đúng.

Trường hợp 2. Nếu $\lambda \in [0.5{,}1]$, thì

$$G\left(\mathcal{A}_{a_1,a_2}(\lambda)\right) = (2\lambda-1)^4[0,(x_2y_2)^2] \preccurlyeq_u [0,(x_2y_2)^2] = G(a_2).$$

Do đó, với $\mu = 1$ thì (2.1) đúng.

- *G không là $\mathbb{R}_+$tựa lồi tự nhiên theo đoạn trong* $\mathbb{R}^2$: Chọn $a_1 = (1{,}3)$ và $a_2 = (3{,}1)$ và $\lambda = 0.5$,

$$\begin{aligned} G(0.5a_1 + 0.5a_2) = G(2{,}2) = [0{,}16] &\notin [0{,}9] - \mathbb{R}_+ \\ &= (1-\mu)G(a_1) + \mu G(a_2) \\ &\quad - \mathbb{R}_+, \forall \mu \in [0{,}1]. \end{aligned}$$

Vậy G không là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn trong $\mathbb{R}^2$.

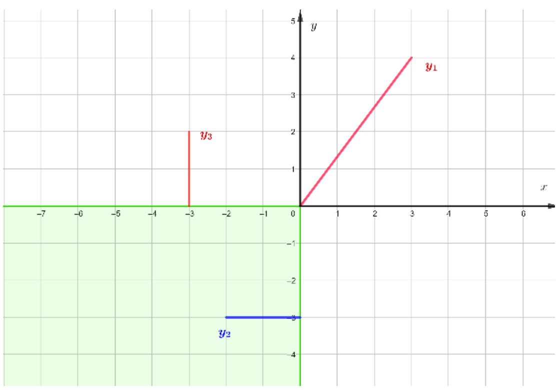
3. HÀM VÔ HƯỚNG HÓA PHI TUYẾN

Định nghĩa 3.1. (Hiriart-Urruty, 1979) *Hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty* $\varphi_{-\mathcal{C}}: \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$ được định nghĩa như sau

$$\varphi_{-\mathcal{C}}(y) = d(y, -\mathcal{C}) - d(y, \mathbb{Y} \setminus (-\mathcal{C})),$$

với mọi $y \in \mathbb{Y}$.

Ví dụ 3.1. Cho $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{C} = \mathbb{R}^2_+$ và các điểm $y_1 = (3;4), y_2 = (-2;-3)$ và $y_3 = (-3;2)$. Khi đó, $\varphi_{-\mathbb{R}^2_+}(y_1) = 5, \varphi_{-\mathbb{R}^2_+}(y_2) = -2$ và $\varphi_{-\mathbb{R}^2_+}(y_3) = 2$.



Hình 3.1. Cách xác định giá trị Hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty

Bổ đề 3.1. (Jiménez et al., 2020) Cho y, y_1, y_2 là các điểm thuộc $\mathbb{Y}$. Khi đó,

(a) $\varphi_{-\mathcal{C}}$ là liên tục trong $\mathbb{Y}$;
(b) nếu $\mathcal{C}$ là lồi thì $\varphi_{-\mathcal{C}}$ là lồi trong $\mathbb{Y}$;
(c) nếu $\mathcal{C}$ là đặc thì
$$\varphi_{-\mathcal{C}}(y) < 0 \Leftrightarrow y \in \operatorname{int}(-\mathcal{C});$$
(d) $\varphi_{-\mathcal{C}}(y) = 0$ khi và chỉ khi $y \in \operatorname{bd}(-\mathcal{C})$;
(e) $\varphi_{-\mathcal{C}}(y_1 + y_2) \le \varphi_{-\mathcal{C}}(y_1) + \varphi_{-\mathcal{C}}(y_2)$;
(f) $\mathcal{C}$ là lồi thì
$$y_1 \preccurlyeq_u y_2 \Rightarrow \varphi_{-\mathcal{C}}(y_1) \le \varphi_{-\mathcal{C}}(y_2);$$
(g) nếu $\mathcal{C}$ là lồi và đặc thì
$$y_1 \prec_u y_2 \Rightarrow \varphi_{-\mathcal{C}}(y_1) < \varphi_{-\mathcal{C}}(y_2).$$

Định nghĩa 3.2. (Jiménez et al., 2018) Hàm số $\mathcal{D}: \mathcal{P}(\mathbb{Y}) \times \mathcal{P}(\mathbb{Y}) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ được định nghĩa như sau

$$\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \sup_{m \in \mathcal{M}} \inf_{n \in \mathcal{N}} \varphi_{-\mathcal{C}}(m-n).$$

Ví dụ 3.2. Cho $\mathbb{Y} = \mathbb{R}, \mathcal{C} = -\mathbb{R}_+, \mathcal{M} = \{3;5\}$ và $\mathcal{N} = \{-1;2\}$. Khi đó, $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = -5$.

Bổ đề 3.2. (Jiménez et al., 2020) Cho $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Y})$. Khi đó,

(a) $\mathcal{M}_1 \preccurlyeq_u \mathcal{M}_2$ suy ra $\mathcal{D}(\mathcal{M}_1, \mathcal{N}) \le \mathcal{D}(\mathcal{M}_2, \mathcal{N})$;
(b) nếu $\mathcal{C}$ là lồi, đặc và $\mathcal{M}_1, \mathcal{N}$ là các tập $(-\mathcal{C})$-compact thì
$$\mathcal{M}_1 \prec_u \mathcal{M}_2 \Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{M}_1, \mathcal{N}) < \mathcal{D}(\mathcal{M}_2, \mathcal{N});$$
(c) nếu $\mathcal{N}$ là $(-\mathcal{C})$-chính thường thì $\mathcal{D}(\mathcal{N}, \mathcal{N}) = 0$.

Bổ đề 3.3. (Jiménez et al., 2020) Cho $\mathcal{C}$ là nón lồi, đặc và $\mathcal{M}, \mathcal{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Y})$. Nếu $\mathcal{D}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) < 0$ thì $\mathcal{M} \prec_u \mathcal{N}$. Chiều ngược lại cũng đúng nếu $\mathcal{M}$ là $(-\mathcal{C})$-compact.

Bổ đề 3.4. (Huerga et al., 2021) Cho $\mathcal{C}$ là một nón lồi. Khi đó, nếu $\mathcal{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Y})$ là $(-\mathcal{C})$-lồi thì $\mathcal{D}(\cdot, \mathcal{N})$ là lồi trong $\mathcal{P}(\mathbb{Y})$.

Cho ánh xạ đa trị $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$. Được thúc đẩy bởi Huerga et al., (2021), song hàm $\xi: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ được định nghĩa bởi

$$\xi(x,y) := \mathcal{D}\big(G(x), G(y)\big), \forall x, y \in \mathbb{X}.$$

Tiếp theo, các tính chất quan trọng của hàm ξ được nghiên cứu.

Bổ đề 3.5. (Huerga et al., 2021) Cho $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ là một ánh xạ đa trị và $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$. Khi đó, ξ là liên tục trong $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$, nếu G là $(-\mathcal{C})$-liên tục và có giá trị $(-\mathcal{C})$-compact trong $\mathcal{X}$.

Bổ đề 3.6. Cho $\mathcal{C}$ là một nón lồi, $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$ và ánh xạ đa trị $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ có giá trị $(-\mathcal{C})$-lồi trong $\mathcal{X}$. Khi đó, với mỗi $x \in \mathcal{X}$, các khẳng định sau là đúng.

(a) $\xi(\cdot, x)$ là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn trong $\mathcal{X}$ nếu $\mathcal{X}$ là tập lồi và G là $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn trong $\mathcal{X}$.

(b) $\xi(\cdot,x)$ là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathcal{X}$ nếu $\mathcal{X}$ là tập liên thông cung và G là $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo cung trong $\mathcal{X}$.

(c) $\xi(\cdot,x)$ là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông trong $\mathcal{X}$ nếu $\mathcal{X}$ là tập liên thông và G là $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông trong $\mathcal{X}$.

Chứng minh. (a) Vì G là $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn trong $\mathcal{X}$ nên với mọi $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ và với mỗi $\lambda \in [0,1]$, tồn tại $\mu \in [0,1]$ sao cho

$$G\left(\mathcal{L}_{x_1,x_2}(\lambda)\right) \preccurlyeq_u (1-\mu)G(x_1) + \mu G(x_2).$$

Áp dụng Bổ đề 3.2 (b) và Bổ đề 3.4, ta có

$$\mathcal{D}\left(G\left(\mathcal{L}_{x_1,x_2}(\lambda)\right), G(x)\right)$$
$$\leq (1-\mu)\mathcal{D}\big(G(x_1), G(x)\big) + \mu\mathcal{D}\big(G(x_1), G(x)\big).$$

Nghĩa là

$$\xi\big(\mathcal{L}_{x_1,x_2}(\lambda), x\big) \leq (1-\mu)\xi(x_1,x) + \mu\xi(x_1,x).$$

Vậy $\xi(\cdot,x)$ là $\mathbb{R}_+$-tựa lồi tự nhiên theo đoạn trong $\mathcal{X}$. Sử dụng kỹ thuật chứng minh tương tự như trên, khẳng định (b) và (c) cũng được chứng minh. ■

4. TÍNH LIÊN THÔNG CỦA TẬP NGHIỆM BÀI TOÁN TỐI ƯU TẬP

Cho $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ như mục 2 và $\mathcal{C}$ là một nón đặc trong $\mathbb{Y}$. Khi đó, bài toán tối ưu tập được quan tâm như sau:

$$\text{(SOP)} \min G(x) \text{ với } x \in \mathcal{X},$$

với $G: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ là một ánh xạ đa trị và $\mathcal{X}$ là một tập con khác rỗng của $\mathbb{X}$.

Định nghĩa 4.1. Một điểm $x_0 \in \mathcal{X}$ được gọi là *nghiệm hữu hiệu yếu* của bài toán (SOP) nếu với mọi $z \in \mathcal{X}$,

$$G(z) \not\prec_u G(x_0).$$

Tập nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán (SOP) được ký hiệu bởi $\text{WEff}(F, \mathcal{X})$.

Bổ đề sau đây đóng vai trò quan trọng trong quá trình khảo sát tính liên thông cho tập nghiệm của bài toán đang xét.

Bổ đề 4.1. (Khan et al., 2016) Giả sử rằng $\mathcal{X}$ là tập con liên thông của $\mathbb{X}$ và ánh xạ đa trị $W: \mathbb{X} \rightrightarrows \mathbb{Y}$ là nửa liên tục trên có giá trị liên thông trong $\mathcal{X}$. Khi đó, $W(\mathcal{X})$ là liên thông.

Với mỗi $a \in \mathcal{X}$, ta đặt

$$W(a) := \{x \in \mathcal{X} : \xi(x,a) \geq \xi(z,a), \forall z \in \mathcal{X}\}.$$

Khi đó, ta thiết lập được một biểu diễn vô hướng của tập nghiệm hữu hiệu yếu đối với bài toán (SOP).

Định lý 4.1. Cho $\mathcal{C}$ là một nón lồi. Giả sử rằng G có giá trị $(-\mathcal{C})$-compact. Khi đó,

$$\text{WEff}(G, \mathcal{X}) = \cup_{a\in\mathcal{X}} W(a).$$

Chứng minh. ($\subset$) Lấy $\bar{x} \in \text{WEff}(G, \mathcal{X})$ bất kì. Với mọi $z \in \mathcal{X}$, ta có

$$G(z) \not\prec_u G(\bar{x}),$$

điều này cùng với Bổ đề 3.2 (c) và Bổ đề 3.3 dẫn đến

$$\mathcal{D}\big(G(z), G(\bar{x})\big) \geq 0 = \mathcal{D}\big(G(\bar{x}), G(\bar{x})\big),$$

với mọi $x \in \mathcal{X}$. Do đó, $\xi(z,\bar{x}) \geq \xi(\bar{x},\bar{x})$, nên $\bar{x} \in W(\bar{x})$.

($\supset$) Lấy bất kì $\bar{x} \in \cup_{a\in\mathcal{X}} W(a)$, tồn tại $a_0 \in \mathcal{X}$ sao cho $\bar{x} \in W(a_0)$, nghĩa là với mọi $z \in \mathcal{X}$, thì

$$\xi(z, a_0) \geq \xi(\bar{x}, a_0). \tag{4.1}$$

Giả sử $\bar{x} \notin \text{WEff}(G, \mathcal{X})$, ta tìm được $\hat{z} \in \mathcal{X}$ thỏa mãn

$$G(\hat{z}) \prec_u G(\bar{x}).$$

Từ Bổ đề 3.2 (b), ta suy ra $\xi(\hat{z}, a_0) < \xi(\bar{x}, a_0)$, điều này là mâu thuẫn với (4.1). ■

Ngay sau đây, kết quả chính của bài báo này được trình bày.

Định lý 4.2. Cho $\mathcal{C}$ là nón lồi. Giả sử rằng

(i) $\mathcal{X}$ là tập con liên thông và compact của $\mathbb{X}$.

(ii) G là $(-\mathcal{C})$-liên tục, $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông có giá trị $(-\mathcal{C})$-lồi và $(-\mathcal{C})$-compact trong $\mathcal{X}$.

Khi đó, $\text{WEff}(G, \mathcal{X})$ liên thông.

Chứng minh. Từ Định lý 4.1 ta có $\text{WEff}(G, \mathcal{X}) = \cup_{a\in\mathcal{X}} W(a)$. Khi đó, ta cần kiểm tra các bước như sau

Bước 1. *$W(a)$ khác rỗng với mọi $a \in \mathcal{X}$.*

Do G là $(-\mathcal{C})$-liên tục nên áp dụng Bổ đề 3.5 ta được $\xi(\cdot, a)$ là liên tục và vì vậy $\xi(\cdot, a)$ đạt giá trị nhỏ nhất trên tập compact $\mathcal{X}$. Vậy $W(a)$ là tập khác rỗng với mọi $a \in \mathcal{X}$.

Bước 2. $W(a)$ là liên thông với mọi $a \in \mathcal{X}$.

Với mọi $x_1, x_2 \in W(a)$ và $z \in \mathcal{X}$, ta được

$$\xi(z,a) \geq \xi(x_1,a) \text{ và } \xi(z,a) \geq \xi(x_2,a).$$

Điều này cùng với tính $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông của G và Bổ đề 3.6 (c) suy ra luôn có một tập liên thông S_{x_1,x_2} chứa hai điểm x_1, x_2 thỏa mãn với mỗi $\hat{x} \in \mathcal{S}_{x_1,x_2}$, có một $\mu \in [0,1]$ sao cho

$$\xi(\hat{x},a) \leq (1-\mu)\xi(x_1,a) + \mu\xi(x_2,a)$$
$$\leq (1-\mu)\xi(z,a) + \mu\xi(z,a) = \xi(z,a),$$

với mọi $z \in \mathcal{X}$. Do đó, $\hat{x}$ là một phần tử của $W(a)$ với mọi $\hat{x} \in \mathcal{S}_{x_1,x_2}$, nên $\mathcal{S}_{x_1,x_2} \subset W(a)$ và vì vậy $W(a)$ liên thông.

Bước 3. *$W: \mathcal{X} \rightrightarrows \mathcal{X}$ là usc trong $\mathcal{X}$.*

Giả sử tồn tại $a_0 \in \mathcal{X}$ sao cho W không usc tại a_0. Khi đó, tồn tại một lân cận $\mathcal{U}$ của $W(a_0)$, dãy $\{a_n\}$ hội tụ về a_0 và $x_n \in W(a_n)$ nhưng $x_n \notin \mathcal{U}$ với mọi n. Từ tính compact của $\mathcal{X}$, ta giả sử rằng x_n hội tụ về $x_0 \in \mathcal{X}$. Nếu $x_0 \notin W(a_0)$, thì tồn tại $z_0 \in \mathcal{X}$ sao cho

$$\xi(z_0,a_0) < \xi(x_0,a_0). \qquad (4.2)$$

Vì $x_n \in W(a_n)$, ta có

$$\xi(z_0,a_n) \geq \xi(x_n,a_n).$$

Điều này cùng với tính $(-\mathcal{C})$-liên tục của G và Bổ đề 3.5 suy ra

$$\xi(z_0,a_0) \geq \xi(x_0,a_0),$$

biểu thức này mâu thuẫn với (4.2). Vì vậy, $x_0 \in W(a_0)$, điều này vô lý vì $x_n \notin \mathcal{U}$ và $\mathcal{U}$ là tập mở, nên W là usc trong $\mathcal{X}$.

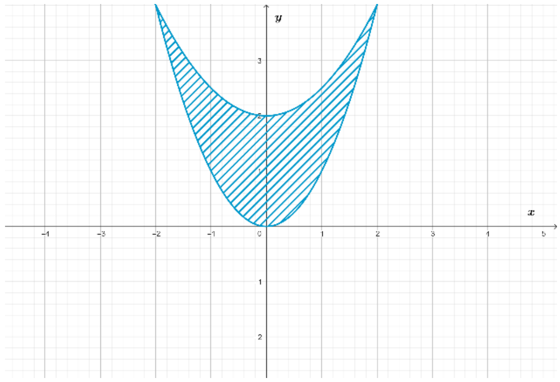
Bước 4. WEff$(F,\mathcal{X})$ *liên thông.*

Từ Bước 1 và 2, ta thấy rằng $W(a)$ khác rỗng và liên thông với bất kì $a \in \mathcal{X}$. Từ Định lý 4.1 ta được WEff$(G,\mathcal{X})$ $=\cup_{a\in\mathcal{X}} W(a)$. Theo Bước 3, ta thu được W là usc trong $\mathcal{X}$. Áp dụng Bổ đề 4.1 ta có WEff$(G,\mathcal{X})$ liên thông. ■

Nhận xét 4.1. Bằng kỹ thuật tương tự và sử dụng hàm khoảng cách định hướng Hiriart-Urruty mở rộng $\mathbb{D}^{si}$ (xem Huerga et al., 2021), các kết quả tương tự cho bài tối ưu tập với quan hệ thứ tự l cũng đạt được. Hơn thế nữa, Han (2020) đã sử dụng điều kiện $\mathcal{C}$-lồi của hàm mục tiêu để thiết lập điều kiện đủ cho tính liên thông của tập nghiệm yếu đối với bài toán tối ưu tập. Trong khi Định lý 4.2 đã sử dụng điều kiện $\mathcal{C}$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông nên kết quả này cải tiến hơn Định lý 4.1 trong Han, (2020).

Ví dụ 4.1. Cho $\mathbb{X} = \mathbb{Y} = \mathbb{R}^2, \mathcal{X} = \{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 \leq x_2 \leq 0.5x_1^2 + 2\}, \mathcal{C} = \mathbb{R}^2_+,\ Q = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y_1, y_2 \leq 1\}$ và $G(x): \mathbb{R}^2 \rightrightarrows \mathbb{R}^2$ được định nghĩa bởi

$$G(a) = \left((x_1x_2)^2, \left||a|\right|\right) + Q, \forall a = (x_1,x_2).$$



Hình 4.1. Tập $\mathcal{X}$ liên thông nhưng không lồi.

Khi đó, $\mathcal{X}$ là tập compact và liên thông nhưng không lồi. Hơn nữa, G là $(-\mathbb{R}^2_+)$-liên tục có giá trị $(-\mathbb{R}^2)$-lồi và $(-\mathbb{R}^2_+)$-compact trong $\mathcal{X}$. Theo Định lý 4.2, ta chỉ cần kiểm tra tính $\mathbb{R}^2_+$-tựa lồi tự nhiên theo nghĩa liên thông của G. Lấy hai điểm bất kỳ $\hat{a} = (\hat{x}_1,\hat{x}_2)$ và $\bar{a} = (\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ trong $\mathcal{X}$. Khi đó, với $a_0 = (0,0)$ ta xét tập liên thông

$$\mathcal{S}_{\hat{a},\bar{a}} = \mathcal{T}_{\hat{a},a_0} \cup \mathcal{T}_{a_0,\bar{a}}.$$

Kế tiếp, với mỗi $a \in \mathcal{S}_{\hat{a},\bar{a}}$, ta sẽ luôn tìm được $\mu \in [0,1]$ thỏa mãn

$$G(a) \preccurlyeq_u (1-\mu)G(\hat{a}) + \mu G(\bar{a}). \qquad (4.3)$$

Thật vậy, xét hai trường hợp:

Trường hợp 1. Nếu $a \in \mathcal{T}_{\hat{a},a_0}$, thì tồn tại số $r \in [0,1]$ sao cho $a = r\hat{a}$. Khi đó,

$$G(a) = \left((r^2\hat{x}_1\hat{x}_2)^2, r\left||\hat{a}|\right|\right) + rQ$$
$$\preccurlyeq_u \left((\hat{x}_1\hat{x}_2)^2, \left||\hat{a}|\right|\right) + Q = G(\hat{a}).$$

Điều này dẫn đến (4.3) đúng với $\mu = 0$.

Trường hợp 2. Nếu $a \in \mathcal{T}_{a_0,\bar{a}}$, thì tồn tại số $s \in [0,1]$ sao cho $a = s\bar{a}$. Do đó,

$$G(a) = \left((s^2\bar{x}_1\bar{x}_2)^2, s\left||\bar{a}|\right|\right) + sQ$$
$$\preccurlyeq_u \left((\bar{x}_1\bar{x}_2)^2, \left||\bar{a}|\right|\right) + Q = G(\bar{a}).$$

Từ biểu thức trên, ta có (4.3) đúng khi $\mu = 1$. Vậy WEff$(G,\mathcal{X})$ liên thông.

Khi đó, tất cả các giả thiết của Định lý 4.2 được thỏa mãn trong khi các kết quả của Han (2020) không thể áp dụng vì $\mathcal{X}$ là không lồi.

Nhận xét 4.2. Nếu hàm mục tiêu là đơn trị thì kết quả của Định lý 4.2 trùng với Định lý 5.2 trong Anh et al. (2022). Chính vì thế, kết quả của bài báo này tổng quát hơn kết quả của Anh et al. (2022).

5. KẾT LUẬN

Tính liên thông cho tập nghiệm hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu tập với giả thiết không sử dụng bất kì điều kiện nào về tính lồi đã được nghiên cứu thông qua các đặc trưng của hàm vô hướng hóa phi tuyến dạng Hiriart-Urruty và dạng mở rộng của nó. Cách tiếp cận và các kết quả đạt được là mới và khác với các kết quả đã có. Hơn nữa, bằng cách điều chỉnh thích hợp, các tiếp cận trong này cũng được dùng để xây dựng điều kiện đủ cho tính liên thông của các tập nghiệm hữu hiệu khác trong tối ưu không lồi.

LỜI CẢM TẠ

Bài báo được tài trợ bởi đề tài nghiên cứu của Trường Đại học Cần Thơ, mã số: TSV2023-79.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Alonso, M., & Rodríguez-Marín, L. (2005). Set-relations and optimality conditions in set-valued maps. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *63*(8), 1167-1179. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.06.002

Anh, L. Q., Anh. N. T., Duoc, P. T., Khanh, L. T. V., & Thu, P. T. A. (2022a). The connectedness of weakly and strongly efficient solution sets of nonconvex vector equilibrium problems. *Applied Set-Valued Analysis and Optimization*, *4*(1), 109-127. https://doi.org/10.23952/asvao.4.2022.1.08

Anh, L. Q., Duoc, P. T., & Duong, T. T. T. (2022b). Connectedness properties of the efficient sets and the nondominated sets to vector optimization problems. *Optimization Letters*, 1-12. https://doi.org/10.1007/s11590-021-01841-x

Anh, N. T., Dược, P. T., Khánh, L. T. V., & Thư, P. T. A. (2022). Tính liên thông của tập nghiệm hữu hiệu yếu cho bài toán tối ưu vector không lồi. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ*, *58*(Giáo dục Đồng bằng sông Cửu Long), 1-9. https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2022.145

Araya, Y. (2012). Four types of nonlinear scalarizations and some applications in set optimization. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *75*(9), 3821-3835. https://doi.org/10.1016/j.na.2012.02.004

Avriel, M., & Zang, I. (1980). Generalized arcwise-connected functions and characterizations of local-global minimum properties. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *32*(4), 407-425. https://doi.org/10.1007/BF00934030

Gong, X. (1994). Connectedness of the efficient solution set of a convex vector optimization in normed spaces. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *23*(9), 1105-1114. https://doi.org/10.1016/0362-546X(94)90095-7

Gong, X. H. (2007). Connectedness of the solution sets and scalarization for vector equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *133*(2), 151-161. https://doi.org/10.1007/s10957-007-9196-y

Gopfert, A., Riahi, H., Tammer, C., & Zalinéscu, C. (2003). *Variational Methods in Partially Ordered Spaces*. Springer. Berlin. https://doi.org/10.1007/b97568

Gutiérrez, C., Miglierina, E., Molho, E., & Novo, V. (2012). Pointwise well-posedness in set optimization with cone proper sets. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *75*(4), 1822-1833.

Han, Y., & Huang, N. J. (2016). Some characterizations of the approximate solutions to generalized vector equilibrium problems. *Journal of Industrial & Management Optimization*, *12*(3), 1135. https://doi.org/10.3934/jimo.2016.12.1135

Han, Y. (2020). Connectedness of weak minimal solution set for set optimization problems. *Operations Research Letters*, *48*(6), 820-826. https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.10.002

Hiriart-Urruty, J. B. (1979). Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces. *Mathematics of operations research*, *4*(1), 79-97. https://doi.org/10.1287/moor.4.1.79

Huerga, L., Jiménez, B., Novo, V., & Vílchez, A. (2021). Six set scalarizations based on the oriented distance: continuity, convexity and application to convex set optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, *93*(2), 413-436. https://doi.org/10.1007/s00186-020-00736-4

Jiménez, B., Novo, V., & Vílchez, A. (2018). A set scalarization function based on the oriented distance and relations with other set scalarizations. *Optimization*, *67*(12), 2091-2116. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1533554

Jiménez, B., Novo, V., & Vílchez, A. (2020). Characterization of set relations through extensions of the oriented distance. *Mathematical Methods of Operations Research*, *91*(1), 89-115. https://doi.org/10.1007/s00186-019-00661-1

Karuna, & Lalitha, C. S. (2019). External and internal stability in set optimization. *Optimization*, *68*(4), 833-852. https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1556663

Kassay, G., & Radulescu, V. (2018). *Equilibrium problems and applications*. Academic Press. https://doi.org/10.1016/C2015-0-06685-0

Khan, A. A., Tammer, C., & Zalinescu, C. (2016). *Set-valued optimization*. Springer-Verlag Berlin An. https://doi.org/10.1007/978-3-642-54265-7

Khoshkhabar-amiranloo, S. (2019). Characterizations of generalized Levitin–Polyak well-posed set optimization problems. Optimization Letters, *13*(1), 147-161. https://doi.org/10.1007/s11590-018-1258-6

Kuroiwa, D. (1998). The Natural Criteria in Set-Valued Optimization (NONLINEAR ANALYSIS AND CONVEX ANALYSIS). *数理解析研究所講究*, *1031*, 85-90.

Kuroiwa, D. (2003). Existence theorems of set optimization with set-valued maps. *Journal of Information and Optimization sciences*, *24*(1), 73-84. https://doi.org/10.1080/02522667.2003.10699556

Luc, D. T. (1989). *Theory of vector optimization*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-50280-4

Qiu, Q. S., & Yang, X. M. (2012). Connectedness of Henig weakly efficient solution set for set-valued optimization problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *152*(2), 439-449. https://doi.org/10.1007/s10957-011-9906-3

Rockafellar, R. T. (1970). *Convex analysis* (Vol. 18). Princeton university press.

Warburton, A. R. (1983). Quasiconcave vector maximization: connectedness of the sets of Pareto-optimal and weak Pareto-optimal alternatives. *Journal of optimization theory and applications, 40*(4), 537-557. https://doi.org/10.1007/BF00933970

Xu, Y. D., & Li, S. J. (2014). Continuity of the solution set mappings to a parametric set optimization problem. *Optimization Letters*, *8*(8), 2315-2327. https://doi.org/10.1007/s11590-014-0738-6