



DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.108

## VI PHÂN SUY RỘNG TRONG ĐIỀU KHIỂN TỐI ƯU CÓ THAM SỐ VỚI RÀNG BUỘC BIÊN TRƠN

Nguyễn Thành Quý<sup>1\*</sup>, Võ Thị Thúy Duy<sup>2</sup>, Mạc Lê Chí Đạo<sup>3</sup> và Đào Duy Phúc<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Bộ môn Toán học, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

<sup>2</sup>Lớp cao học Toán Giải tích K27, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

<sup>3</sup>Lớp cao học Toán Giải tích K28, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

<sup>4</sup>Lớp cao học Toán Giải tích K26, Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

\*Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Thành Quý (email: ntqui@ctu.edu.vn)

### Thông tin chung:

Ngày nhận bài: 21/05/2022

Ngày nhận bài sửa: 16/06/2022

Ngày duyệt đăng: 20/06/2022

### Title:

Generalized differentiation in parametric optimal control with smooth boundary constraints

### Từ khóa:

Dưới vi phân suy rộng, điều khiển tối ưu, đối đạo hàm, hàm giá trị tối ưu, phương trình đạo hàm riêng

### Keywords:

Coderivative, generalized subdifferential, marginal function, partial differential equation, optimal control

### ABSTRACT

The article obtains some new results in the research direction of differential stability for the parametric optimal control problem governed by semilinear elliptic partial differential equations with smooth boundary constraints. The new results of the article consist of exact formulas for computing the Fréchet coderivative and the Mordukhovich coderivative of the constraint operator with perturbed smooth boundary constraint set, and a formula for computing/estimating the Fréchet subdifferential (the regular subdifferential) of the marginal function of the parametric optimal control problem with a smooth boundary constraint set.

### TÓM TẮT

Hướng nghiên cứu mới của bài viết là sự ổn định vi phân của bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính với ràng buộc biên trơn. Các kết quả mới của bài báo bao gồm các công thức tính toán chính xác đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc với tập ràng buộc biên trơn có nhiễu, và công thức tính toán/đánh giá dưới vi phân Fréchet (dưới vi phân chính quy) của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc biên trơn.

## 1. GIỚI THIỆU

Hàm giá trị tối ưu và ánh xạ nghiệm của các bài toán tối ưu phụ thuộc tham số đóng vai trò quan trọng trong giải tích biến phân, lý thuyết tối ưu, điều khiển tối ưu nên đã thu hút được nhiều chuyên gia quan tâm nghiên cứu như: Mordukhovich (2006a, 2006b), Mordukhovich et al. (2009), Mordukhovich (2018), Quý (2020), Quý and Wachsmuth (2020), Quý và Phúc (2022). Trong trường hợp tổng quát, hàm giá trị tối ưu không khả vi và ánh xạ nghiệm

thường là ánh xạ đa trị, vì vậy các khái niệm vi phân cổ điển không thể áp dụng cho các đối tượng này để khảo sát các bài toán tối ưu có tham số. Điều này dẫn đến việc sử dụng các khái niệm vi phân theo nghĩa suy rộng cho hàm giá trị tối ưu và ánh xạ nghiệm của các bài toán tối ưu có tham số là một yêu cầu tất yếu.

Trong bài báo này, các tính chất vi phân suy rộng cho hàm giá trị tối ưu của bài toán  $P(e)$  được khảo sát trong điều khiển tối ưu có tham số cho phương

trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính với tập ràng buộc biên tron. Một số mô hình bài toán điều khiển tối ưu cho phương trình đạo hàm riêng elliptic có liên quan đến bài toán  $P(e)$  nhưng có ràng buộc điểm được khảo sát trong Casas et al. (2002), Casas et al. (2008), Casas (2012), Qui and Wachsmuth (2018, 2019, 2020), Qui (2020), Qui và Phúc (2022), và trong sách chuyên khảo Tröltzsch (2010). Hiện nay, chưa có bài báo nào khảo sát các tính chất vi phân suy rộng của hàm giá trị tối ưu của các bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình đạo hàm riêng với ràng buộc biên tron. Đây là bài báo đầu tiên nghiên cứu về các tính chất vi phân suy rộng của hàm giá trị tối ưu của bài toán  $P(e)$  với ràng buộc biên tron. Bài toán điều khiển tối ưu  $P(e)$  yêu cầu tìm min của hàm mục tiêu  $J: L^2(\Omega) \times E \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi

$$J(u, e) = \int_{\Omega} L(x, y_{u+e_Y}(x)) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \zeta(x)(u + e_Y)^2(x) dx + \int_{\Omega} e_J(x) y_{u+e_Y}(x) dx$$

thỏa điều kiện ràng buộc biên tron sau:

$$u \in L^2(\Omega), \quad \psi(u, e_P) \leq 0, \quad (1.1)$$

trong đó  $y_{u+e_Y}$  là nghiệm yếu của bài toán Dirichlet (phương trình trạng thái) dưới đây

$$\begin{cases} Ay + f(x, y) = u + e_Y & \text{trong } \Omega \\ y = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases} \quad (1.2)$$

ở đây,  $A$  là toán tử vi phân elliptic bậc hai có dạng

$$Ay(x) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} y(x) \right),$$

với các hàm hệ số  $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$  thỏa mãn

$$\lambda_A \|\gamma\|^2 \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij}(x) \gamma_i \gamma_j,$$

với mọi  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N) \in \mathbb{R}^N$ , với h.h.  $x \in \Omega$ , với hằng số  $\lambda_A > 0$ , và  $\psi: L^2(\Omega) \times L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm thuộc lớp  $C^2$  với  $p \in (1, +\infty)$  và  $\zeta(\cdot)$  là một hàm cho trước. Ký hiệu

$$E = L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^p(\Omega)$$

là không gian tham số và  $e = (e_Y, e_J, e_P) \in E$  là tham số của bài toán  $P(e)$ , trong đó chuẩn của tham số  $e \in E$  được định nghĩa bởi

$$\|e\|_E = \|e\|_{L^2(\Omega)} + \|e\|_{L^2(\Omega)} + \|e\|_{L^p(\Omega)}.$$

Ký hiệu  $\mathcal{G}_{ad}(e)$  là tập các điều khiển chấp nhận được của bài toán  $P(e)$ . Như vậy, toán tử ràng buộc của bài toán  $P(e)$  là toán tử đa trị  $\mathcal{G}_{ad}: E \rightarrow 2^{L^2(\Omega)}$  được xác định bởi

$$\mathcal{G}_{ad}(e) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \psi(u, e_P) \leq 0\}. \quad (1.3)$$

Hàm giá trị tối ưu (hàm marginal) của bài toán  $P(e)$  là hàm  $\mu: E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  được xác định bởi

$$\mu(e) = \inf_{u \in \mathcal{G}_{ad}(e)} J(u, e), \quad (1.4)$$

và ánh xạ nghiệm  $S: E \rightarrow 2^{L^\infty(\Omega)}$  của bài toán  $P(e)$  được xác định bởi

$$S(e) = \{u \in U_{ad}(e) \mid \mu(e) = J(u, e)\}. \quad (1.5)$$

## 2. TỒN TẠI NGHIỆM, TÍNH KHẢ VI

Ở Mục 2, kết quả nghiên cứu chính là sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) và sự tồn tại nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu  $P(e)$ . Nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) được định nghĩa trong Tröltzsch (2010).

Cho tham số  $\bar{e} \in E$ , một điều khiển chấp nhận được  $\bar{u} \in \mathcal{G}_{ad}(\bar{e})$  được gọi là điều khiển tối ưu (hay nghiệm) của bài toán  $P(\bar{e})$  ứng với trạng thái tối ưu  $\bar{y} = G(\bar{u}) \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  nếu

$$J(\bar{u}, \bar{e}) \leq J(u, \bar{e}), \quad \forall u \in \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}).$$

Để khảo sát sự tồn tại nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu  $P(e)$  cùng các vấn đề có liên quan ta cần đến các giả thiết sau đây:

(A1) Tập  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  (với  $N = 1, 2, 3$ ) là một miền mở và bị chặn trong  $\mathbb{R}^N$  với biên Lipschitz  $\Gamma$ . Tập  $\mathcal{G}_{ad}(e)$  lồi và bị chặn với mọi  $e \in E$ .

(A2) Hàm  $f: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm Carathéodory (tức là,  $f(\cdot, y)$  đo được với mọi  $y \in \mathbb{R}$  và  $f(x, \cdot)$  liên tục với h.h.  $x \in \Omega$ ) thuộc lớp hàm  $C^2$  đối với biến thứ hai và thỏa mãn

$$f(\cdot, 0) \in L^2(\Omega), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \geq 0 \text{ với h.h. } x \in \Omega,$$

và với mọi  $M > 0$  tồn tại  $C_{f,M} > 0$  sao cho

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right| + \left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) \right| \leq C_{f,M}$$

với h.h.  $x \in \Omega$  và  $|y| \leq M$ ,

$$\left| \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_2) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_1) \right| \leq C_{f,M} |y_2 - y_1|$$

với h.h.  $x \in \Omega$  và  $|y_1|, |y_2| \leq M$ .

(A3) Hàm  $L: \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm Carathéodory thuộc lớp  $C^2$  đối với biến thứ hai. Hơn nữa, ta cũng có  $L(\cdot, 0) \in L^1(\Omega)$  và với mọi  $M > 0$  tồn tại hằng số  $C_{L,M} > 0$  và  $\psi_M \in L^2(\Omega)$  sao cho

$$\left| \frac{\partial L}{\partial u}(x, y) \right| \leq \psi_M(x), \quad \left| \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y) \right| \leq C_{L,M},$$

với h.h.  $x \in \Omega$  và  $|y| \leq M$ , và

$$\left| \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_1) - \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y_2) \right| \leq C_{L,M} |y_2 - y_1|$$

với h.h.  $x \in \Omega$  và  $|y_1|, |y_2| \leq M$ .

Các giả thiết nêu trên là các giả thiết căn bản và thường được sử dụng trong lý thuyết điều khiển tối ưu. Dựa trên hệ thống các giả thiết này, sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) và sự tồn tại nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu  $P(e)$  được thiết lập.

**Định lý 2.1.** Giả sử các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn. Khi đó, phương trình trạng thái (1.2) luôn có nghiệm yếu duy nhất.

**Chứng minh.** Việc chứng minh sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) được lập luận tương tự như chứng minh Tröltzsch (2010) (Theorem 4.4).  $\square$

**Định lý 2.2.** Giả sử các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn. Khi đó, với mọi  $e \in E$  sao cho tập  $\mathcal{G}_{ad}(e)$  khác rỗng, bài toán  $P(e)$  luôn có nghiệm.

**Chứng minh.** Sự tồn tại nghiệm (điều khiển tối ưu) của bài toán  $P(e)$  được lập luận tương tự như chứng minh Tröltzsch (2010) (Theorem 4.15).  $\square$

Hệ thống các giả thiết (A1)–(A3) được sử dụng trong Định lý 2.1 và Định lý 2.2 cũng đảm bảo cho tính khả vi của ánh xạ nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) và hàm mục tiêu của bài toán  $P(e)$ . Ký hiệu  $G(\cdot)$  là ánh xạ nghiệm yếu của (1.2). Tính khả vi của  $G(\cdot)$  và hàm mục tiêu  $J(\cdot, \cdot)$  của bài toán  $P(e)$  được khảo sát sau đây.

**Định lý 2.3.** Giả sử các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn. Khi đó, ánh xạ nghiệm yếu của (1.2),  $G: L^2(\Omega) \rightarrow H_0^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$  với  $G(w) = y_w$ , thuộc

lớp hàm  $C^2$ . Hơn nữa, với mọi  $u, v, e_Y \in L^2(\Omega)$ ,  $z_{u+e_Y, v} = G'(u + e_Y)v$  là nghiệm yếu duy nhất của

$$\begin{cases} Az_{u+e_Y, v} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y, v} = v & \text{trong } \Omega \\ z_{u+e_Y, v} = 0 & \text{trên } \Gamma. \end{cases}$$

Với mọi  $u, v_1, v_2, e_Y \in L^2(\Omega)$ , ta có

$$z_{u+e_Y, v_1 v_2} = G''(u + e_Y)v_1 v_2$$

là nghiệm yếu duy nhất của

$$\begin{cases} Az_{u+e_Y, v_1 v_2} + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y, v_1 v_2} \\ + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y_{u+e_Y})z_{u+e_Y, v_1} z_{u+e_Y, v_2} = 0 & \text{trong } \Omega \\ z_{u+e_Y, v_1 v_2} = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases}$$

trong đó  $z_{u+e_Y, v_i} = G'(u + e_Y)v_i$  với  $i = 1, 2$ .

**Chứng minh.** Các kết quả phát biểu trong định lý được suy ra từ Casas et al. (2008) (Theorem 2.4); Qui và Phúc (2022) (Định lý 3.2); Casas and Mateos (2002).  $\square$

**Định lý 2.4.** Giả sử các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn. Khi đó, ánh xạ  $J(\cdot, e): L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  thuộc lớp  $C^2$ . Hơn nữa, với mọi  $u, v \in L^2(\Omega)$ , đạo hàm riêng  $J'_u(u, e)$  xác định bởi

$$J'_u(u + e_Y, e)v = \int_{\Omega} (\zeta(u + e_Y) + \varphi_{u,e})v dx$$

trong đó  $\varphi_{u,e}$  là nghiệm yếu duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} A^* \varphi + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_{u+e_Y})\varphi \\ = \frac{\partial L}{\partial y}(x, y_{u+e_Y}) + e_j & \text{trong } \Omega \\ \varphi = 0 & \text{trên } \Gamma, \end{cases}$$

trong đó  $y_{u+e_Y} = G(u + e_Y)$  và  $A^*$  là toán tử liên hợp của  $A$  xác định bởi

$$A^* \varphi(x) = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} \left( a_{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x) \right).$$

**Chứng minh.** Bằng cách thay thế  $u$  bởi  $u + e_Y$  trong Qui and Wachsmuth (2019) (Theorem 2.3) ta suy ra các kết quả được phát biểu trong định lý.  $\square$

### 3. ĐỐI ĐẠO HÀM CỦA $\mathcal{G}_{ad}: E \rightarrow 2^{L^2(\Omega)}$

Ở mục 3, mục tiêu nghiên cứu chính là thiết lập các công thức tính toán đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc

$\mathcal{G}_{ad}(\cdot)$ . Các công thức tính toán đối đạo hàm này đóng vai trò quan trọng trong việc thiết lập các công thức tính toán dưới vi phân suy rộng của hàm giá trị tối ưu  $\mu(\cdot)$  của bài toán  $P(e)$ .

Các khái niệm vi phân suy rộng trình bày dưới đây, bao gồm: đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich (2006a, 2006b, 2018). Cho không gian Banach  $X$ , hàm đa trị  $F: X \rightarrow 2^{X^*}$  và hàm thực mở rộng  $\sigma: X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ . Giới hạn trên theo dãy theo nghĩa Painlevé – Kuratowski của  $F$  khi  $u \rightarrow \bar{u}$  được xác định bởi

$$\begin{aligned} & \text{Limsup}_{u \rightarrow \bar{u}} F(u) \\ &= \left\{ u^* \in X^* \left| \begin{array}{l} \text{tồn tại } u_n \rightarrow \bar{u} \text{ và} \\ F(u_n) \ni u_n^* \rightarrow u^* \text{ theo tôpô } w^* \end{array} \right. \right\}. \end{aligned}$$

Với  $\epsilon \geq 0$ , tập các  $\epsilon$ -dưới gradient của hàm  $\sigma$  tại  $\bar{u} \in \text{dom } \sigma := \{u \in X | \sigma(u) < \infty\}$  được cho bởi

$$\begin{aligned} & \hat{\partial}_\epsilon \sigma(\bar{u}) \\ &= \left\{ u^* \left| \liminf_{u \rightarrow \bar{u}} \frac{u^* \in X^* \text{ thỏa mãn } \sigma(u) - \sigma(\bar{u}) - \langle u^*, u - \bar{u} \rangle}{\|u - \bar{u}\|} \geq -\epsilon \right. \right\}. \end{aligned}$$

Dưới vi phân Fréchet (dưới vi phân chính quy) của hàm  $\sigma$  tại  $\bar{u} \in \text{dom } \sigma$  được định nghĩa bởi

$$\hat{\partial} \sigma(\bar{u}) := \hat{\partial}_0 \sigma(\bar{u}).$$

Dưới vi phân Fréchet trên (dưới vi phân chính quy trên) của hàm  $\sigma$  tại  $\bar{u} \in \text{dom } \sigma$  được xác định bởi

$$\hat{\partial}^+ \sigma(\bar{u}) := -\hat{\partial}(-\sigma)(\bar{u}).$$

Dưới vi phân Mordukhovich (dưới vi phân qua giới hạn) của hàm  $\sigma$  tại  $\bar{u} \in \text{dom } \sigma$  được định nghĩa bởi

$$\partial \sigma(\bar{u}) := \text{Limsup}_{u \rightarrow \bar{u}, \epsilon \downarrow 0} \hat{\partial}_\epsilon \sigma(u)$$

và dưới vi phân qua giới hạn suy biến của hàm  $\sigma$  tại  $\bar{u} \in \text{dom } \sigma$  được cho bởi

$$\partial^\infty \sigma(\bar{u}) := \text{Limsup}_{u \rightarrow \bar{u}, \epsilon \downarrow 0, \lambda \downarrow 0} \lambda \hat{\partial}_\epsilon \sigma(u),$$

trong đó ký hiệu  $u \xrightarrow{\sigma} \bar{u}$  có nghĩa là  $u \rightarrow \bar{u}$  và  $\sigma(u) \rightarrow \sigma(\bar{u})$ .

Cho các không gian Banach  $X$  và  $W$ , đối đạo hàm Fréchet (đối đạo hàm chính quy) và đối đạo hàm Mordukhovich của ánh xạ đa trị  $F: X \rightarrow 2^W$  tại điểm  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \text{gph} F$  lần lượt là ánh xạ đa trị  $\hat{D}^*F(\bar{u}, \bar{v}): W^* \rightarrow 2^{X^*}$  xác định bởi

$$\begin{aligned} & \hat{D}^*F(\bar{u}, \bar{v})(v^*) \\ &= \{u^* \in X^* | (u^*, -v^*) \in \hat{N}((\bar{u}, \bar{v}); \text{gph} F)\}, \end{aligned}$$

và ánh xạ đa trị  $D^*F(\bar{u}, \bar{v}): W^* \rightarrow 2^{X^*}$  xác định bởi

$$\begin{aligned} & D^*F(\bar{u}, \bar{v})(v^*) \\ &= \{u^* \in X^* | (u^*, -v^*) \in N((\bar{u}, \bar{v}); \text{gph} F)\}, \end{aligned}$$

trong đó  $\text{gph} F$  là đồ thị của  $F$ ,  $\hat{N}((\bar{u}, \bar{v}); \text{gph} F)$  là nón pháp tuyến Fréchet (nón pháp tuyến chính quy) của  $\text{gph} F$  tại điểm  $(\bar{u}, \bar{v})$  định nghĩa bởi

$$\hat{N}((\bar{u}, \bar{v}); \text{gph} F) = \hat{\partial} \delta((\bar{u}, \bar{v}); \text{gph} F),$$

và  $N((\bar{u}, \bar{v}); \text{gph} F)$  là nón pháp tuyến Mordukhovich của  $\text{gph} F$  tại điểm  $(\bar{u}, \bar{v})$  định nghĩa bởi

$$N((\bar{u}, \bar{v}); \text{gph} F) = \partial \delta((\bar{u}, \bar{v}); \text{gph} F).$$

Trong trường hợp tổng quát, ta có

$$\hat{D}^*F(\bar{u}, \bar{v})(\cdot) \neq D^*F(\bar{u}, \bar{v})(\cdot),$$

trong một số trường hợp đặc biệt (chẳng hạn như đối với lớp hàm chính quy pháp tuyến) hai đối đạo hàm này bằng nhau. Ánh xạ đa trị  $F: X \rightarrow 2^W$  được gọi là *chính quy pháp tuyến* tại điểm  $(\bar{u}, \bar{v}) \in \text{gph} F$  nếu

$$\hat{D}^*F(\bar{u}, \bar{v})(v^*) = D^*F(\bar{u}, \bar{v})(v^*), \forall v^* \in W^*.$$

Định lý dưới đây thiết lập công thức tính toán các đối đạo hàm Fréchet và Mordukhovich của toán tử ràng buộc  $\mathcal{G}_{ad}(\cdot)$ . Đây là kết quả mới và là kết quả chính của mục này.

**Định lý 3.1.** *Giả sử các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn. Cho  $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}) \in \text{gph } \mathcal{G}_{ad}$ . Khi đó, ta có đẳng thức*

$$\begin{aligned} \hat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(u^*) &= D^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(u^*) \\ &= \left\{ (0, 0, \eta \nabla_{e_p} \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_p)) \right\} \end{aligned}$$

nếu  $u^* = -\eta \nabla_{u_e} \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_p)$  và  $\eta \in \mathbb{R}_+$ , nếu ngược lại ta có đẳng thức sau

$$\hat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(u^*) = D^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(u^*) = \emptyset.$$

**Chứng minh.** Đặt  $\Theta = (-\infty, 0]$  và xét hàm  $g(e, u) = g(e_e, e_j, e_p, u) := \psi(u, e_p)$ . Khi đó, đồ thị của  $\mathcal{G}_{ad}$  được biểu diễn như sau

$$\text{gph } \mathcal{G}_{ad} = \{(e, u) | \psi(u, e_p) \leq 0\},$$

Tức là,

$$\text{gph } \mathcal{G}_{ad} = g^{-1}(\Theta).$$

Theo Mordukhovich (2006a) (Corollary 1.15), ta thu được công thức biểu diễn của nón pháp tuyến Fréchet của  $\text{gph } \mathcal{G}_{ad}$  tại điểm  $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$  như sau

$$\begin{aligned} \hat{N}((\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); \text{gph } \mathcal{G}_{ad}) &= \hat{N}((\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); g^{-1}(\Theta)) \\ &= \nabla g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})^* \hat{N}(g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); \Theta). \end{aligned}$$

Áp dụng theo Mordukhovich (2006a) (Theorem 1.17) ta có công thức biểu diễn của nón pháp tuyến qua giới hạn của gph  $\mathcal{G}_{ad}$  tại điểm  $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$  sau đây

$$N((\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); \text{gph } \mathcal{G}_{ad}) = N((\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); g^{-1}(\Theta)) = \nabla g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})^* N(g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); \Theta).$$

Từ đây và do

$$\begin{aligned} \widehat{N}(g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); \Theta) &= N(g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); \Theta) \\ &= \begin{cases} \mathbb{R}_+, & \text{nếu } g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}) = 0, \\ \{0\}, & \text{nếu } g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}) < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

nên ta có

$$\begin{aligned} \widehat{N}((\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); \text{gph } \mathcal{G}_{ad}) &= N((\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); g^{-1}(\Theta)) \\ &= \begin{cases} \mathbb{R}_+ \nabla g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}), & \text{nếu } g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}) = 0, \\ \{0\}, & \text{nếu } g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}) < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Từ đây suy ra

$$\widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(u^*) = D^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(u^*)$$

và được biểu diễn bằng

$$\{e^* \in E^* | (e^*, -u^*) \in N((\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}); \text{gph } \mathcal{G}_{ad})\}.$$

Tập này có giá trị bằng

$$\{(0, 0, \eta \nabla_{e_p} \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_p))\}$$

khi  $u^* = -\eta \nabla_u \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_p)$  và  $\eta \in \mathbb{R}_+$ , và có giá trị bằng  $\emptyset$  nếu ngược lại. Chú ý rằng

$$\nabla g(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}}) = (\nabla_{e_p} \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_p), \nabla_u \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_p))$$

do cách định nghĩa hàm  $g$ .  $\square$

#### 4. ĐỐI VI PHÂN SUY RỘNG CỦA $\mu(\cdot)$

Dựa vào các công thức tính đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc  $\mathcal{G}_{ad}(\cdot)$  được thiết lập trong mục trước, mục này thiết lập các công thức tính/đánh giá dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu  $\mu(\cdot)$  của bài toán  $P(e)$ .

**Định lý 4.1.** Giả sử các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn và xét  $\bar{e} \in \text{dom } S$  và  $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$ . Khi đó, ta có

$$\widehat{\delta}\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}))$$

trong đó  $\mathcal{G}_{ad}: E \rightarrow 2^{L^2(\Omega)}$  là toán tử ràng buộc của bài toán  $P(e)$ . Hơn thế nữa, nếu ánh xạ nghiệm  $S: \text{dom } \mathcal{G}_{ad} \rightarrow 2^{L^2(\Omega)}$  có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại  $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$  thì

$$\widehat{\delta}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})).$$

**Chứng minh.** Phương pháp chứng minh định lý này tương tự như phương pháp chứng minh Quí et al. (2022) (Định lý 4.1), tuy nhiên toán tử ràng buộc

$$U_{ad}: E \rightarrow 2^{L^\infty(\Omega)}$$

và ánh xạ nghiệm

$$S: \text{dom } U_{ad} \rightarrow 2^{L^\infty(\Omega)}$$

trong Quí và Phúc (2022) (Định lý 4.1) được thay thế bởi toán tử ràng buộc

$$\mathcal{G}_{ad}: E \rightarrow 2^{L^2(\Omega)}$$

và ánh xạ nghiệm

$$S: \text{dom } \mathcal{G}_{ad} \rightarrow 2^{L^2(\Omega)}$$

của bài toán  $P(e)$ . Theo Mordukhovich et al. (2009) (Theorem 1) ta có

$$\widehat{\delta}\mu(\bar{e}) \subset \bigcap_{(u^*, e^*) \in \widehat{\delta}^+ J(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})} (e^* + \widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(u^*)).$$

Các giả thiết (A1)–(A3) đảm bảo cho hàm mục tiêu  $J(\cdot, \cdot): L^2(\Omega) \times E \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi Fréchet tại  $(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})$ . Do đó, ta có

$$\begin{aligned} \widehat{\delta}^+ J(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) &= \{J'(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\} \\ &= \{(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}), J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}))\}. \end{aligned}$$

Suy ra

$$\widehat{\delta}\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})).$$

Nếu  $S: \text{dom } \mathcal{G}_{ad} \rightarrow 2^{L^2(\Omega)}$  có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại  $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$  thì theo Mordukhovich et al. (2009) (Theorem 2) ta có

$$\widehat{\delta}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})).$$

Định lý đã được chứng minh.  $\square$

Trong phát biểu và chứng minh Định lý 4.1 có đề cập đến lát cắt Lipschitz trên địa phương. Khái niệm lát cắt Lipschitz trên địa phương được trình bày trong nghiên cứu của Mordukhovich et al. (2009).

**Định lý 4.2.** Giả sử các giả thiết (A1)–(A3) được thỏa mãn và xét  $\bar{e} = (\bar{e}_y, \bar{e}_j, \bar{e}_p) \in \text{dom } S$  và  $\bar{u}_{\bar{e}} \in S(\bar{e})$ . Khi đó, nếu

$$J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) = -\eta \nabla_u \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_p) \text{ với } \eta \geq 0,$$

thì ta có

$$\widehat{\delta}\mu(\bar{e}) \subset \left\{ \left( \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_y), \gamma_{\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_y}, \eta \nabla_{e_p} \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_p) \right) \right\},$$

nếu ngược lại ta có

$$\widehat{\delta}\mu(\bar{e}) = \emptyset.$$

Hơn nữa, nếu ánh xạ nghiệm  $S: \text{dom } \mathcal{G}_{ad} \rightarrow 2^{L^2(\Omega)}$  có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại điểm  $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$  thì

$$\hat{\delta}\mu(\bar{e}) = \left\{ \left( \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y}, \eta \nabla_{e_P} \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P) \right) \right\}.$$

**Chứng minh.** Dựa vào cấu trúc và các tính chất vi phân của hàm mục tiêu  $J(\cdot, \cdot)$  nêu trong Mục 2 ta thấy rằng với mọi  $\hat{e} = (\hat{e}_Y, \hat{e}_J, \hat{e}_P) \in E$  ta có

$$\begin{aligned} & J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})\hat{e} \\ &= \left( \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), \hat{e}_Y \right)_{L^2(\Omega)} + \left( y_{\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y}, \hat{e}_J \right)_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle \left( \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y}, 0 \right), \left( \hat{e}_Y, \hat{e}_J, \hat{e}_P \right) \rangle. \end{aligned}$$

Suy ra

$$J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) = \left( \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y}, 0 \right).$$

Theo Định lý 4.1 ta có

$$\hat{\delta}\mu(\bar{e}) \subset J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})),$$

trong đó theo Định lý 3.1 thì

$$\widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})) = \left\{ \left( 0, 0, \eta \nabla_{e_P} \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P) \right) \right\}.$$

Như vậy, ta thu được

$$\hat{\delta}\mu(\bar{e}) \subset \left\{ \left( \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y}, \eta \nabla_{e_P} \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P) \right) \right\}.$$

Nếu điều sau đây không thỏa mãn

$$J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) = -\eta \nabla_u \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P) \text{ với } \eta \geq 0,$$

thì theo Định lý 3.1 ta suy ra  $\hat{\delta}\mu(\bar{e}) = \emptyset$ .

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

Casas, E. (2012). Second order analysis for bang-bang control problems of PDEs. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 50(4), 2355–2372. <https://doi.org/10.1137/120862892>

Casas, E., & Mateos, M. (2002). Second order optimality conditions for semilinear elliptic control problems with finitely many state constraints. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 40(5), 1431–1454. <https://doi.org/10.1137/S0363012900382011>

Casas, E., de los Reyes, J. C., & Tröltzsch, F. (2008). Sufficient second-order optimality conditions for semilinear control problems with pointwise state constraints. *SIAM Journal on optimization*, 19(2), 616–643. <https://doi.org/10.1137/07068240X>

Mordukhovich, B. S. (2006a). *Variational analysis and generalized differentiation. I. Basic theory*. Springer-Verlag, Berlin.

Mordukhovich, B. S. (2006b). *Variational analysis and generalized differentiation. II. Applications*. Springer-Verlag, Berlin. <https://doi.org/10.1007/3-540-31246-3>

Hơn nữa, nếu  $S: \text{dom } \mathcal{G}_{ad} \rightarrow 2^{L^2(\Omega)}$  có một lát cắt Lipschitz trên địa phương tại điểm  $(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})$  thì theo Định lý 4.1 ta có

$$\hat{\delta}\mu(\bar{e}) = J'_e(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}) + \widehat{D}^* \mathcal{G}_{ad}(\bar{e}, \bar{u}_{\bar{e}})(J'_u(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e})).$$

Sử dụng đẳng thức này trong lập luận trên ta thu được công thức tính toán

$$\hat{\delta}\mu(\bar{e}) = \left\{ \left( \varphi_{\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}} + \zeta(\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y), y_{\bar{u}_{\bar{e}} + \bar{e}_Y}, \eta \nabla_{e_P} \psi(\bar{u}_{\bar{e}}, \bar{e}_P) \right) \right\}.$$

Định lý đã được chứng minh.  $\square$

## 5. KẾT LUẬN

Kết quả thực hiện đã mở ra một hướng nghiên cứu mới liên quan đến sự ổn định vi phân của bài toán điều khiển tối ưu có tham số cho phương trình vi phân đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính với ràng buộc biên trơn. Kết quả ban đầu thu được: (1) các công thức tính chính xác đối đạo hàm Fréchet và đối đạo hàm Mordukhovich của toán tử ràng buộc với tập ràng buộc biên trơn có nhiều, và (2) công thức tính/đánh giá dưới vi phân Fréchet của hàm giá trị tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu có tham số với ràng buộc biên trơn. Hướng phát triển của bài báo này là tính toán dưới vi phân Mordukhovich, dưới vi phân qua giới hạn suy biến, hoặc mở rộng mô hình bài toán với các cấu trúc ràng buộc biên trơn phức tạp hơn. Đây là một chủ đề nghiên cứu còn nhiều vấn đề mở và mang nhiều ý nghĩa khoa học.

Mordukhovich, B. S. (2018). *Variational analysis and applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92775-6>

Mordukhovich, B. S., Nam, N. M., & Yen, N. D. (2009). Subgradients of marginal functions in parametric mathematical programming. *Mathematical Programming*, 116(1-2), Ser. B, 369–396. <https://doi.org/10.1007/s10107-007-0120-x>

Qui, N. T. (2020). Subdifferentials of marginal functions of parametric bang–bang control problems. *Nonlinear Analysis*, 195, 111743, 13pp. <https://doi.org/10.1016/j.na.2020.111743>

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2018). Stability for bang-bang control problems of partial differential equations. *Optimization*, 67(12), 2157–2177. <https://doi.org/10.1080/02331934.2018.1522634>

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2019). Full stability for a class of control problems of semilinear elliptic partial differential equations. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 57(4),

3021–3045.

<https://doi.org/10.1137/17M1153224>

Qui, N. T., & Wachsmuth, D. (2020). Subgradients of marginal functions in parametric control problems of partial differential equations. *SIAM Journal on Optimization*, 30(2), 1724–1755. <https://doi.org/10.1137/18M1200956>

Quý, N. T., & Phúc, Đ. D. (2022). Vi phân suy rộng của hàm giá trị tối ưu trong điều khiển tối ưu có

tham số cho phương trình đạo hàm riêng elliptic. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ*, 58(1A), 87-94.

<https://doi.org/10.22144/ctu.jvn.2022.009>

Tröltzsch, F. (2010). *Optimal control of partial differential equations. Theory, methods and applications*. American Mathematical Society, Providence, RI. <https://doi.org/10.1090/gsm/112>