Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: ctujsvn.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2022.008

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG NGẪU NHIÊN

Nguyễn Hồng Quân*
Khoa Cơ bản 2, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông cơ sở tại thành phố Hồ Chí Minh
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Hồng Quân (email: hongquan@ptithcm.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 12/09/2021
Ngày nhận bài sửa: 22/10/2021
Ngày duyệt đăng: 26/02/2022

Title:
The existence of solutions for stochastic equilibrium problems

Từ khóa:
Bài toán cân bằng ngẫu nhiên, tồn tại nghiệm, tính tựa đơn điệu vòng quanh ngẫu nhiên

Keywords:
Random cyclic quasimonotonicity, stochastic equilibrium problem, the existence of solutions

ABSTRACT

The purpose of this paper is to study the existence of solutions for stochastic equilibrium problems. A new existence result is established based on using notion of random cyclic quasimonotonicity, without convexity assumptions. Some examples are also provided to show the advantages of the result.

TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng ngẫu nhiên. Một kết quả tồn tại mới được thiết lập trên cơ sở dùng khái niệm về tính tựa đơn điệu vòng quanh ngẫu nhiên, không dùng các giả thiết về tính lồi. Vài ví dụ được cung cấp nhằm chỉ ra sự thuận lợi của kết quả.

1. GIỚI THIỆU

Cho trước một tập không rỗng X và một song hàm $\Phi : X \times X \to \mathbb{R}$, bài toán cân bằng, kí hiệu bởi EP(Φ, X), được hiểu là:

Tìm điểm $\bar{x} \in X$ sao cho $\inf_{x' \in X} \Phi(\bar{x}, x') \geq 0$.

Nhiều bài toán trong lý thuyết tối ưu và kinh tế, chẳng hạn như bài toán cực trị, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán cân bằng Nash, bài toán cân bằng mạng, … đều là những tường hợp riêng của bài toán cân bằng EP(Φ, X). Đến nay, các nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm cho EP(Φ, X) đã thu được nhiều kết quả, bạn đọc có thể xem các công trình của Blum and Oettli (1994), Bianchi and Pini (2005), Flores-Bazán (2000), Bianchi and Pini (2005), Iusem et al. (2009) và Phan and Nguyen (2019).

Các bài toán cân bằng phụ thuộc tham số (với các tham số tất định trong các không gian mêtric) đã được nghiên cứu lần đầu bởi Le and Oettli (1992) và được tiếp tục nghiên cứu trong nhiều công trình về sau như: Lam and Phan (2004), Lam and Phan (2010). Các bài toán loại này cung cấp các áp dụng thú vị trong một số tình huống của thế giới thực. Mặc dù vậy, đa số các mô hình ứng dụng đòi hỏi thành phần tham số trong song hàm phải là thành phần ngẫu nhiên. Điều này dẫn đến việc cần thiết phải nghiên cứu bài toán sau:

(SEP1(Φ, X, Ω)) Tìm điểm $\bar{x} \in X$ sao cho với mọi $x' \in X$,

$\Phi(\bar{x}, x', \omega) \geq 0$ hầu khắp nơi,

tức là, tìm điểm $\bar{x} \in X$ sao cho $P\{\omega \in \Omega |\ \Phi(\bar{x}, x', \omega) \geq 0\ \forall x' \in X\} = 1$. Ở đây (Ω, F, P) là một không gian xác suất và $\Phi : X \times X \times \Omega \to \mathbb{R}$. Bài toán (SEP1($\Phi$, X, Ω)) được gọi là bài toán cân bằng ngẫu nhiên. Công thức của (SEP1(Φ, X, Ω)) được gọi là công thức hầu khắp nơi và nó có ý nghĩa thực tế. Mặc dù vậy, việc tồn tại một điểm $\bar{x} \in X$ như vậy là rất khó xảy ra. Do đó, bài toán thường được nghiên cứu thông qua công thức kỳ vọng như sau:

(SEP2(Φ, X, Ω)) Tìm $\bar{x} \in X$, sao cho $\inf_{x' \in X} \mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, x', \omega)] \geq 0$,

ở đây **E** là phiếm hàm kỳ vọng, $\mathbf{E}[\Phi(x, x', \omega)] = \int_\Omega \Phi(x, x', \omega) dP(\omega)$. Bài toán này chứa một số bài toán quen thuộc như những trường hợp riêng, bao gồm bài toán tối ưu ngẫu nhiên, bất đẳng thức biến phân ngẫu nhiên,... Bài toán (SEP2(Φ, X, Ω)) và các bài toán liên quan đã được nghiên cứu bởi Gwinner and Raciti (2006), Lin and Fukushima (2010), Mansour et al. (2018) và Lam et al. (2021).

Mục đích của bài báo này là tìm kiếm các điều kiện tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng ngẫu nhiên (SEP2(Φ, X, Ω)) mà không dùng các giả thiết về tính lồi. Kết quả chính của bài báo có thể xem như là một phiên bản ngẫu nhiên của Định lí 1.1.

Định lí 1.1 (Phan & Nguyen, 2019) Cho X là một không gian tôpô compact và $f : X \times X \to \mathbb{R}$. Nếu $\mathrm{lev}_{\geq} f(\cdot, x')$ là đóng cho mỗi $x' \in X$, và f là anti-tựa đơn điệu vòng quanh (tức là, nếu với bất kỳ $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$ *với* $x_{m+1} := x_1$, tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $f(x_i, x_{i+1}) \geq 0$), thì tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho $\inf_{x' \in X} f(\bar{x}, x') \geq 0$. Nếu thêm nữa, với mỗi $x \in X$, $f(x, x) = 0$, thì $\bar{x} \in \operatorname{argmin}\{f(\bar{x}, x') : x' \in X\}$.

2. CÁC KẾT QUẢ CHÍNH

Xét bài toán cân bằng ngẫu nhiên (SEP2(Φ, X, Ω)), đầu tiên áp dụng Định lí 1.1 cho song hàm $E : X \times X \to \mathbb{R}$, xác định bởi $\mathrm{E}(x, x') = \mathbf{E}[\Phi(x, x', \omega)]$, ta thu được hệ quả trực tiếp sau.

Bổ đề 2.1 Giả sử rằng X là một không gian mêtric compact, (Ω, F, P) là một không gian xác suất, và $\Phi : X \times X \times \Omega \to \mathbb{R}$. Nếu song hàm $E : X \times X \to \mathbb{R}$, được xác định bởi $E(x, x') = \mathbf{E}[\Phi(x, x', \omega)]$, là anti-tựa đơn điệu vòng quanh và $\mathrm{lev}_{\geq}\mathbf{E}[\Phi(\cdot, x', \omega)] := \{x \in X : \mathbf{E}[\Phi(x, x', \omega)] \geq 0\}$ là đóng cho mỗi $x' \in X$, thì tồn tại $\bar{x} \in X$, sao cho $\inf_{x' \in X} \mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, x', \omega)] \geq 0$.

Mặc dù Bổ đề 2.1 là một kết quả khá tổng quát nhưng được phát biểu thông qua phiếm hàm kỳ vọng. Do đó, trong nhiều trường hợp ta khó kiểm tra các giả thiết. Định lí 2.1 dưới đây đưa ra các điều kiện trên dữ liệu cụ thể của bài toán.

Định nghĩa 2.1 Giả sử rằng X là một không gian mêtric, (Ω, F, P) là một không gian xác suất, và $\Phi : X \times X \times \Omega \to \mathbb{R}$. Φ được gọi là anti-tựa đơn điệu vòng quanh ngẫu nhiên nếu với bất kỳ $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$, tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $\Phi(x_i, x_{i+1}, \omega) \geq 0$ hầu khắp nơi (h.k.n.).

Một số ví dụ của các hàm anti-tựa đơn điệu vòng quanh ngẫu nhiên được cho trong Ví dụ 2.1 và Ví dụ 2.2.

Định lí 2.1 Giả sử rằng X là một không gian mêtric compact, (Ω, F, P) là một không gian xác suất, và $\Phi : X \times X \times \Omega \to \mathbb{R}$. Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn.

$\Phi(x, x', \cdot)$ khả tích cho mỗi $x, x' \in X$;

Φ là anti-tựa đơn điệu vòng quanh ngẫu nhiên;

Với mỗi $x' \in X$, $\Phi(\cdot, x', \omega)$ là nửa liên tục trên hầu khắp nơi;

Với mỗi $x' \in X$, tồn tại hàm khả tích không âm $u(x', \omega)$ sao cho với bất kỳ $x \in X$, $\Phi(x, x', \omega) \leq u(x', \omega)$ hầu khắp nơi.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in X$, *sao cho* $\inf_{x' \in X} \mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, x', \omega)] \geq 0$. *Nếu thêm nữa, với mỗi* $x \in X$, $\Phi(x, x, \omega) = 0$ *hầu khắp nơi, thì* $\bar{x} \in \operatorname{argmin}\{\mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, x', \omega)] : x' \in X\}$.

Chứng minh. Lấy bất kỳ $x_1, x_2, \dots, x_m \in X$. Thế thì, bởi giả thiết (ii), tồn tại $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $\Phi(x_i, x_{i+1}, \omega) \geq 0$ h.k.n., tức là $\mathbf{E}[\Phi(x_i, x_{i+1}, \omega)] = \int_\Omega \Phi(x_i, x_{i+1}, \omega) dP(\omega) \geq 0$. Điều này có nghĩa là song hàm $E : X \times X \to \mathbb{R}$, xác định bởi $E(x, x') = \mathbf{E}[\Phi(x, x', \omega)]$ là anti-tựa đơn điệu vòng quanh. Ta chứng minh:

$$\mathrm{lev}_{\geq}\mathbf{E}[\Phi(\cdot, x', \omega)] := \{x \in X : \mathbf{E}[\Phi(x, x', \omega)] \geq 0\}$$

là đóng cho mỗi $x' \in X$. Thật vậy, gọi $\{x_n\}$ là một dãy bất kỳ trong tập mức $\mathrm{lev}_{\geq}\mathbf{E}[\Phi(\cdot, x', \omega)]$ sao cho $x_n \to x_0$. Khi đó,

$$\mathbf{E}[\Phi(x_n, x', \omega)] = \int_\Omega \Phi(x_n, x', \omega) dP(\omega) \geq 0.$$

Do Bổ đề Fatou, ta có:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega \Phi(x_n, x', \omega) dP(\omega) \\ &\leq \int_\Omega \left(\limsup_{n\to\infty} \Phi(x_n, x', \omega) \right) dP(\omega) \\ &\leq \int_\Omega \Phi(x_0, x', \omega) dP(\omega) \\ &= \mathbf{E}[\Phi(x_0, x', \omega)]. \end{aligned}$$

Vậy, $x_0 \in \text{lev}_{\geq}\mathbf{E}[\Phi(\cdot, x', \omega)]$. Do đó, $\text{lev}_{\geq}\mathbf{E}[\Phi(\cdot, x', \omega)]$ là đóng. Áp dụng Bổ đề 2.1 ta suy ra tồn tại điểm $\bar{x} \in X$ sao cho $\inf_{x' \in X}\mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, x', \omega)] \geq 0$. Khi $\Phi(\bar{x}, \bar{x}, \omega) = 0$ h.k.n, ta có $\mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, \bar{x}, \omega)] = 0$. Do đó, $\inf_{x' \in X}\mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, \bar{x}, \omega)] \geq 0$ tương đương với $\bar{x} \in \text{argmin}\{\mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, x', \omega)]: x' \in X\}$.

Trong trường hợp riêng, khi $\Phi(x, x', \omega) = \varphi(x', \omega) - \varphi(x, \omega)$ ta suy ra kết quả sau cho bài toán tối ưu ngẫu nhiên.

Hệ quả 2.1 Giả sử rằng X là một không gian mêtric compact, (Ω, F, P) là một không gian xác suất, và $\varphi : X \times \Omega \to \mathbb{R}$. Giả sử rằng

$\varphi(x, \cdot)$ khả tích cho mỗi $x \in X$;

$\varphi(\cdot, \omega)$ nửa liên tục dưới hầu khắp nơi;

Với mỗi $x' \in X$, tồn tại hàm khả tích không âm $u(x', \omega)$ sao cho với bất kỳ $x \in X$, $\varphi(x', \omega) - \varphi(x, \omega) \leq u(x', \omega)$ h.k.n.

Khi đó, $\text{argmin}\mathbf{E}[\varphi(\cdot, \omega)] \neq \emptyset$.

Chứng minh. Hệ quả 2.1 là một hệ quả trực tiếp của Định lí 2.1 khi $\Phi(x, x', \omega) = \varphi(x', \omega) - \varphi(x, \omega)$.

Điều kiện (iii) trong Hệ quả 2.1 có thể được thay thế bằng điều kiện sau: "*tồn tại hàm khả tích không âm* $v(\omega)$ *sao cho với bất kỳ* $x \in X$, $\varphi(x, \omega) \leq v(\omega)$ *h.k.n.*". Thật vậy, nếu điều kiện này thỏa thì lấy $u(x', \omega) = 2v(\omega)$, ta có: $\varphi(x', \omega) - \varphi(x, \omega) \leq |\varphi(x', \omega)| + |\varphi(x, \omega)| \leq 2v(\omega) = u(x', \omega)$. Điều này có nghĩa là giả thiết (iii) thỏa.

Xét một trường hợp riêng khác của bài toán (SEP2(Φ, X, Ω)). Gọi X và Ω là các tập con đóng của $\mathbb{R}^n$, P là độ đo xác suất Borel trên Ω và $T: X \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Kí hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong $\mathbb{R}^n$. Bài toán bất đẳng thức biến phân ngẫu nhiên có công thức như sau:

(SVI)(T, X, Ω) Tìm $\bar{x} \in X$, sao cho $\langle \mathbf{E}[T(\bar{x}, \omega)], x' - \bar{x} \rangle \geq 0$ *với mọi* $x' \in X$, ở đây $\mathbf{E}[T(\bar{x}, \omega)] = \int_\Omega T(\bar{x}, \omega) dP(\omega)$.

Ta nói rằng T là anti-tựa đơn điệu vòng quanh ngẫu nhiên nếu song hàm $\Phi_T: X \times X \times \Omega \to \mathbb{R}$, xác định bởi $\Phi_T(x, x', \omega) = \langle T(x, \omega), x' - x \rangle$, là anti-tựa đơn điệu vòng quanh ngẫu nhiên.

Hệ quả 2.2 Giả sử rằng X là một tập con compact của $\mathbb{R}^n$, Ω là một tập con đóng của $\mathbb{R}^n$, P là độ đo xác suất Borel trên Ω, và $T: X \times \Omega \to \mathbb{R}^n$. Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn,

$T(x, \cdot)$ khả tích cho mỗi $x \in X$;

T là anti-tựa đơn điệu vòng quanh ngẫu nhiên;

$T(\cdot, \omega)$ liên tục hầu khắp nơi;

Tồn tại một hàm khả tích không âm $v(\omega)$ sao cho với bất kỳ $x \in X$, $\|T(x, \omega)\| \leq v(\omega)$ hầu khắp nơi.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in X$, sao cho $\langle \mathbf{E}[T(\bar{x}, \omega)], x' - \bar{x} \rangle \geq 0$ với mọi $x' \in X$.

Chứng minh. Xét song hàm $\Phi(x, x', \omega) = \Phi_T(x, x', \omega) := \langle T(x, \omega), x' - x \rangle$. Từ các điều kiện (i)-(iii) của Hệ quả 2.2, ta không khó khăn để thấy rằng các điều kiện (i)-(iii) của Định lí 2.1 được thỏa cho Φ. Vì X compact, tồn tại $C > 0$ sao cho $\|x\| \leq C$ với mọi $x \in X$. Lấy $u(x', \omega) = 2Cv(\omega)$. Bởi (iv) của Hệ quả 2.2 và bất đẳng Schwarz ta có: $\Phi(x, x', \omega) = \langle T(x, \omega), x' - x \rangle \leq \|T(x, \omega)\| \|x' - x\| \leq 2Cv(\omega) = u(x', \omega)$. Điều này chứng tỏ giả thiết (iv) của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Vậy, áp dụng Định lí 2.1 ta suy ra kết luận của Hệ quả 2.2.

Khi X là tập con của một không gian Banach phản xạ, vài giả giả thiết có thể làm nhẹ hơn và điều kiện X compact có thể thay bằng điều kiện bức như trong hệ quả dưới đây.

Hệ quả 2.3 Giả sử rằng X là một tập con đóng yếu của một không gian Banach phản xạ, (Ω, F, P) là một không gian xác suất, và $\Phi : X \times X \times \Omega \to \mathbb{R}$. Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa mãn.

Với mỗi $x, x' \in X$, $\Phi(x, x', \cdot)$ khả tích ;

Φ là anti-tựa đơn điệu vòng quanh ngẫu nhiên;

Với mỗi $x, x' \in X$, $\Phi(\cdot, x', \omega)$ nửa liên tục trên yếu (tức là nửa liên tục trên đối với tôpô yếu trong X) hầu khắp nơi;

Với mỗi $x' \in X$, tồn tại hàm khả tích không âm $u(x', \omega)$ sao cho với bất kỳ $x \in X$, $\Phi(x, x', \omega) \leq u(x', \omega)$ hầu khắp nơi;

Tồn tại $\hat{x} \in X$ sao cho $\limsup_{\|x\| \to \infty, x \in X} \Phi(x, \hat{x}, \omega) < 0$ $h.k.n.$

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in X$, sao cho $\inf_{x' \in X}\mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, x', \omega)] \geq 0$. Nếu thêm nữa, với mỗi $x \in X$, $\Phi(x, x, \omega) = 0$ hầu khắp nơi, thì $\bar{x} \in \text{argmin}\{\mathbf{E}[\Phi(\bar{x}, x', \omega)]: x' \in X\}$.

Chứng minh. Bởi giả thiết (v) và Bổ đề Fatou, tồn tại $\hat{x} \in X$ sao cho

$$\limsup_{\|x\|\to\infty, x\in X} \mathbf{E}[\Phi(x,\hat{x},\omega)]$$

$$= \limsup_{\|x\|\to\infty, x\in X} \int_{\Omega} \Phi(x,\hat{x},\omega)\mathrm{dP}(\omega)$$

$$\leq \int_{\Omega} \limsup_{\|x\|\to\infty, x\in X} \Phi(x,\hat{x},\omega) < 0.$$

Bất đẳng thức này cho phép ta chọn được $R > 0$ đủ lớn sao cho:

$$\|x\| - \|\hat{x}\| > R \;\Rightarrow\; \mathbf{E}[\Phi(x,\hat{x},\omega)] < 0.$$

Lấy $r = R + \|\hat{x}\|$ và đặt $X_r = \{x \in X|\; \|x\| \leq r\}$. Ta sẽ chứng tỏ rằng tồn tại $\bar{x} \in X_r$ sao cho $\inf_{x' \in X}\mathbf{E}[\Phi(\bar{x},x',\omega)] \geq 0$. Giả sử trái lại, với mỗi $x \in X_r$, tồn tại $x' \in X$ thỏa $\mathbf{E}[\Phi(x,x',\omega)] < 0$, tức là

$$\bigcap_{x' \in X} \{x \in X_r | \mathbf{E}[\Phi(\bar{x},x',\omega)] \geq 0\} = \emptyset.$$

Vì X_r là tập compact yếu và các tập $\{x \in X_r |\; \mathbf{E}[\Phi(\bar{x},x',\omega)] \geq 0\}$ là đóng yếu, tồn tại một tập con hữu hạn N của X sao cho

$$\bigcap_{x' \in N} \{x \in X_r | \mathbf{E}[\Phi(\bar{x},x',\omega)] \geq 0\} = \emptyset,$$

hoặc tương đương, với mỗi $x \in X_r$, tồn tại $x' \in N$ thỏa $\mathbf{E}[\Phi(x,x',\omega)] < 0$.

Bây giờ đặt r_N = max{r, max{$\|x'\|$ | x' ∈ N}} và $L = \{\, x \in X \mid \|x\| \leq r_N\} = B[0,r_N] \cap X$, ở đây $B[0,r_N]$ là quả cầu đóng có tâm 0 và bán kính r_N. Thế thì L là tập con compact yếu của X chứa N và $\hat{x}$. Áp dụng Định lí 2.1 với L và $\Phi|_{L\times L\times\Omega}$ thay cho X và Φ ta thu được $\bar{x} \in L$ sao cho

$$\mathbf{E}[\Phi(\bar{x},x',\omega)] \geq 0 \text{ với mọi } x' \in L. \qquad (1)$$

Nếu $\bar{x} \in L \backslash X_r$ thì $\|\bar{x}\| > \mathrm{r} = R + \|\hat{x}\|$, tức là $\|\bar{x}\|$ - $\|\hat{x}\| > R$. Do đó $\mathbf{E}[\Phi(x,\hat{x},\omega)] < 0$. Điều này mâu thuẫn với (1). Nếu $\bar{x} \in L \cap X_r$ thì tồn tại tồn tại $x' \in N \subset L$ thỏa $\mathbf{E}[\Phi(x,x',\omega)] < 0$. Điều này cũng mâu thuẫn với (1). Vậy phải tồn tại $\bar{x} \in X_r$ sao cho $\inf_{x' \in X}\mathbf{E}[\Phi(\bar{x},x',\omega)] \geq 0$.

Sau đây là vài ví dụ để minh họa cho các kết quả ở trên.

Ví dụ 2.1 Gọi X là một tập con compact của một không gian mêtric, (Ω, F, P) là một không gian xác suất, $Q: \Omega \to \mathbb{R}_+$ là một biến ngẫu nhiên khả tích và nhận các giá trị không âm, và $f : X \times X \to \mathbb{R}$ là song hàm anti-tựa đơn điệu vòng quanh sao cho $f(\cdot, x')$ là nửa liên tục trên và bị chặn trên cho mỗi $x' \in X$. Ta xét bài toán cân bằng ngẫu nhiên trong các trường hợp sau:

(a) $\Phi : X \times X \times \Omega \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$\Phi(x,x',\omega) = f(x,x') + Q(\omega)$.

(b) $\Phi : X \times X \times \Omega \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$\Phi(x,x',\omega) = Q(\omega) f(x,x')$.

Bởi vì với mọi $\omega \in \Omega$, $Q(\omega) \geq 0$ và f là song hàm anti-tựa đơn điệu vòng quanh, các song hàm Φ trong (a) và (b) là các song hàm anti-tựa đơn điệu vòng quanh hầu khắp nơi. Vì $f(\cdot,x')$ là nửa liên tục trên cho mỗi $x' \in X$, $\Phi(\cdot,x',\omega)$ là nửa liên tục trên hầu khắp nơi cho mỗi $x' \in X$. Ngoài ra, bởi giả thiết, với mỗi $x' \in X$, $f(x,x') \leq M$ cho mọi x, với M nào đó. Trong trường hợp (a) lấy $u(x',\omega) = M + Q(\omega)$, và trong trường hợp (b) lấy $u(x',\omega) = MQ(\omega)$ ta suy ra giả thiết (iv) của Định lí 2.1 được thỏa mãn. Vậy, áp dụng Định lí 2.1 ta thấy bài toán có nghiệm.

Ví dụ 2.2. Gọi X là một tập con compact của $\mathbb{R}^n$ và $Q: \Omega \to \mathbb{R}$ là biến ngẫu nhiên có phân bố xác suất như sau:

Q	**-3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
P(Q=k_i)	$\frac{3}{28}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{28}$

Cho $\Phi : X \times X \times \Omega \to \mathbb{R}$ được xác định bởi

$\Phi(x,x',\omega) = \|x\|Q(\omega) + \|x'\|$.

Ta có:

$$\mathbf{E}[\Phi(x,x',\omega)] = \sum_{i=1}^{7} (\|x\|\, Q(\omega) + \|x'\|)P(= k_i)$$

$$= \|x\| \textstyle\sum_{i=1}^{7} Q(\omega)P(Q = k_i) + \|x'\|$$

$$= \frac{11}{14}(\|x'\| - \|x\|) + \frac{3}{14}\|x'\|.$$

Rõ ràng song hàm $E(x,x') = \mathbf{E}[\Phi(x,x',\omega)] = \frac{11}{14}(\|x'\| - \|x\|) + \frac{3}{14}\|x'\|$ là anti-tựa đơn điệu vòng quanh. Hơn nữa,

$$\mathrm{lev}_{\geq}\mathbf{E}[\Phi(\cdot,x',\omega) = \{x \in X : \mathbf{E}[\Phi(x,x',\omega)] \geq 0\}$$

$$= \{x \in X|\; \|x\| \leq \frac{14}{11}\|x'\|\}$$

là đóng cho mỗi $x' \in X$. Vậy, bởi Bổ đề 2.1, tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho $\inf_{x' \in X}\mathbf{E}[\Phi(\bar{x},x',\omega)] \geq 0$.

3. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, một kết quả tồn tại nghiệm mới được thiết lập cho bài toán cân bằng ngẫu nhiên với các giả thiết được cho trực tiếp trên dữ liệu của bài toán, không thông qua phiếm hàm kỳ vọng và không chứa các điều kiện về tính lồi. Kết quả này dễ áp dụng cho các tình huống cụ thể vì có các giả thiết dễ kiểm tra. Hơn nữa, kỹ thuật chứng minh là mới, tương đối đơn giản và có thể dùng để nghiên cứu các bài toán khác trong tối ưu hóa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Blum, E., & Oettli, W. (1994). From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. Student, 63*, 123-145.

Bianchi, M., & Pini, R. (2005). Coercivity conditions for equilibrium problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *124*(1), 79-92.

Flores-Bazán, F. (2000). Existence theorems for generalized noncoercive equilibrium problems: the quasiconvex case. *SIAM Journal on Optimization*, *11*(3), 675–690

Gwinner, J., & Raciti, F. (2006). Random equilibrium problems on networks. *Mathematical and Computer Modelling*, *43*(7), 880-891.

Iusem, A. N., Kassay, G., & Sosa, W. (2009). On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems. *Mathematical Programming Series B, 116*(1), 259-273.

Lam, Q. A., & Phan, Q. K. (2004). Semicontinuity of the solution set of parametric multivalued vector quasiequilibrium problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *294*(2), 699-711.

Lam, Q. A., & Phan, Q. K. (2010). Continuity of solution maps of parametric quasiequilibrium problems. *Journal of Global Optimization*, *46*(2), 247-259.

Lam, Q. A., Nguyen, X. H., Nguyen, T. K., Nguyen, H. Q., & Dang, T. M. V. (2021). On the existence and stability of solutions to stochastic equilibrium problems. *RAIRO Operations Research*, *55*, 705–718.

Le, D. M., & Oettli, W. (1992). Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, *18*(12), 1159-1166.

Lin, G-H., & Fukushima, M. (2010). Stochastic Equilibrium Problems and Stochastic Mathematical Programs with Equilibrium Constraints: A Survey. *Pacific Journal of Optimzation*, *6*(3), 455-482.

Mansour, M. A., Elakri, R. A., & Laghdir, M. (2018). From deterministic to stochastic equilibrium problems. *Le Matematiche*, *73*(2), 213-233.

Phan, Q. K., & Nguyen, H. Q. (2019). Versions of the Weierstrass theorem for bifunctions and the solution existence in optimization. *SIAM Journal on Optimization*, *29*(2), 1502-1523.