Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ

Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên

website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jsi.2020.087

BÀI TOÁN ĐIỀU KHIỂN PHÂN BỐ VÀ ĐIỀU KHIỂN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG ELLIPTIC NỬA TUYẾN TÍNH

Nguyễn Thành Quí*

Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Nguyễn Thành Quí (email: ntqui@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 04/03/2020
Ngày nhận bài sửa: 24/03/2020
Ngày duyệt đăng: 29/06/2020

Title:
Distributed and boundary control problems governed by semilinear elliptic partial differential equations

Từ khóa:
Điều khiển biên, điều khiển phân bố, điều kiện tối ưu, ổn định Lipschitz toàn bộ, sự tồn tại nghiệm

Keywords:
Boundary control, distributed control, existence of solution, full Lipschitzian stability, optimality condition

ABSTRACT

In this paper we investigate existence of solutions, optimality conditions, and solution stability for a class of optimal control problems governed by semi linear elliptic partial differential equations. In the class of optimal control problems, distributed controls and boundary controls will be considered, they may appear nonlinearly in the state equation. This class of control problems is more general and complicated, investigation of them is interesting and meaningful.

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm, các điều kiện tối ưu, và sự ổn định nghiệm cho một lớp các bài toán điều khiển tối ưu liên quan đến các phương trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính. Trong lớp các bài toán điều khiển tối ưu này, các điều khiển phân bố và điều khiển biên sẽ cùng được xem xét, đồng thời chúng có thể xuất hiện phi tuyến trong phương trình trạng thái. Đây là một lớp bài toán khá tổng quát và phức tạp, việc nghiên cứu chúng thật thú vị và rất có ý nghĩa khoa học.

Trích dẫn: Nguyễn Thành Quí, 2020. Bài toán điều khiển phân bố và điều khiển biên cho phương trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 56(Số chuyên đề: Khoa học tự nhiên)(1): 1-7.

1 GIỚI THIỆU

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm, các điều kiện tối ưu, và sự ổn định nghiệm cho một lớp các bài toán điều khiển tối ưu liên quan đến các phương trình đạo hàm riêng elliptic nửa tuyến tính được mô hình hóa như sau:

$$\min J(y,v,u)=\int_\Omega \varphi\big(x,y(x),v(x)\big)dx+\int_\Gamma \psi\big(x,y(x),u(x)\big)ds \quad (1.1)$$

thỏa điều kiện

$$\begin{cases}-\Delta y+d(x,y,v)=0 & \text{trong } \Omega\\ \partial_{\boldsymbol{n}} y+b(x,y,u)=0 & \text{trên } \Gamma\end{cases} \quad (1.2)$$

và các ràng buộc điều khiển

$$\begin{cases}v_a(x)\le v(x)\le v_b(x) & \text{với h.h. } x\in\Omega\\ u_a(x)\le u(x)\le u_b(x) & \text{với h.h. } x\in\Gamma,\end{cases} \quad (1.3)$$

trong đó $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ là một tập mở bị chặn, Γ là biên của Ω, và $\Delta(\cdot)$ là toán tử Laplace (tức Δy là tổng của các đạo hàm riêng bậc hai của hàm y). Trong biểu thức (1.1), các tích phân được hiểu theo nghĩa Lebesgue, trong đó việc xây dựng độ đo Lebesgue $N-1$ chiều trên biên Γ để định nghĩa tích phân Lebesgue trên biên Γ có thể xem trong Tröltzsch (2010) (Subsection 2.2.2). Trong biểu thức (1.2), $\partial_{\boldsymbol{n}} y=\nabla y\cdot\boldsymbol{n}$ là đạo hàm pháp tuyến của hàm y, tức là đạo hàm của y theo hướng véctơ pháp tuyến đơn vị $\boldsymbol{n}$ hướng ra phía ngoài của Γ. Ta ký hiệu tập các điều khiển chấp nhận được lần lượt là

$$V_{ad} = \{v \in L^\infty(\Omega) | v_a(x) \leq v(x) \leq v_b(x) \text{ với h.h. } x \in \Omega\}, \quad (1.4)$$

$$U_{ad} = \{u \in L^\infty(\Gamma) | u_a(x) \leq u(x) \leq u_b(x) \text{ với h.h. } x \in \Gamma\}. \quad (1.5)$$

Các điều khiển $v \in V_{ad}$ được gọi là các điều khiển phân bố, và các điều khiển $u \in U_{ad}$ được gọi là các điều khiển biên.

Trong mô hình bài toán điều khiển tối ưu (1.1)–(1.3), ta thấy rằng cả hai biến điều khiển phân bố và điều khiển biên đều được xét tới. Vì vậy, mô hình bài toán này tổng quát hơn một số mô hình được xem xét trước đây Tröltzsch (2010) (Chapter 4) mà ở đó các điều khiển phân bố và các điều khiển biên được xét riêng trong các trường hợp khác nhau. Chú ý rằng mô hình bài toán của chúng tôi trong bài báo này cũng được nhắc đến trong Tröltzsch (2010) (Chapter 4), tuy nhiên việc nghiên cứu mô hình này một cách bài bản và chi tiết vẫn chưa được thực hiện. Do đó, việc triển khai nghiên cứu bài toán điều khiển tối ưu (1.1)–(1.3) là rất cần thiết và mang lại nhiều ý nghĩa khoa học.

Sau Mục 1 về phần giới thiệu, phần nội dung còn lại của bài báo được chia thành ba phần chính và được trình bày trong ba mục. Mục 2 nêu lên các giả thiết căn bản của lý thuyết điều khiển tối ưu và chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trạng thái và sự tồn tại nghiệm tối ưu của bài toán (1.1)–(1.3). Trong Mục 3, chúng tôi sẽ nghiên cứu các điều kiện cần tối ưu cho bài toán (1.1)–(1.3) dưới các giả thiết đã nêu. Mục 4 khảo sát sự ổn định Lipschitz toàn bộ cho các điều kiện cần của bài toán (1.1)–(1.3) được thiết lập dưới dạng các bất đẳng thức biến phân (tức là, các phương trình suy rộng, theo Robinson (1979)).

2 CÁC GIẢ THIẾT VÀ SỰ TỒN TẠI NGHIỆM

Để thiết lập các kết quả về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) và sự tồn tại nghiệm của bài toán điều khiển tối ưu (1.1)–(1.3) ta cần đến các giả thiết căn bản của lý thuyết điều khiển tối ưu sau đây:

(A1) Tập $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ là một miền Lipschitz bị chặn.

(A2) Các hàm $\varphi, d: \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (tương ứng $\psi, b: \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) đo được theo biến x với mọi $(y, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (tương ứng $(y, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$). Đồng thời, các hàm này khả vi cấp hai theo biến $(y, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (tương ứng $(y, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$) với hầu hết $x \in \Omega$ và thỏa mãn tính bị chặn và Lipschitz địa phương cấp hai sau đây: Tồn tại $K > 0$ sao cho

$$\begin{cases} |\varphi(x,0,0)| + |\varphi_y(x,0,0)| + |\varphi_{yy}(x,0,0)| \leq K \\ |\psi(x,0,0)| + |\psi_y(x,0,0)| + |\psi_{yy}(x,0,0)| \leq K \end{cases} \quad (2.1)$$

và với mọi $M > 0$, tồn tại $L > 0$ sao cho

$$\begin{cases} |\varphi_{yy}(x, y_1, u_1) - \varphi_{yy}(x, y_2, u_2)| \\ \quad \leq L||(y_1, u_1) - (y_2, u_2)|| \\ |\psi_{yy}(x, y_1, u_1) - \psi_{yy}(x, y_2, u_2)| \\ \quad \leq L||(y_1, u_1) - (y_2, u_2)||. \end{cases} \quad (2.2)$$

(A3) Các hàm $d_y(x, y, v) \geq 0$ với hầu hết $x \in \Omega$ và với mọi $y \in \mathbb{R}$, $b_y(x, y, u) \geq 0$ với hầu hết $x \in \Gamma$ và với mọi $y \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, tồn tại các tập $E_d \subset \Omega$ và $E_b \subset \Gamma$ có độ đo dương và các hằng số $\lambda_d > 0$ và $\lambda_b > 0$ sao cho

$$\begin{cases} d_y(x, y, v) \geq \lambda_d, \forall x \in E_d, \forall (y, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ b_y(x, y, v) \geq \lambda_b, \forall x \in E_b, \forall (y, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.3)$$

(A4) Các hàm $v_a, v_b \in L^\infty(\Omega)$ và $u_a, u_b \in L^\infty(\Gamma)$ thỏa mãn điều kiện

$$\begin{cases} v_a(x) \leq v_b(x) \text{ với h.h. } x \in \Omega \\ u_a(x) \leq u_b(x) \text{ với h.h. } x \in \Gamma. \end{cases} \quad (2.4)$$

Sử dụng công thức tích phân từng phần

$$\int_\Omega g\Delta y dx = \int_\Gamma g\partial_{\boldsymbol{n}} y ds - \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla g dx$$

và điều kiện $\partial_{\boldsymbol{n}} y = -b(x, y, u)$ trong (1.2), từ biểu thức (2.5) ta suy ra

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla g dx + \int_\Omega d(x, y, v) g dx + \int_\Gamma b(x, y, u) g ds = 0$$

với mọi hàm $g \in C^1(\overline{\Omega})$ (xem định nghĩa các không gian hàm $C^k(\overline{\Omega})$, với $k = 0, 1, 2, \ldots$, trong Tröltzsch (2010) (page 25)).

Định nghĩa 2.1. Một hàm $y \in H^1(\Omega)$ (với $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ là một không gian Sobolev) được gọi là *nghiệm* yếu của phương trình (1.2) nếu

$$\int_\Omega \nabla y \cdot \nabla g dx + \int_\Omega d(x, y, v) g dx + \int_\Gamma b(x, y, u) g ds = 0, \quad \forall g \in H^1(\Omega) \quad (2.6)$$

Định lý sau đây cho ta một kết quả như một minh họa về sự tồn tại nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) ứng với một lớp các hàm $d(x,y,v)$ và $b(x,y,u)$.

Định lý 2.1. Giả sử các giả thiết **(A1)**–**(A4)** được thỏa mãn. Khi đó, nếu các hàm $d(x,y,v)$ và hàm $b(x,y,u)$ trong phương trình trạng thái (1.2) được biểu diễn dưới dạng

$$\begin{cases} d(x,y,v) = \alpha(x)y + \beta(x,y) + v \\ b(x,y,u) = \gamma(x)y + \theta(x,y) + u, \end{cases} \quad (2.7)$$

thì với mọi $(v,u) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Gamma)$ cho trước, phương trình trạng thái (1.2) có một nghiệm yếu duy nhất $y \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Chứng minh. Áp dụng các kỹ thuật chứng minh trong Tröltzsch (2010) (Theorem 4.7) ta suy ra được khẳng định của định lý. ☐

Nhận xét 2.1. Khẳng định của Định lý 2.1 cũng đúng khi $(v,u) \in L^r(\Omega) \times L^s(\Gamma)$ với $r > N/2$ và $s > N-1$; xem trong Tröltzsch (2010) (Theorem 4.7). Liên quan đến sự tồn tại nghiệm của phương trình trạng thái (1.2) có thể xem thêm Bayen *et al*. (2014) (Proposition 2.4).

Từ Định lý 2.1 và Nhận xét 2.1 ta có thể giả thiết rằng tồn tại các nghiệm yếu của phương trình trạng thái (1.2) dưới các giả thiết đã cho. Ta ký hiệu *toán tử nghiệm yếu* của phương trình trạng thái (1.2) như sau $G: L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Gamma) \to H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ với $(v,u) \mapsto y = G(v,u)$. (2.8)

Với $\varrho \in [1,\infty]$ và $\varepsilon > 0$, ký hiệu $B_\varepsilon^\varrho(\bar{u}) = \{v \in L^\varrho(\Omega): \|v - \bar{u}\|_{L^\varrho(\Omega)} < \varepsilon\}$ là quả cầu mở trong không gian $L^\varrho(\Omega)$ có tâm tại $\bar{u} \in L^\varrho(\Omega)$ và bán kính ε, và ký hiệu $\bar{B}_\varepsilon^\varrho(\bar{u})$ là quả cầu đóng tương ứng của $B_\varepsilon^\varrho(\bar{u})$ trong không gian $L^\varrho(\Omega)$. Định nghĩa và tính chất của các không gian $L^\varrho(\Omega)$, $L^\varrho(\Gamma)$ với $\varrho \in [1,\infty)$ và $L^\infty(\Omega)$, $L^\infty(\Gamma)$ có thể xem trong Tröltzsch (2010) (Subsection 2.2.1).

Định nghĩa 2.2. Một cặp điều khiển $(\bar{v},\bar{u}) \in V_{ad} \times U_{ad}$ được gọi là cặp *điều khiển tối ưu* (hay *nghiệm toàn cục*) của bài toán (1.1)–(1.3) ứng với trạng thái tối ưu $\bar{y} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ nếu

$J(\bar{y},\bar{v},\bar{u}) \le J(y,v,u), \ \forall (v,u) \in V_{ad} \times U_{ad}$ và $y = G(v,u)$. (2.9)

Cặp điều khiển $(\bar{v},\bar{u}) \in V_{ad} \times U_{ad}$ được gọi là cặp điều khiển tối ưu địa phương (hay nghiệm địa phương) của bài toán (1.1)–(1.3) theo nghĩa $L^\varrho(\Omega) \times L^\varrho(\Gamma)$ nếu tồn tại một quả cầu đóng $\bar{B}_\varepsilon^\varrho(\bar{v}) \times \bar{B}_\varepsilon^\varrho(\bar{u})$ trong $L^\varrho(\Omega) \times L^\varrho(\Gamma)$ sao cho

$J(\bar{y},\bar{v},\bar{u}) \le J(y,v,u), \ \forall (v,u) \in (V_{ad} \times U_{ad}) \cap (\bar{B}_\varepsilon^\varrho(\bar{v}) \times \bar{B}_\varepsilon^\varrho(\bar{u}))$ và $y = G(v,u)$. (2.10)

Nghiệm địa phương $(\bar{v},\bar{u})$ được gọi là chặt nếu trong (2.8) ta có $J(\bar{y},\bar{v},\bar{u}) < J(y,v,u)$ với mọi cặp điều khiển $(v,u) \in (V_{ad} \times U_{ad}) \cap (\bar{B}_\varepsilon^\varrho(\bar{v}) \times \bar{B}_\varepsilon^\varrho(\bar{u}))$ và $y = G(v,u)$ thỏa $(v,u) \neq (\bar{v},\bar{u})$.

Định lý 2.2. Giả sử các giả thiết **(A1)**–**(A4)** thỏa mãn, các hàm φ và ψ lần lượt lồi theo biến v và u, các hàm $d(x,y,v)$ và $b(x,y,u)$ có dạng (2.7). Khi đó, bài toán (1.1)–(1.3) có ít nhất một điều khiển tối ưu $(\bar{v},\bar{u}) \in V_{ad} \times U_{ad}$ với trạng thái tối ưu tương ứng $\bar{y} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Chứng minh. Trong Tröltzsch (2010) (Theorem 4.15), sự tồn tại nghiệm (điều khiển tối ưu) cho bài toán điều khiển tối ưu phân bố đã được phát biểu và chứng minh chi tiết. Chú ý rằng trong Tröltzsch (2010) (Theorem 4.15) điều khiển biên đã không được xét đến. Trong bài toán điều khiển tối ưu (1.1)–(1.3) thì cả hai biến điều khiển phân bố và điều khiển biên đều được xem xét. Tuy nhiên, các kỹ thuật chứng minh cho Tröltzsch (2010) (Theorem 4.15) vẫn có thể áp dụng để chứng minh cho sự tồn tại nghiệm của bài toán (1.1)–(1.3). ☐

3 ĐIỀU KIỆN TỐI ƯU

Trong mục này, bằng cách sử dụng phương pháp hàm Lagrange chúng tôi sẽ thiết lập các điều kiện cần tối ưu cho bài toán điều khiển tối ưu (1.1)–(1.3). Hàm Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot)$ cho bài toán điều khiển tối ưu (1.1)–(1.3) được định nghĩa một cách hình thức như sau

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(y,v,u,p) = J(y,v,u) - \int_\Omega \big(-\Delta y + d(x,y,v)\big) p dx - \int_\Gamma \big(\partial_{\boldsymbol{n}} y + b(x,y,u)\big) p ds \quad (3.1)$$

trong đó hàm $p = p(x)$ là nhân tử Lagrange. Ta thấy rằng hàm Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot)$ được định nghĩa hình thức bởi (3.1) không mang lại nhiều ý nghĩa áp dụng vì tính đặc thù trong cấu trúc của bài toán (1.1)–(1.3). Do đó, ta sẽ biến đổi hàm Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot)$ về dạng tương đương và tiện dụng để thiết lập các điều kiện tối ưu cho bài toán (1.1)–(1.3). Sử dụng công thức tích phân từng phần

$$\int_\Omega p \Delta y dx = \int_\Gamma p \partial_{\boldsymbol{n}} y ds - \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla p dx \quad (3.2)$$

và công thức (3.1) ta suy ra

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}(y,v,u,p) = J(y,v,u) + \int_\Gamma p \partial_{\boldsymbol{n}} y ds - \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla p dx - \int_\Omega d(x,y,v) p dx - \int_\Gamma \big(\partial_{\boldsymbol{n}} y + b(x,y,u)\big) p ds. \quad (3.3)$$

Hàm Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot)$ được viết lại một cách tương đương như sau:

$\boldsymbol{\mathcal{L}}(y,v,u,p) = J(y,v,u) - \int_\Omega(\nabla y\cdot\nabla p + d(x,y,v)p)dx - \int_\Gamma b(x,y,u)pds.$ (3.4)

Ta sẽ sử dụng hàm Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot)$ được cho trong (3.4) để thiết lập điều kiện tối ưu cho bài toán (1.1)–(1.3) trong định lý dưới đây.

Định lý 3.1. Nếu $(\bar v,\bar u)\in V_{ad}\times U_{ad}$ là điều khiển tối ưu của bài toán (1.1)–(1.3) với trạng thái tối ưu tương ứng $\bar y\in H^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ thì tồn tại hàm $p\in H^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} D_y\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)y = 0,\ \forall y\in H^1(\Omega),\\ D_v\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)(v-\bar v)\ge 0,\ \forall v\in V_{ad},\\ D_u\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)(u-\bar u)\ge 0,\ \forall u\in U_{ad}, \end{cases} \quad (3.5)$$

trong đó $D_y\boldsymbol{\mathcal{L}}$, $D_v\boldsymbol{\mathcal{L}}$, $D_u\boldsymbol{\mathcal{L}}$ lần lượt là các đạo hàm riêng của $\boldsymbol{\mathcal{L}}$ theo các biến y, v, u.

Chứng minh. Thông qua hàm Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot)$ được định nghĩa bởi (3.4), ta viết lại bài toán điều khiển tối ưu (1.1)–(1.3) dưới dạng như sau:

min $\boldsymbol{\mathcal{L}}(y,v,u,p)$ với điều kiện $y\in H^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ và $(v,u)\in V_{ad}\times U_{ad}$. (3.6)

Vì biến $y\in H^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ không bị ràng buộc nên theo quy tắc Fermat ta phải có

$$D_y\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)y = 0,\ \ \forall y\in H^1(\Omega).$$

Với các biến ràng buộc $(v,u)\in V_{ad}\times U_{ad}$ ta suy ra

$$D_{(v,u)}\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)\big((v,u)-(\bar v,\bar u)\big)\ge 0,\ \ \forall (v,u)\in V_{ad}\times U_{ad}.$$

Hay ta có

$$D_v\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)(v-\bar v) + D_u\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)(u-\bar u)\ge 0,\ \ \forall (v,u)\in V_{ad}\times U_{ad}.$$

Như vậy, phải tồn tại hàm $p\in H^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ thỏa mãn điều kiện (3.5). □

Từ Định lý 3.1, ta thấy rằng nếu tính được các đạo hàm riêng theo hướng của hàm Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot)$ lần lượt theo các biến y, v và u, ta sẽ thu được các điều kiện cần tối ưu dạng hiển. Trong phần chứng minh của định lý được phát biểu ngay sau đây chúng tôi sẽ tiến hành tính toán các đạo hàm riêng của hàm Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot)$ theo các hướng y, v và u, và từ đó thiết lập các điều kiện cần tối ưu dạng hiển thông qua các dữ liệu đã cho.

Định lý 3.2. Nếu $(\bar v,\bar u)\in V_{ad}\times U_{ad}$ là điều khiển tối ưu của bài toán (1.1)–(1.3) với trạng thái tối ưu tương ứng $\bar y\in H^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ thì tồn tại hàm $p\in H^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ thỏa các điều kiện:

(i) Với mọi $y\in H^1(\Omega)$, ta có

$\int_\Omega \varphi_y(x,\bar y,\bar v)ydx + \int_\Gamma \psi_y(x,\bar y,\bar u)yds - \int_\Omega \nabla y\cdot\nabla pdx - \int_\Omega d_y(x,\bar y,\bar v)ypdx - \int_\Gamma b_y(x,\bar y,\bar u)ypds = 0.$ (3.7)

(ii) Với mọi $v\in V_{ad}$, ta có

$$\int_\Omega(\varphi_v(x,\bar y,\bar v) - pd_v(x,\bar y,\bar v))(v-\bar v)dx\ge 0.$$

(3.8)

(iii) Với mọi $u\in U_{ad}$, ta có

$$\int_\Gamma(\psi_u(x,\bar y,\bar u) - pb_u(x,\bar y,\bar u))(u-\bar u)ds\ge 0.$$

(3.9)

Chứng minh. Để chứng minh định lý, trước tiên chúng ta tiến hành tính toán các đạo hàm riêng theo hướng của hàm Lagrange $\boldsymbol{\mathcal{L}}(\cdot)$ cho bởi (3.4). Với mọi $y\in H^1(\Omega)$, ta có

$$D_y\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)y = J_y'(\bar y,\bar v,\bar u)y - \int_\Omega(\nabla y\cdot\nabla p + d_y(x,\bar y,\bar v)yp)dx - \int_\Gamma b_y(x,\bar y,\bar u)ypds.$$

Nghĩa là, ta có

$$D_y\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)y = \int_\Omega\varphi_y(x,\bar y,\bar v)ydx + \int_\Gamma\psi_y(x,\bar y,\bar u)yds - \int_\Omega\nabla y\cdot\nabla pdx - \int_\Omega d_y(x,\bar y,\bar v)ypdx - \int_\Gamma b_y(x,\bar y,\bar u)ypds.$$

(3.10)

Từ (3.10) và Định nghĩa 2.1 ta thấy rằng $p\in H^1(\Omega)\cap C(\bar\Omega)$ thỏa phương trình

$$D_y\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar y,\bar v,\bar u,p)y = 0,\ \ \forall y\in H^1(\Omega)$$

khi và chỉ khi p là nghiệm yếu của bài toán giá trị biên tuyến tính sau đây

$$\begin{cases} -\Delta p + d_y(x,\bar y,\bar v)p = \varphi_y(x,\bar y,\bar v) & \text{trong } \Omega\\ \partial_{\boldsymbol{n}} p + b_y(x,\bar y,\bar u)p = \psi_y(x,\bar y,\bar u) & \text{trên } \Gamma. \end{cases}$$

(3.11)

Ta lại có

$D_v\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar{y},\bar{v},\bar{u},p)h = \int_\Omega(\varphi_v(x,\bar{y},\bar{v}) - pd_v(x,\bar{y},\bar{v}))hdx, \ \forall h \in V_{ad}$, (3.12)

$D_u\boldsymbol{\mathcal{L}}(\bar{y},\bar{v},\bar{u},p)h = \int_\Gamma(\psi_u(x,\bar{y},\bar{u}) - pb_u(x,\bar{y},\bar{u}))hds, \ \ \forall h \in U_{ad}$, (3.13)

trong đó p là nghiệm yếu của bài toán giá trị biên tuyến tính (3.11). Áp dụng Định lý 3.1 ta suy ra các khẳng định của Định lý 3.2. ☐

Chúng tôi trích dẫn lại một ví dụ trong Tröltzsch (2010) (page 222) để minh họa cho các kết quả về điều kiện tối ưu đã được thiết lập trong Định lý 3.1 và Định lý 3.2 sau đây.

Ví dụ 3.1. Xét bài toán điều khiển tối ưu

$\min J(y,v,u) = \int_\Omega(y^2 + y_\Omega y + \lambda_1 v^2 + v_\Omega v)dx + \int_\Gamma \lambda_2 u^8 ds$ (3.14)

thỏa điều kiện

$$\begin{cases} -\Delta y + y + e^y = v & \text{trong } \Omega \\ \partial_n y + |y|y^3 = u^4 & \text{trên } \Gamma \end{cases} \quad (3.15)$$

và các ràng buộc điều khiển

$$\begin{cases} -1 \le v(x) \le 1 \ \text{ với h.h. } x \in \Omega \\ \ \ 0 \le u(x) \le 1 \ \text{ với h.h. } x \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.16)$$

trong đó $y_\Omega, v_\Omega \in L^\infty(\Omega)$ và $y_\Omega y$ là tích theo nghĩa hàm số của y_Ω và y. Trong bài toán này, các hàm $\varphi, d\colon \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\begin{cases} \varphi(x,y,v) = y^2 + y_\Omega y + \lambda_1 v^2 + v_\Omega v \\ d(x,y,v) = y + e^y = v \end{cases} \quad (3.17)$$

và các hàm $\psi, b\colon \Gamma \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$\begin{cases} \psi(x,y,u) = \lambda_2 u^8 \\ b(x,y,u) = |y|y^3 - u^4 \end{cases} \quad (3.18)$$

thỏa mãn các giả thiết **(A1)**–**(A4)**. Do đó, ta có thể áp dụng Định lý 3.1 và Định lý 3.2 để thiết lập điều kiện cần cho các điều khiển tối ưu như sau. Giả sử $(\bar{v},\bar{u}) \in V_{ad} \times U_{ad}$ là các điều khiển tối ưu cho bài toán điều khiển (1.1)–(1.3) với trạng thái tối ưu tương ứng là $\bar{y} \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ($\bar{y}$ là nghiệm yếu của phương trình trạng thái (3.15)), trong đó$V_{ad} = \{v \in L^\infty(\Omega) | -1 \le v(x) \le 1 \ \text{ với h.h. } x \in \Omega\}$, (3.19)

và

$U_{ad} = \{u \in L^\infty(\Gamma) | 0 \le u(x) \le 1 \ \text{ với h.h. } x \in \Gamma\}$. (3.20)

Khi đó, tồn tại một nghiệm yếu $p \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ của phương trình liên hợp

$$\begin{cases} -\Delta p + p + e^{\bar{y}} p = 2\bar{y} + y_\Omega & \text{trong } \Omega \\ \partial_n p + 4\bar{y}^2|\bar{y}|p = 0 & \text{trên } \Gamma \end{cases} \quad (3.21)$$

thỏa mãn các bất đẳng thức biến phân (3.8) và (3.9) trong Định lý 3.2 sau đây

$\int_\Omega(2\lambda_1\bar{v} + v_\Omega + p)(v - \bar{v})dx \ge 0, \ \ \forall v \in V_{ad}$, (3.22)

$\int_\Gamma(8\lambda_2\bar{u}^7 + 4\bar{u}^3 p)(u - \bar{u})ds \ge 0, \ \ \forall u \in U_{ad}$. (3.23)

Việc mô tả một nghiệm yếu của phương trình liên hợp (trạng thái liên hợp, hay hàm số p) dưới dạng một hàm số cụ thể thỏa mãn các giả thiết đã cho có thể xem thêm trong Qui and Wachsmuth (2018).

Nhận xét 3.1. Các điều kiện cần tối ưu được thiết lập trong Định lý 3.1 và Định lý 3.2 là rất quan trọng vì chúng được biểu diễn dưới dạng các bất đẳng thức biến phân và hướng nghiên cứu về sự ổn định nghiệm cho các bất đẳng thức biến phân là một trong những hướng nghiên cứu quan trọng trong toán học. Vì vậy, dựa vào các kết quả tổng quát của hướng nghiên cứu về sự ổn định nghiệm cho các bất đẳng thức biến phân, ta có thể suy ra các kết quả ổn định cho các bài toán điều khiển tối ưu có tham số.

Nhận xét 3.2. Ta nhận thấy rằng các điều kiện đủ tối ưu cho bài toán (1.1)–(1.3) với cặp điều khiển phân bố và điều khiển biên xuất hiện đồng thời vẫn chưa được trình bày trong Tröltzsch (2010), thậm chí theo chúng tôi hướng nghiên cứu này vẫn còn là một hướng mở. Vấn đề nghiên cứu các điều kiện đủ tối ưu cho bài toán (1.1)–(1.3) khá phức tạp nhưng rất thú vị, chúng tôi sẽ xem xét vấn đề này trong tương lai.

4 SỰ ỔN ĐỊNH LIPSCHITZ TOÀN BỘ

Trong mục này chúng tôi sẽ đề cập đến khái niệm *ổn định Lipschitz toàn bộ* (Lipschitzian full stability) cho các điều kiện cần tối ưu của bài toán điều khiển tối ưu (1.1)–(1.3) dưới tác động của *nhiễu cơ bản* (basic perturbation) và *nhiễu xiên* (tilt perturbation). Việc khảo sát sự ổn định này dựa vào công cụ giải tích biến phân và đạo hàm suy rộng của Mordukhovich; xem Mordukhovich (2006) (I and II). Một số công trình mở đầu về sự ổn định toàn bộ cho các hệ thống biến phân có tham số là Mordukhovich and Nghia (2016) và Mordukhovich *et al.* (2018). Chú ý rằng trong một số trường hợp đặc biệt khái niệm này tương đương với khái niệm ổn định toàn bộ của các bài toán tối ưu có tham số. Liên quan đến sự ổn định Lipschitz toàn bộ cho các nghiệm địa phương của bài toán tối ưu có tham số độc giả có thể xem Levy *et al.* (2000), Mordukhovich and Nghia (2014) và Qui and Wachsmuth (2019). Trong một số trường hợp đặc biệt đối với bài toán (1.1)–(1.3) mà ở đó hàm mục tiêu không chứa dạng toàn phương đối với biến điều khiển thì bài toán (1.1)–(1.3) sẽ có cấu trúc bang-bang. Một số công trình về lớp bài toán điều khiển bang-bang chẳng hạn như Casas (2012), Casas *et al*. (2017), Qui and Wachsmuth (2018) và Qui (2020).

Như ta đã biết trong Mục 2 rằng nếu các giả thiết **(A1)**–**(A4)** được thỏa mãn thì với mọi cặp điều khiển $(v,u) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Gamma)$ phương trình trạng thái (1.2) luôn có một nghiệm yếu duy nhất $y \in H^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Như vậy, ta sẽ ký hiệu

$\mathcal{J}(v,u) = J(y,v,u),\ \ \forall (v,u) \in L^\infty(\Omega) \times L^\infty(\Gamma)$ và $y = G(v,u)$. (4.1)

Ta thấy rằng nếu $(\bar{v},\bar{u}) \in V_{ad} \times U_{ad}$ là điều khiển tối ưu địa phương của bài toán (1.1)–(1.3) thì $(\bar{v},\bar{u})$ thỏa phương trình suy rộng sau đây:

$0 \in \mathcal{J}'_{(v,u)}(\bar{v},\bar{u}) + N\big((\bar{v},\bar{u}); V_{ad} \times U_{ad}\big)$, (4.2)

trong đó $N\big((\bar{v},\bar{u}); V_{ad} \times U_{ad}\big)$ là nón pháp tuyến của tập $V_{ad} \times U_{ad}$ tại $(\bar{v},\bar{u})$ theo nghĩa giải tích lồi. Để cho ngắn gọn và tiện lợi ta sẽ định nghĩa toán tử nón pháp tuyến $\mathcal{N}(\cdot)$ sau đây

$\mathcal{N}(v,u) = N\big((v,u); V_{ad} \times U_{ad}\big),\ \ \forall (v,u) \in V_{ad} \times U_{ad}$. (4.3)

Như vậy, để khảo sát sự ổn định nghiệm của (4.2) dưới tác động của nhiễu trong không gian Hilbert $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ ta có thể giả thiết rằng hàm mục tiêu $\mathcal{J}(v,u)$ khả vi đến bậc hai trong không gian $L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$. Ta xét phương trình suy rộng có tham số dưới đây

$(v^*,u^*) \in \mathcal{J}'_{(v,u)}(v,u,\omega) + \mathcal{N}(v,u)$, (4.4)

trong đó $\omega \in W$ (với W là không gian Hilbert) được gọi là *tham số nhiễu cơ bản* và cặp tham số $(v^*,u^*) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ được gọi là tham *số nhiễu xiên* của phương trình suy rộng (4.4). Ký hiệu $S: L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \times W \to L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma)$ là ánh xạ nghiệm của phương trình suy rộng có tham số (4.4) xác định bởi

$S(v^*,u^*,\omega) = \{(v,u) \in V_{ad} \times U_{ad} \,|\, (v^*,u^*) \in \mathcal{J}'_{(v,u)}(v,u,\omega) + \mathcal{N}(v,u)\}$, (4.5)

Định nghĩa 4.1. Xét cặp điều khiển $(\bar{v},\bar{u}) \in S(\bar{v}^*,\bar{u}^*,\bar{\omega})$ với $(\bar{v}^*,\bar{u}^*,\bar{\omega}) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \times W$. Ta nói rằng $(\bar{v},\bar{u})$ là nghiệm ổn định Lipschitz toàn bộ của (4.4) ứng với bộ tham số $(\bar{v}^*,\bar{u}^*,\bar{\omega})$ nếu tồn tại một địa phương hóa $\vartheta(\cdot)$ đơn trị $\vartheta: \mathcal{V}_{(\bar{v}^*,\bar{u}^*)} \times \mathcal{V}_{\bar{\omega}} \to \mathcal{V}_{(\bar{v},\bar{u})}$ xác định trong một lân cận $\mathcal{V}_{(\bar{v}^*,\bar{u}^*)} \times \mathcal{V}_{\bar{\omega}} \times \mathcal{V}_{(\bar{v},\bar{u})}$ sao cho với mọi cặp tham số $(v_1^*,u_1^*,\omega_1), (v_2^*,u_2^*,\omega_2) \in \mathcal{V}_{(\bar{v}^*,\bar{u}^*)} \times \mathcal{V}_{\bar{\omega}}$ ta có tính chất ở dạng Lipschitz sau đây

$$||(v_1^*,u_1^*) - (v_2^*,u_2^*) - 2k(\vartheta(v_1^*,u_1^*,\omega_1) - \vartheta(v_2^*,u_2^*,\omega_2))||_{L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma)}$$

$\le ||(v_1^*,u_1^*) - (v_2^*,u_2^*)||_{L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma)} + \ell||\omega_1 - \omega_2||_W$, (4.6)

trong đó $k > 0$ và $\ell > 0$ là các hằng số.

Với mọi $(v^*,u^*) \in \mathcal{N}(v,u)$, ta ký hiệu

$\mathcal{C}(v,u,v^*,u^*) = T_{V_{ad}\times U_{ad}}(v,u) \cap \{(v^*,u^*)\}^\perp$, (4.7)

trong đó $T_{V_{ad}\times U_{ad}}(v,u)$ là nón tiếp tuyến của tập $V_{ad} \times U_{ad}$ tại điểm $(v,u) \in V_{ad} \times U_{ad}$. Với cặp điều khiển $(\bar{v},\bar{u}) \in V_{ad} \times U_{ad}$ và $(\hat{v}^*,\hat{u}^*) \in \mathcal{N}(\bar{v},\bar{u})$, ta xét các giới hạn sau

$\mathcal{C}_w(\bar{v},\bar{u},\hat{v}^*,\hat{u}^*) = \operatorname{Limsup}^w_{(v_k,u_k,v_k^*,u_k^*)\to(\bar{v},\bar{u},\hat{v}^*,\hat{u}^*)} \mathcal{C}(v_k,u_k,v_k^*,u_k^*)$, (4.8)

$\mathcal{C}_s(\bar{v},\bar{u},\hat{v}^*,\hat{u}^*) = \operatorname{Limsup}^s_{(v_k,u_k,v_k^*,u_k^*)\to(\bar{v},\bar{u},\hat{v}^*,\hat{u}^*)} \mathcal{C}(v_k,u_k,v_k^*,u_k^*)$, (4.9)

trong đó $(v_k^*,u_k^*) \in \mathcal{N}(v_k,u_k)$ với mọi $k \in \mathbb{N}$, giới hạn trên trong (4.8) được hiểu theo nghĩa Painlevé-Kuratowski và giới hạn trên trong (4.9) được hiểu theo nghĩa tương tự như Painlevé-Kuratowski mà trong đó sự hội tụ yếu tương ứng trong (4.8) được thay thế bằng sự hội tụ mạnh. Liên quan đến các định nghĩa của các tập trong (4.7), (4.8), (4.9) xem Mordukhovich *et al*. (2018) và Qui and Wachsmuth (2019).

Định lý sau đây thiết lập điều kiện cần và điều kiện đủ của sự ổn định Lipschitz toàn bộ cho các nghiệm của phương trình suy rộng (4.4). Việc chứng minh định lý này dựa trên một kết quả Mordukhovich *et al*. (2018) (Theorem 8.4) mà ở đó các tác giả thiết lập cho các bất đẳng thức biến phân tổng quát và đòi hỏi tập ràng buộc phải thỏa tính chất *polyhedric*; định nghĩa tính chất polyhedric của một tập có thể xem trong Mordukhovich *et al*. (2018) và Qui and Wachsmuth (2019). Trong mô hình bài toán điều khiển tối ưu (1.1)–(1.3), chúng tôi chứng minh được rằng tập ràng buộc của phương trình suy rộng (4.4) luôn thỏa tính chất polyhedric.

Định lý 4.1. Giả sử các giả thiết **(A1)**–**(A4)** được thỏa mãn. Xét $(\bar{v},\bar{u}) \in S(\bar{v}^*,\bar{u}^*,\bar{\omega})$ ứng với bộ tham số $(\bar{v}^*,\bar{u}^*,\bar{\omega}) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma) \times W$ và đặt

$(\hat{v}^*,\hat{u}^*) = (\bar{v}^*,\bar{u}^*) - \mathcal{J}'_{(v,u)}(\bar{v},\bar{u},\bar{\omega}) \in \mathcal{N}(\bar{v},\bar{u})$. (4.10)

Khi đó, ta có các khẳng định sau đây:

(i)Nếu cặp điều khiển $(\bar{v},\bar{u})$ là một nghiệm ổn định Lipschitz toàn bộ của (4.4) tương ứng với bộ tham số $(\bar{v}^*,\bar{u}^*,\bar{\omega})$, thì điều kiện xác định dương sau đây thỏa mãn

$\mathcal{J}''_{(v,u)}(\bar{v},\bar{u},\bar{\omega})\big((v,u),(v,u)\big) > 0,\ \ \forall (v,u) \in \mathcal{C}_s(\bar{v},\bar{u},\hat{v}^*,\hat{u}^*)\backslash\{(0,0)\}$. (4.11)

(ii) Nếu dạng toàn phương $Q(v,u) := \mathcal{J}''_{(v,u)}(\bar{v},\bar{u},\bar{\omega})\big((v,u),(v,u)\big)$ là một dạng Legendre trên $L^2(\Omega)\times L^2(\Gamma)$ và điều kiện xác định dương sau đây thỏa mãn

$$\mathcal{J}''_{(v,u)}(\bar{v},\bar{u},\bar{\omega})\big((v,u),(v,u)\big) > 0,\ \ \forall (v,u) \in \mathcal{C}_w(\bar{v},\bar{u},\hat{v}^*,\hat{u}^*)\backslash\{(0,0)\},$$

(4.12)

thì cặp điều khiển $(\bar{v},\bar{u})$ là một nghiệm ổn định Lipschitz toàn bộ của (4.4) tương ứng với bộ tham số $(\bar{v}^*,\bar{u}^*,\bar{\omega})$.

Chứng minh. Dựa vào cấu trúc của các tập điều khiển chấp nhận được V_{ad} và U_{ad} xác định bởi (1.4) và (1.5) và áp dụng Bayen *et al*. (2014) (Lemma 4.13) ta suy ra V_{ad} và U_{ad} là các tập polyhedric lần lượt tại $\bar{v}\in V_{ad}$ và $\bar{u}\in U_{ad}$ với mọi $(\bar{v},\bar{u})\in V_{ad}\times U_{ad}$. Từ đây ta suy ra V_{ad} và U_{ad} là các tập polyhedric, và do đó $V_{ad}\times U_{ad}$ cũng là một tập polyhedric. Sử dụng các giả thiết **(A1)**–**(A4)** ta kiểm chứng được rằng các giả thiết trong Mordukhovich *et al*. (2018) (Theorem 8.4) được thỏa mãn. Áp dụng Mordukhovich *et al*. (2018) (Theorem 8.4) ta suy ra các khẳng định **(i)** và **(ii)** của định lý. ☐

Chú ý 4.1. Xem định nghĩa dạng Legendre xác định trên không gian Hilbert chẳng hạn trong Mordukhovich *et al*. (2018) và Qui and Wachsmuth (2019).

Nhận xét 4.1. Ta có thể mở rộng nghiên cứu sự ổn định Lipschitz toàn bộ cho các nghiệm của phương trình suy rộng (4.4) sang phương trình suy rộng sau đây

$(v^*,u^*)\in \mathcal{J}'_{(v,u)}(v,u,\omega)+\mathcal{N}(v,u,\omega)$, (4.13)

trong đó

$\mathcal{N}(v,u,\omega) = N\big((v,u);V_{ad}(\omega)\times U_{ad}(\omega)\big),\ \ \forall (v,u)\in V_{ad}(\omega)\times U_{ad}(\omega)$. (4.14)

Nghĩa là, trong (4.13) và (4.14) tập điều khiển chấp nhận được $V_{ad}\times U_{ad}$ bị tác động bởi nhiễu $\omega\in W$, và ta có tập điều khiển chấp nhận được nhiễu tương ứng là $V_{ad}(\omega)\times U_{ad}(\omega)$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bayen, T., Bonnans, J.F., and Silva, F.J, 2014. Characterization of local quadratic growth for strong minima in the optimal control of semi-linear elliptic equations. Transactions of the American Mathematical Society 366(4): 2063–2087.

Casas, E., 2012. Second order analysis for bang-bang control problems of PDEs. SIAM Journal on Control and Optimization 50(4): 2355–2372.

Casas, E., Wachsmuth, D., and Wachsmuth, G., 2017. Sufficient second-order conditions for bang-bang control problems. SIAM Journal on Control and Optimization 55(5): 3066–3090.

Levy, A.B., Poliquin, R.A., and Rockafellar, R.T., 2000. Stability of locally optimal solutions. SIAM Journal on Optimization 10(2): 580–604.

Mordukhovich, B.S., 2006. Variational Analysis and Generalized Differentiation. I. Basic theory. Springer-Verlag, Berlin.

Mordukhovich, B.S., 2006. Variational Analysis and Generalized Differentiation. II. Applications. Springer-Verlag, Berlin.

Mordukhovich, B.S. and Nghia, T.T.A, 2014. Full Lipschitzian and Hölderian stability in optimization with applications to mathematical programming and optimal control. SIAM Journal on Optimization 24(3): 1344–1381.

Mordukhovich, B.S. and Nghia, T.T.A, 2016. Local monotonicity and full stability for parametric variational systems. SIAM Journal on Optimization 26(2): 1032–1059.

Mordukhovich, B.S., Nghia, T.T.A., and Pham, D.T., 2018. Full stability of general parametric variational systems. Set-Valued and Variational Analysis 26(4): 911–946.

Qui, N.T. and Wachsmuth, D., 2018. Stability for bang-bang control problems of partial differential equations. Optimization 67(12): 2157–2177.

Qui, N.T. and Wachsmuth, D., 2019. Full stability for a class of control problems of semilinear elliptic partial differential equations. SIAM Journal on Control and Optimization 57(4): 3021–3045.

Qui, N.T., 2020. Subdifferentials of marginal functions of parametric bang–bang control problems. Nonlinear Analysis 195, 111743.

Robinson, S.M., 1979. Generalized equations and their solutions. I. Basic theory. Point-to-set maps and mathematical programming. Mathematical Programming Studies (10): 128–141.

Tröltzsch, F., 2010. Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications. American Mathematical Society, Providence, RI.