Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2018.161

ẢNH VÀ TẠO ẢNH CỦA MODULE CON NGUYÊN TỐ, MODULE CON LŨY LINH

Lê Phương Thảo*, Nguyễn Thanh Hùng và Đỗ Thị Kim Thoản
Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Lê Phương Thảo (email: lpthao@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 13/05/2018
Ngày nhận bài sửa: 03/08/2018
Ngày duyệt đăng: 27/12/2018

Title:
On images and inverse images of prime submodules, nilpotent submodules

Từ khóa:
Ảnh và tạo ảnh, module con lũy linh, module con nguyên tố

Keywords:
Images and inverse images, nilpotent submodules, prime submodules

ABSTRACT

Prime ideals and nilpotent ideals are among the important topics in ring theory. Prime submodules and nilpotent submodules are generalizations of the above concepts in module theory. In this paper, images and inverse images of prime submodules, images and inverse images of nilpotent submodules of a module on a noncommutative ring are studied. Conditions to guarantee that images and inverse images of prime submodules are prime submodules, images and inverse images of nilpotent submodules are also nilpotent submodules are given and proved.

TÓM TẮT

Ideal nguyên tố và ideal lũy linh là các chủ đề nghiên cứu quan trọng của lý thuyết vành. Module con nguyên tố và module con lũy linh được xem là sự mở rộng của các khái niệm này trong lý thuyết module. Bài báo này nghiên cứu ảnh và tạo ảnh của các module con nguyên tố, ảnh và tạo ảnh của các module con lũy linh của một module trên vành không giao hoán. Các điều kiện để ảnh và tạo ảnh của các module con nguyên tố cũng là module con nguyên tố, ảnh và tạo ảnh của các module con lũy linh cũng là module con lũy linh được chỉ ra và chứng minh.

Trích dẫn: Lê Phương Thảo, Nguyễn Thanh Hùng và Đỗ Thị Kim Thoản, 2018. Ảnh và tạo ảnh của module con nguyên tố, module con lũy linh. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 54(9A): 59-65.

1 GIỚI THIỆU

Ideal nguyên tố và ideal lũy linh xuất hiện trong rất nhiều bài toán của lý thuyết vành. Trong đại số giao hoán, ideal nguyên tố là một tập con của vành mà có rất nhiều tính chất quan trọng như của các số nguyên tố trong vành các số nguyên. Ở đây, có sự liên kết chặt chẽ giữa các ideal nguyên tố và các phần tử lũy linh, cụ thể là giao của tất cả các ideal nguyên tố bằng tập hợp tất cả các phần tử lũy linh của vành. Ideal nguyên tố đóng vai trò quan trọng khi nghiên cứu các lớp vành đặc biệt như vành nguyên tố, vành nửa nguyên tố, vành Noether, vành Artin, miền nguyên Dedekind, … Ngoài ra, từ tập các ideal nguyên tố của một vành người ta xây dựng một cấu trúc tôpô, gọi là tôpô Zariski, và đã có nhiều nghiên cứu về không gian tôpô này.

Trong một vành không giao hoán, ta có các định nghĩa như sau: Một ideal P của vành R được gọi là *ideal nguyên tố* của R nếu với mọi ideal I, J của R, với $IJ \subset P$ thì $I \subset P$ hoặc $J \subset P$.

Một phần tử x của vành R được gọi là *phần tử lũy linh* nếu tồn tại số tự nhiên n sao cho $x^n = 0$. Một ideal phải (hoặc trái) I của vành R được gọi là *nil ideal phải* (*hoặc trái*) nếu mỗi phần tử của I đều là phần tử lũy linh. Một ideal I của vành R được gọi là *nil ideal* nếu mỗi phần tử của I đều là phần tử lũy linh.

Một ideal phải (hoặc trái) I của vành R được gọi là *ideal phải* (*hoặc trái*) *lũy linh* nếu tồn tại số tự nhiên n sao cho $I^n = 0$. Một ideal I của vành R được gọi là *ideal lũy linh* nếu tồn tại số tự nhiên n sao cho $I^n = 0$.

Các vấn đề liên quan đến ideal nguyên tố và ideal lũy linh được nhiều nhà toán học mở rộng và nghiên cứu trong lý thuyết module nhưng đa số những khái niệm này chỉ xuất hiện trong trường hợp của module trên vành giao hoán. Năm 2010, Sanh *et al.* đã giới thiệu một định nghĩa module con nguyên tố trên vành không giao hoán và nghiên cứu các tính chất của chúng (Sanh *et al.*, 2010, 2011; Ahmed *et al.*, 2013). Bài viết này sẽ sử dụng định nghĩa module con nguyên tố theo Sanh *et al.* (2010) để nghiên cứu các kết quả về ảnh và tạo ảnh của các module con nguyên tố.

Ideal lũy linh là một chủ đề quan trọng của lý thuyết vành. Khái niệm này được mở rộng và nghiên cứu trong trường hợp của module nhân trên vành giao hoán (Majid, 2008; Ansari-Toroghy and Farshadifar, 2012). Năm 2013, Thao and Sanh đưa ra một định nghĩa module con lũy linh trên vành không giao hoán và nghiên cứu được nhiều tính chất của chúng. Bài viết này sẽ sử dụng định nghĩa module con lũy linh theo Thao and Sanh (2013) để nghiên cứu các kết quả về ảnh và tạo ảnh của các module con lũy linh.

Trong toàn bộ bài báo này, tất cả các vành đều có đơn vị và tất cả các module là R-module phải. Khi vành R được xem là một R-module phải thì ta viết R_R. Cho M là một R-module phải và $S = \mathrm{End}_R(M)$, vành các tự đồng cấu của M. Một module con X của M được gọi là module con *hoàn toàn bất biến* của M nếu $s(X) \subset X$, với mọi $s \in S$, trong đó $s(X) = \{s(x) | x \in X\}$. Với định nghĩa này, tập hợp các module con hoàn toàn bất biến của M là tập khác rỗng và đóng với tổng và giao. Đặc biệt, một ideal phải của R là hoàn toàn bất biến của R_R nếu nó là ideal của R.

Cho $I, J \subset S$ và $X \subset M$. Ta ký hiệu:

$I(X) = \sum_{f \in I} f(X)$;

$\mathrm{Ker}(I) = \bigcap_{f \in I} \mathrm{Ker} f$;

và $IJ = \{\sum_{1 \le i \le n} x_i y_i \,|\, x_i \in I, y_i \in J, 1 \le i \le n, n \in \mathbb{N}\}$.

Với các ký hiệu này, ta thấy với bất kỳ R-module phải M và bất kỳ ideal phải I của R, tập hợp MI là module con hoàn toàn bất biến của M.

Tập hợp sau đây đóng vai trò quan trọng trong quá trình nghiên cứu về module con nguyên tố và module con lũy linh, đó là tập I_X. Với mỗi tập con $X \subset M$, ta ký hiệu $I_X = \{f \in S | f(M) \subset X\}$. Nếu X là một module con của M thì I_X là một ideal phải của S, và nếu X là một module con hoàn toàn bất biến của M thì I_X là một ideal của S. Một R-module phải M được gọi là *tự sinh* khi M sinh ra tất cả các module con của nó.

Định nghĩa 1.1 (Sanh *et al.*, 2010) Cho M là một R-module phải và X là một module con thật sự và hoàn toàn bất biến của M. Khi đó, X được gọi là *module con nguyên tố* của M (hoặc X nguyên tố trong M) nếu với mọi ideal I của S và với mọi module con hoàn toàn bất biến U của M, với $I(U) \subset X$ thì $I(M) \subset X$ hoặc $U \subset X$.

Đặc biệt, một ideal P của vành R được gọi là *ideal nguyên tố* nếu với mọi ideal I, J của R, với $IJ \subset P$ thì $I \subset P$ hoặc $J \subset P$.

Một R-module phải M được gọi là *module nguyên tố* nếu 0 là module con nguyên tố của M.

Một module con hoàn toàn bất biến X của M được gọi là *module con nửa nguyên tố* của M (hoặc X nửa nguyên tố trong M) nếu X là giao của các module con nguyên tố nào đó của M.

Căn nguyên tố của M, kí hiệu $P(M)$, là giao của tất cả các module con nguyên tố của M.

Căn của M, kí hiệu $Rad(M)$ hoặc $J(M)$, là giao của tất cả các module con tối đại của M.

Định lý sau đây đề ra tiêu chuẩn để kiểm tra một module con có là module con nguyên tố hay không.

Định lý 1.2 (Sanh *et al.*, 2010) Cho M là một R-module phải và X là một module con thật sự và hoàn toàn bất biến của M. Các điều kiện sau đây tương đương:

(1) X là module con nguyên tố của M;

(2) Với mọi ideal phải I của S và với mọi module con U của M, nếu $I(U) \subset X$ thì $I(M) \subset X$ hoặc $U \subset X$;

(3) Với mọi $\varphi \in S$ và mọi module con hoàn toàn bất biến U của M, nếu $\varphi(U) \subset X$ thì $\varphi(M) \subset X$ hoặc $U \subset X$;

(4) Với mọi ideal trái I của S và với mọi tập con A của M, nếu $IS(A) \subset X$ thì $I(M) \subset X$ hoặc $A \subset X$;

(5) Với mọi $\varphi \in S$ và với mọi $m \in M$, nếu $\varphi(S(m)) \subset X$ thì $\varphi(M) \subset X$ hoặc $m \in X$.

Hơn nữa, nếu M là module tự xạ ảnh thì những điều kiện trên tương đương với:

(6) M/X là module nguyên tố.

Định nghĩa 1.3 (Thao and Sanh, 2013) Cho M là một R-module phải và X là một module con của

M. Khi đó, X được gọi là *module con lũy linh* của M nếu I_X là một ideal phải lũy linh của S.

Từ Định nghĩa 1.3 ta thấy X là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M nếu và chỉ nếu I_X là một ideal lũy linh của S.

Trong bài báo này, Định nghĩa 1.1 về module con nguyên tố và Định nghĩa 1.3 về module con lũy linh được sử dụng để nghiên cứu ảnh và tạo ảnh của các module con này. Phần tiếp theo của bài báo được cấu trúc như sau: Phần 2 trình bày các kết quả về ảnh và tạo ảnh của các module con nguyên tố. Trong phần 3, các kết quả về ảnh và tạo ảnh của các module con lũy linh được trình bày chi tiết.

2 ẢNH VÀ TẠO ẢNH CỦA CÁC MODULE CON NGUYÊN TỐ

Với Định nghĩa 1.1, nhiều kết quả về module con nguyên tố đã được nghiên cứu (Sanh *et al.*, 2010, 2011; Ahmed *et al.*, 2013). Mệnh đề 2.1 và Mệnh đề 2.2 dưới đây cho ta kết quả về ảnh và tạo ảnh của module con nguyên tố qua toàn cấu chính tắc.

Mệnh đề 2.1 (Sanh *et al.*, 2010) Cho M là một module tự xạ ảnh, P là một module con nguyên tố của M, $A \subset P$ là một module con hoàn toàn bất biến của M. Khi đó P/A là module con nguyên tố của M/A.

Mệnh đề 2.2 (Sanh *et al.*, 2010) Cho M là một module tự xạ ảnh và A là một module con hoàn toàn bất biến của M. Nếu $\bar{P} \subset M/A$ là module con nguyên tố của M/A thì $\vartheta^{-1}(\bar{P})$ là module con nguyên tố của M, trong đó $\vartheta: M \longrightarrow M/A$ là toàn cấu chính tắc.

Trong trường hợp M, N là các R-module phải và $f: M \longrightarrow N$ là một đồng cấu, ta sẽ tìm điều kiện của M, N và f để ảnh và tạo ảnh của module con nguyên tố cũng là module con nguyên tố. Trước hết, ta xét các bổ đề sau:

Bổ đề 2.3 Cho M là một R-module tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh, và $S = \mathrm{End}_R(M)$ là vành các tự đồng cấu của M. Nếu M là một module Noether thì S là một vành Noether phải.

Chứng minh

Giả sử $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ là một dãy tăng các ideal phải của vành S. Khi đó $I_1(M) \subset I_2(M) \subset \cdots$ là dãy tăng các module con của M. Vì M là module Noether nên tồn tại số tự nhiên n sao cho $I_n(M) = I_k(M)$, với mỗi $k > n$. Do M là một module tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh nên với mỗi $k > n$, $I_n = Hom(M, I_n(M)) = Hom(M, I_k(M)) = I_k$ (Wisbauer, 1991). Khi đó dãy $I_1 \subset I_2 \subset \cdots$ là dãy dừng, do đó S là vành Noether phải. ∎

Bổ đề 2.4 Cho M, N là các R-module phải và $f: M \longrightarrow N$ là một toàn cấu; $S = \mathrm{End}_R(M)$ là vành các tự đồng cấu của M và $S' = \mathrm{End}_R(N)$ là vành các tự đồng cấu của N. Giả sử $\mathrm{Ker}f$ là một module con hoàn toàn bất biến của M. Khi đó các điều kiện sau thỏa mãn:

(1) Với mỗi phần tử $\alpha \in S$, tồn tại $\beta \in S'$ sao cho $f\alpha = \beta f$;

(2) Nếu V là một module con hoàn toàn bất biến của N thì $f^{-1}(V)$ là một module con hoàn toàn bất biến của M.

Chứng minh

(1) Lấy phần tử bất kỳ y của N. Do f là toàn cấu nên tồn tại $x \in M$ để $y = f(x)$. Đặt $\beta(y) = f\alpha(x)$. Khi đó β là một ánh xạ. Thật vậy, nếu $y = f(x) = f(x')$ thì $x - x' \in \mathrm{Ker}f$. Mà $\mathrm{Ker}f$ là module con hoàn toàn bất biến của M nên $\alpha(x - x') \in \mathrm{Ker}f$, suy ra $f\alpha(x) = f\alpha(x')$. Từ cách xác định ánh xạ β ta được $f\alpha = \beta f$.

Bây giờ ta kiểm tra β là một đồng cấu. Giả sử $y_1, y_2 \in N$ và $a, b \in R$. Khi đó tồn tại $x_1, x_2 \in M$ sao cho $y_1 = f(x_1)$ và $y_2 = f(x_2)$. Ta có

$$y_1a + y_2b = f(x_1)a + f(x_2)b$$
$$= f(x_1a + x_2b).$$

Từ đó $\beta(y_1a + y_2b) = f\alpha(x_1a + x_2b) = f\alpha(x_1)a + f\alpha(x_2)b = \beta(y_1)a + \beta(y_2)b$. Suy ra β là đồng cấu thỏa mãn $f\alpha = \beta f$.

(2) Giả sử V là một module con hoàn toàn bất biến của N. Đặt $U = f^{-1}(V)$. Lấy α là phần tử bất kỳ của S. Theo (1), tồn tại $\beta \in S'$ sao cho $f\alpha = \beta f$. Khi đó $f\alpha(U) = \beta f(U) = \beta(V) \subset V$. Suy ra $\alpha(U) \subset f^{-1}(V) = U$. Do đó U là một module con hoàn toàn bất biến của M. ∎

Định lý sau đây sẽ cho ta kết quả về ảnh của các module con nguyên tố.

Định lý 2.5 Cho M, N là các R-module phải và M là tự xạ ảnh. Giả sử $f: M \longrightarrow N$ là một toàn cấu với $\mathrm{Ker}f$ là một module con hoàn toàn bất biến của M. Nếu X là một module con nguyên tố của M và $\mathrm{Ker}f \subset X$ thì $f(X)$ là một module con nguyên tố của N.

Chứng minh

Gọi $S = \mathrm{End}_R(M)$ là vành các tự đồng cấu của M và $S' = \mathrm{End}_R(N)$ là vành các tự đồng cấu của N. Từ giả thiết ta suy ra $f(X)$ là một module con hoàn toàn bất biến của N. Hơn nữa $f(X) \neq N$ vì nếu

$f(X) = N = f(M)$ thì $M \subset X + \mathrm{Ker}f = X$, mâu thuẫn với $X \neq M$. Giả sử V là một module con hoàn toàn bất biến của N và $\beta \in S'$ với $\beta(V) \subset f(X)$. Ta sẽ chứng minh $\beta(N) \subset f(X)$ hoặc $V \subset f(X)$. Theo Bổ đề 2.4, $f^{-1}(V)$ là một module con hoàn toàn bất biến của M. Vì module M là tự xạ ảnh nên tồn tại $\alpha \in S$ để $\beta f = f\alpha$. Khi đó ta có $\beta(V) = \beta\left(f\left(f^{-1}(V)\right)\right) = f\alpha\left(f^{-1}(V)\right) \subset f(X)$. Điều này dẫn đến $\alpha\left(f^{-1}(V)\right) \subset X + \mathrm{Ker}f = X$. Do X là một module con nguyên tố của M nên theo Định lý 1.2 ta được $\alpha(M) \subset X$ hoặc $f^{-1}(V) \subset X$. Nếu $\alpha(M) \subset X$ thì $f\alpha(M) \subset f(X)$. Khi đó $\beta f(M) \subset f(X)$, dẫn đến $\beta(N) \subset f(X)$. Nếu $f^{-1}(V) \subset X$ thì $V \subset f(X)$. Vậy $f(X)$ là một module con nguyên tố của N. ■

Tiếp theo, Định lý 2.6 sẽ cho ta kết quả về tạo ảnh của các module con nguyên tố.

Định lý 2.6 Cho M, N là các R-module phải và M là tự xạ ảnh. Giả sử $f: M \longrightarrow N$ là một toàn cấu sao cho $\mathrm{Ker}f$ là một module con hoàn toàn bất biến của M. Nếu Y là một module con nguyên tố của N thì $f^{-1}(Y)$ là một module con nguyên tố của M.

Chứng minh

Đặt $S = \mathrm{End}_R(M)$, $S' = \mathrm{End}_R(N)$ và $X = f^{-1}(Y)$. Theo Bổ đề 2.4 ta có X là một module con hoàn toàn bất biến của M. Rõ ràng $X \neq M$. Giả sử $\varphi \in S$ và U là một module con hoàn toàn bất biến của M sao cho $\varphi(U) \subset X$. Ta sẽ chứng minh $\varphi(M) \subset X$ hoặc $U \subset X$. Theo Bổ đề 2.4, tồn tại $\beta \in S'$ sao cho $\beta f = f\varphi$. Do $\varphi(U) \subset X$ nên $f\varphi(U) \subset f(X) = Y$, và do đó $\beta f(U) \subset Y$. Từ U là một module con hoàn toàn bất biến của M và M là tự xạ ảnh, ta được $f(U)$ là một module con hoàn toàn bất biến của N. Mà Y nguyên tố trong N nên $\beta(N) \subset Y$ hoặc $f(U) \subset Y$. Nếu $\beta(N) \subset Y$ thì $\beta f(M) \subset Y$. Điều này dẫn đến $f\varphi(M) \subset Y$, do đó $\varphi(M) \subset f^{-1}(Y) = X$. Nếu $f(U) \subset Y$ thì $U \subset f^{-1}(Y) = X$. Vậy X là một module con nguyên tố của M theo Định lý 1.2. ■

Với kết quả của Định lý 2.6 và định nghĩa của căn nguyên tố của một module, ta có hệ quả sau đây.

Hệ quả 2.7 Cho M, N là các R-module phải và M là tự xạ ảnh. Giả sử $f: M \longrightarrow N$ là một toàn cấu với $\mathrm{Ker}f$ là một module con hoàn toàn bất biến của M. Khi đó $f\left(P(M)\right) \subset P(N)$.

Chứng minh

Gọi $\mathcal{H}$ là tập hợp tất cả các module con nguyên tố của N. Khi đó $P(N) = \bigcap_{Y \in \mathcal{H}} Y$ và do đó $f^{-1}\left(P(N)\right) = \bigcap_{Y \in \mathcal{H}} f^{-1}(Y)$. Với mỗi module con nguyên tố Y của N ta có $f^{-1}(Y)$ nguyên tố trong M theo Định lý 2.6. Từ đó suy ra $P(M) \subset f^{-1}\left(P(N)\right)$. Điều này dẫn đến $f\left(P(M)\right) \subset P(N)$. ■

3 ẢNH VÀ TẠO ẢNH CỦA CÁC MODULE CON LŨY LINH

Với Định nghĩa 1.3, một số kết quả về module con lũy linh đã được nghiên cứu (Thao and Sanh, 2013). Phần này dành trình bày các kết quả về ảnh và tạo ảnh của các module con lũy linh. Trước tiên, ta nhắc lại các mệnh đề được sử dụng khi chứng minh các kết quả của phần 3.

Mệnh đề 3.1 (Kasch, 1982) Trong một vành R, các điều kiện sau thỏa mãn:

(1) Tổng của hai ideal phải, trái hoặc hai phía lũy linh cũng lũy linh;

(2) Nếu R_R là Noether thì mọi nil ideal hai phía là lũy linh.

Mệnh đề 3.2 (Passman, 2004) Trong một vành R, tổng của một họ bất kỳ các nil ideal cũng là nil ideal.

Mệnh đề 3.3 (Thao and Sanh, 2013) Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Nếu N là một module con nửa nguyên tố của M thì N chứa tất cả các module con lũy linh của M. Đặc biệt, $P(M)$ chứa tất cả các module con lũy linh của M.

Mệnh đề 3.4 (Thao and Sanh, 2013) Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Nếu M là module Noether thì $P(M)$ là module con lũy linh lớn nhất của M.

Mệnh đề 3.5 (Thao and Sanh, 2013) Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Nếu M là module Artin thì M là module Noether, $Rad(M)$ lũy linh và $Rad(M) = P(M)$.

Bây giờ, ta xét ảnh của các module con lũy linh qua toàn cấu chính tắc. Mệnh đề sau đây cho ta kết quả về ảnh của một module con lũy linh qua toàn cấu chính tắc.

Mệnh đề 3.6 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh. Giả sử X, Y là các module con của M và $X \subset Y$. Khi đó các điều kiện sau thỏa mãn:

(1) Nếu Y là một module con lũy linh của M thì Y/X là một module con lũy linh của M/X;

(2) Nếu Y là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M thì Y/X là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M/X.

Chứng minh

(1) Đặt $S = \mathrm{End}_R(M)$, $\bar{S} = \mathrm{End}_R(M/X)$ và $I_{Y/X} = \{\phi \in \bar{S} \,|\phi(M/X) \subset Y/X\}$. Do Y là một module con lũy linh của M nên I_Y là một ideal phải lũy linh của S, do đó tồn tại số tự nhiên n sao cho $I_Y^n = 0$. Ta sẽ chứng minh $I_{Y/X}^n = 0$. Xét phần tử $\phi_1 \dots \phi_n$ với $\phi_i \in I_{Y/X}$, $i = 1, \dots, n$. Do M là tự xạ ảnh nên với mỗi $i = 1, \dots, n$, tồn tại $\varphi_i \in S$ sao cho $\phi_i \vartheta = \vartheta \varphi_i$ với $\vartheta: M \longrightarrow M/X$ là toàn cấu chính tắc. Khi đó $\phi_i(M/X) = \phi_i \vartheta(M) = \vartheta\varphi_i(M) = (\varphi_i(M) + X)/X \subset Y/X$ và do đó $\varphi_i(M) + X \subset Y$, $i = 1, \dots, n$. Từ đó suy ra $\varphi_i(M) \subset Y$, dẫn đến $\varphi_i \in I_Y$, $i = 1, \dots, n$. Mà $I_Y^n = 0$ nên $\varphi_1 \dots \varphi_n = 0$. Khi đó $\phi_1 \dots \phi_n(M/X) = \phi_1 \dots \phi_n \vartheta(M) = \vartheta\varphi_1 \dots \varphi_n(M) = 0$. Suy ra $\phi_1 \dots \phi_n = 0$ và do đó $I_{Y/X}^n = 0$, nghĩa là $I_{Y/X}$ là ideal phải lũy linh của vành $\bar{S}$. Vậy Y/X là một module con lũy linh của M/X.

(2) Nếu Y là một module con hoàn toàn bất biến của M thì Y/X là một module con hoàn toàn bất biến của M/X. Kết hợp với (1) ta được Y/X là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M/X. ∎

Mệnh đề tiếp theo trình bày kết quả về tạo ảnh của một module con lũy linh qua toàn cấu chính tắc.

Mệnh đề 3.7 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, X là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M. Giả sử M là một module Noether và $\bar{Y}$ là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M/X. Khi đó $\vartheta^{-1}(\bar{Y})$ là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M, trong đó $\vartheta: M \longrightarrow M/X$ là toàn cấu chính tắc.

Chứng minh

Đặt $S = \mathrm{End}_R(M)$, $\bar{S} = \mathrm{End}_R(M/X)$ và $Y = \vartheta^{-1}(\bar{Y})$. Do X là module con hoàn toàn bất biến của M nên với mỗi $f \in S$, tồn tại $\bar{f} \in \bar{S}$ sao cho $\bar{f}\vartheta = \vartheta f$. Khi đó $\vartheta f(Y) = \bar{f}\vartheta(Y) = \bar{f}(\bar{Y}) \subset \bar{Y} = \vartheta(Y) = Y/X$. Điều này dẫn đến $f(Y) + X \subset Y$, suy ra $f(Y) \subset Y$. Do đó Y là module con hoàn toàn bất biến của M.

Bây giờ ta sẽ chứng minh Y là module con lũy linh của M. Do Y là module con hoàn toàn bất biến của M nên I_Y là ideal hai phía của S. Đặt $I_{\bar{Y}} = \{\phi \in \bar{S} \,|\phi(M/X) \subset \bar{Y}\}$. Lấy $\varphi \in I_Y$. Do X là module con hoàn toàn bất biến của M, tồn tại $\bar{\varphi} \in \bar{S}$ sao cho $\bar{\varphi}\vartheta = \vartheta\varphi$. Khi đó $\bar{\varphi}(M/X) = \bar{\varphi}\vartheta(M) = \vartheta\varphi(M) \subset \vartheta(Y) = \bar{Y}$, dẫn đến $\bar{\varphi} \in I_{\bar{Y}}$. Vì $\bar{Y}$ là một module con lũy linh của M/X nên $I_{\bar{Y}}$ là ideal lũy linh của $\bar{S}$. Từ đó $\bar{\varphi}$ lũy linh, nghĩa là tồn tại số tự nhiên n để $\bar{\varphi}^n = 0$. Suy ra $0 = \bar{\varphi}^n(M/X) = \bar{\varphi}^n\vartheta(M) = \vartheta\varphi^n(M)$. Khi đó $\varphi^n(M) \subset X$, nghĩa là $\varphi^n \in I_X$. Mà X là một module con lũy linh của M nên φ^n lũy linh. Do đó tồn tại số tự nhiên k để $\varphi^{nk} = 0$. Suy ra φ lũy linh. Điều này dẫn đến I_Y là nil ideal của S. Mà M là một module Noether nên theo Bổ đề 2.3, S là một vành Noether phải. Theo Mệnh đề 3.1, I_Y là ideal lũy linh và do đó Y là module con lũy linh của M. ∎

Mệnh đề dưới đây cho ta kết quả về tổng của hai hoặc của họ bất kỳ các module con lũy linh của R-module M.

Mệnh đề 3.8 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Khi đó các điều kiện sau thỏa mãn:

(1) Tổng của hai module con lũy linh của M cũng là module con lũy linh của M;

(2) Nếu M là module Noether thì tổng của một họ bất kỳ các module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M cũng là module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M.

Chứng minh

(1) Giả sử X, Y là các module con lũy linh của M. Khi đó I_X, I_Y là các ideal phải lũy linh của S. Theo Mệnh đề 3.1, $I_X + I_Y$ cũng là ideal phải lũy linh của S. Mà $I_{X+Y} = I_X + I_Y$ nên $X + Y$ là module con lũy linh của M.

(2) Giả sử $\{X_i | i \in \mathcal{H}\}$ là một họ các module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M. Khi đó $\sum_{i \in \mathcal{H}} X_i$ cũng là một module con hoàn toàn bất biến của M. Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\sum_{i \in \mathcal{H}} X_i$ là một module con lũy linh của M. Từ Định nghĩa 1.3, I_{X_i} là ideal lũy linh của S và do đó cũng là nil ideal của S, với mỗi $i \in \mathcal{H}$. Theo Mệnh đề 3.2, $\sum_{i \in \mathcal{H}} I_{X_i}$ là một nil ideal của S. Mà M là một module Noether nên theo Bổ đề 2.3, S là một vành Noether phải. Khi đó $\sum_{i \in \mathcal{H}} I_{X_i}$ là ideal lũy linh theo Mệnh đề 3.1. Do M là một module tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh nên theo (Wisbauer, 1991) ta được:

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in \mathcal{H}} I_{X_i} &= Hom\left(M, \left(\sum_{i \in \mathcal{H}} I_{X_i}\right)(M)\right) \\
&= Hom\left(M, \sum_{i \in \mathcal{H}} I_{X_i}(M)\right) \\
&= Hom\left(M, \sum_{i \in \mathcal{H}} X_i\right) \\
&= Hom\left(M, I_{\sum_{i \in \mathcal{H}} X_i}(M)\right) \\
&= I_{\sum_{i \in \mathcal{H}} X_i}
\end{aligned}$$

Điều này dẫn đến $\sum_{i \in \mathcal{H}} X_i$ là module con lũy linh của M. ∎

Tiếp theo, ta tìm điều kiện của các R-module M, N và đồng cấu $f: M \longrightarrow N$ để ảnh của module con lũy linh cũng lũy linh.

Định lý 3.9 Cho M, N là các R-module phải và M là tự xạ ảnh. Giả sử $f: M \longrightarrow N$ là một toàn cấu. Khi đó các điều kiện sau thỏa mãn:

(1) Nếu X là một module con lũy linh của M và $\mathrm{Ker}f \subset X$ thì $f(X)$ là một module con lũy linh của N;

(2) Nếu X là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M và $\mathrm{Ker}f \subset X$ thì $f(X)$ là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của N.

Chứng minh

(1) Đặt $S = \mathrm{End}_R(M)$, $S' = \mathrm{End}_R(N)$ và $I_{f(X)} = \{\phi \in S' \mid \phi(N) \subset f(X)\}$. Do X là module con lũy linh của M nên I_X là một ideal phải lũy linh của S. Khi đó tồn tại số tự nhiên n để $I_X^n = 0$. Ta sẽ chứng minh $I_{f(X)}^n = 0$. Xét phần tử $\phi_1 \dots \phi_n$ với $\phi_i \in I_{f(X)}$, $i = 1, \dots, n$. Do M là tự xạ ảnh nên với mỗi $i = 1, \dots, n$, tồn tại $\varphi_i \in S$ sao cho $\phi_i f = f\varphi_i$. Khi đó $\phi_i(N) = \phi_i f(M) = f\varphi_i(M) \subset f(X)$ và do đó $\varphi_i(M) \subset X + \mathrm{Ker}f = X$, $i = 1, \dots, n$. Từ đó suy ra $\varphi_i \in I_X$, $i = 1, \dots, n$. Mà $I_X^n = 0$ nên $\varphi_1 \dots \varphi_n = 0$. Khi đó $\phi_1 \dots \phi_n(N) = \phi_1 \dots \phi_n f(M) = f\varphi_1 \dots \varphi_n(M) = 0$. Suy ra $\phi_1 \dots \phi_n = 0$ và từ đó $I_{f(X)}^n = 0$, nghĩa là $I_{f(X)}$ là ideal phải lũy linh của vành S'. Do đó $f(X)$ là một module con lũy linh của N.

(2) Từ giả thiết ta suy ra $f(X)$ là một module con hoàn toàn bất biến của N. Kết hợp với kết quả (1) ta được $f(X)$ là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của N. ∎

Định lý sau đây cho ta kết quả về tạo ảnh của module con lũy linh qua đồng cấu $f: M \longrightarrow N$.

Định lý 3.10 Cho M, N là các R-module phải và M là tự xạ ảnh; $f: M \longrightarrow N$ là một toàn cấu sao cho $\mathrm{Ker}f$ là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M. Giả sử M là một module Noether và Y là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của N. Khi đó $f^{-1}(Y)$ là một module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M.

Chứng minh

Đặt $S = \mathrm{End}_R(M)$, $S' = \mathrm{End}_R(N)$ và $X = f^{-1}(Y)$. Theo Bổ đề 2.4 ta được X là module con hoàn toàn bất biến của M. Khi đó I_X là một ideal hai phía của S.

Bây giờ ta sẽ chứng minh X là module con lũy linh của M. Đặt $I_Y = \{\phi \in S' \mid \phi(N) \subset Y\}$. Vì Y là một module con lũy linh của N nên I_Y lũy linh. Lấy $\varphi \in I_X$. Khi đó $\varphi(M) \subset X$. Do $\mathrm{Ker}f$ là một module con hoàn toàn bất biến của M nên theo Bổ đề 2.4, tồn tại $\alpha \in S'$ sao cho $\alpha f = f\varphi$. Khi đó $f\varphi(M) \subset f(X) = Y$ và do đó $\alpha f(M) \subset Y$. Suy ra $\alpha(N) \subset Y$, nghĩa là $\alpha \in I_Y$. Do đó tồn tại số tự nhiên n để $\alpha^n = 0$. Từ đó $f\varphi^n(M) = \alpha^n f(M) = \alpha^n(N) = 0$, dẫn đến $\varphi^n(M) \subset \mathrm{Ker}f$. Mà $\mathrm{Ker}f$ là một module con lũy linh của M nên φ^n lũy linh. Khi đó tồn tại số tự nhiên k để $\varphi^{nk} = 0$. Suy ra φ lũy linh. Điều này dẫn đến I_X là nil ideal của S. Mà M là một module Noether nên theo Bổ đề 2.3, S là một vành Noether phải. Theo Mệnh đề 3.1, I_X là ideal lũy linh và do đó X là module con lũy linh của M. ∎

Đối với tổng của các ideal lũy linh trong vành, ta có kết quả sau (Wisbauer, 1991): Trong một vành bất kỳ, ta có:

$N_P(R) :=$ tổng của tất cả các ideal trái lũy linh

$=$ tổng của tất cả các ideal phải lũy linh

$=$ tổng của tất cả các ideal lũy linh.

Tiếp theo, ta xét định nghĩa sau trong trường hợp của các R-module.

Định nghĩa 3.11 Cho M là một R-module phải. Ta định nghĩa:

$N_P(M)$:= tổng của tất cả các module con lũy linh của M.

Rõ ràng, $N_P(M)$ là một module con của M. Sau đây, ta sẽ xét mối quan hệ của $N_P(M)$, $P(M)$ và $Rad(M)$.

Định lý 3.12 Cho M là một R-module phải, hữu hạn sinh và tự sinh. Khi đó các điều kiện sau thỏa mãn:

(1) $N_P(M) =$ tổng của tất cả các module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M;

(2) $N_P(M) \subset P(M)$.

Chứng minh

(1) Gọi $\mathcal{F} = \{I \mid I$ là ideal phải lũy linh của $S\}$,

$\mathcal{G} = \{I \mid I$ là ideal lũy linh của $S\}$,

$\mathcal{H} = \{X \mid X$ là module con lũy linh của $M\}$,

$\mathcal{K} = \{X \mid X$ là module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của $M\}$.

Ta đã biết X là module con lũy linh của M khi và chỉ khi I_X là ideal phải lũy linh của S, và X là module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M khi và chỉ khi I_X là ideal lũy linh của S nên $N_P(S) = \sum_{I \in \mathcal{F}} I = \sum_{X \in \mathcal{H}} I_X = I_{\sum_{X \in \mathcal{H}} X} = I_{N_P(M)}$.

Mặt khác, $N_P(S) = \sum_{I \in \mathcal{G}} I = \sum_{X \in \mathcal{K}} I_X = I_{\sum_{X \in \mathcal{K}} X}$. Điều này dẫn đến $N_P(M) = \sum_{X \in \mathcal{K}} X$, nghĩa là $N_P(M) =$ tổng của tất cả các module con lũy linh và hoàn toàn bất biến của M.

(2) Từ Mệnh đề 3.3, $P(M)$ chứa tất cả các module con lũy linh của M. Do đó $N_P(M) \subset P(M)$. ■

Từ Mệnh đề 3.4 và Định lý 3.12 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 3.13 Cho M là một R-module phải, hữu hạn sinh và tự sinh. Nếu M là module Noether thì $N_P(M) = P(M)$.

Từ Mệnh đề 3.5 và Định lý 3.12 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 3.14 Cho M là một R-module phải, hữu hạn sinh và tự sinh. Nếu M là module Artin thì $N_P(M) = P(M) = Rad(M)$.

4 KẾT LUẬN

Bài báo này đã trình bày một số kết quả về ảnh và tạo ảnh của các module con nguyên tố của một R-module. Vấn đề ảnh và tạo ảnh của các module con lũy linh, tổng của các module con lũy linh cũng được trình bày cùng chứng minh chi tiết. Các kết quả đạt được trong bài báo có thể được mở rộng cho bài toán ảnh và tạo ảnh của các module con nil, tổng của các module con nil của một R-module M và đó sẽ là định hướng nghiên cứu, phát triển từ kết quả của bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ahmed, K. F. U., Thao, L. P. and Sanh, N. V., 2013. On semiprime modules with chain conditions. East-West Journal of Mathematics. 15 (2): 135-151.

Ansari-Toroghy, H. and Farshadifar, F., 2012. Fully idempotent and coidempotent modules. Bulletin of the Iranian Mathematical Society. 38 (4): 987-1005.

Kasch, F., 1982. Module and Rings. Academic Press Inc. (London) LTD, 372 pages.

Majid M. A., 2008. Idempotent and Nilpotent submodules of multiplication modules. Communications in Algebra. 36 (12): 4620-4642.

Passman, D. S, 2004. A course in Ring theory. AMS Chelsea Publishing, American Mathematical Society-Providence. Rhode Island, 306 pages.

Sanh, N. V., Vu, N. A., Ahmed, K. F. U., Asawasamrit, S. and Thao, L. P., 2010. Primeness in module category. Asian-European Journal of Mathematics. 3 (1): 145-154.

Sanh, N. V., Asawasamrit, S., Ahmed, K. F. U. and Thao, L. P., 2011. On prime and semiprime Goldie modules. Asian-European Journal of Mathematics. 4 (2): 321-334.

Thao, L. P. and Sanh, N. V., 2013. A generalization of Hopkins-Levitzki theorem. Southeast Asian Bulletin of Mathematics. 37 (4): 591-600.

Wisbauer, R., 1991. Foundations of Module and Ring Theory. Gordon and Breach. Tokyo, 606 pages.