Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2018.162

XÂY DỰNG ẢNH CỦA ĐỒNG CẤU CHUYỂN SINGER HẠNG 3

Phạm Bích Như*
Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ
**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Phạm Bích Như (email: pbnhu@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 26/03/2018
Ngày nhận bài sửa: 25/05/2018
Ngày duyệt đăng: 27/12/2018

Title:
Construction image of the third Singer transfer

Từ khóa:
Đại số Steenrod, đối đồng điều, đồng cấu đại số, đồng cấu chuyển Singer, giải thức Bar

Keywords:
Algebraic homomorphism, cohomology, resolution Bar, Singer transfer, Steenrod algebra

ABSTRACT

The cohomology of the Steenrod algebra is one of the most important objects in calculating the stable homotopy group of spheres through the Adams range. Algebraic homomorphism is considered an algebraic form of the geometric homomorphism on the Adams range. It has the ability to detect many non-trivial elements in the subject matter of algebraic Steenrod. Some authors studied this matter on field of characteristic 2, however it has not been studied much on field of characteristic odd prime p. This article is aimed to build the Singer transfer rank 3 on field of characteristic odd prime p and some examples on field of characteristic 3.

TÓM TẮT

Đối đồng điều của đại số Steenrod là một trong những đối tượng quan trọng trong việc tính nhóm đồng luân ổn định của mặt cầu thông qua dãy phổ Adams. Đồng cấu chuyển đại số Tr_s được xem như dạng đại số của đồng cấu chuyển hình học trên trang E_s của dãy phổ Adams. Nó có khả năng phát hiện được nhiều phần tử không tầm thường trong đối đồng điều của đại số Steenrod. Một số tác giả đã nghiên cứu về vấn đề này trên trường có đặc số 2, tuy nhiên trên trường đặc số nguyên tố p lẻ vẫn chưa được nghiên cứu nhiều. Bài báo này xây dựng ảnh đồng cấu chuyển Singer hạng 3 trên trường có đặc số p lẻ và một số ví dụ trên trường có đặc số $p=3$.

Trích dẫn: Phạm Bích Như, 2018. Xây dựng ảnh của đồng cấu chuyển Singer hạng 3. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 54(9A): 66-71.

1 GIỚI THIỆU

Với ý tưởng nghiên cứu đối đồng điều của đại số Steenrod bằng công cụ lý thuyết bất biến modular, năm 1989, Singer đã xây dựng một đồng cấu thuần túy đại số, gọi là đồng cấu chuyển đại số (hay còn gọi là đồng cấu chuyển Singer) Tr_s. Đồng cấu chuyển đại số của Singer Tr_s còn được xem như dạng đại số của đồng cấu chuyển hình học trên trang E_2 của dãy phổ Adams. Ngay lập tức nó thu hút được sự chú ý của các nhà toán học. Trên trường có đặc số bằng 2, với sự kiện Tr_s được chứng minh là các đẳng cấu với $s \leq 3$ và $Tr = \oplus_s Tr_s$ là một đồng cấu đại số (Singer, 1989) cùng với những tính toán về ảnh của đồng cấu chuyển đại số ở số chiều thấp (Bruner *et al.*, 2005; Hung, 2005; Ha, 2007; Quynh, 2007; Nam, 2008; Hung and Quynh, 2009; Chon and Ha, 2012; Chon and Ha, 2014) chứng tỏ rằng đồng cấu chuyển đại số có khả năng phát hiện được nhiều phần tử không tầm thường trong đối đồng điều của đại số Steenrod, do đó nó được kỳ vọng là một công cụ hữu hiệu để nghiên cứu đối đồng điều của đại số Steenrod. Ở Việt Nam, việc nghiên cứu về đồng cấu chuyển Singer và các ứng dụng của nó cũng được nhiều nhà toán học quan tâm như Hung, 2005; Ha, 2007; Sum, 2010; Chon and Ha, 2012, 2014. Từ đó, có thể khẳng định những nhóm nghiên cứu của Việt Nam đã có đóng góp quan trọng cho hướng nghiên cứu này. Họ đã hoàn thành việc mô tả ảnh của đồng cấu chuyển đại số Tr_s, với s=4, và chỉ ra một số đặc tính quan trọng của Tr_s. Điển hình cho các đóng góp này là việc chứng minh Tr_s, s>5 không là đẳng cấu tại vô hạn bậc (Hung, 2005). Tuy nhiên, những kết quả trên chỉ tập trung chủ yếu vào nghiên cứu đồng cấu chuyển đại số trên trường có đặc số 2. Cho đến hiện tại các đóng góp về đồng cấu chuyển đại số trên trường đặc số p, với p lẻ, là hết sức hạn chế (Crossley, 1999). Do đó, việc xác định ảnh của đồng cấu chuyển đại số vẫn còn là một vấn đề cần được quan tâm nghiên cứu, đặc biệt là trên trường có đặc số p, với p lẻ.

2 KIẾN THỨC CƠ BẢN

2.1 Phức dây chuyền

Định nghĩa 1: Cho R là một vành. Phức dây chuyền (M,d) là một họ các R-mô đun (M_i,d_i)

$$\cdots \leftarrow M_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} M_n \xleftarrow{d_n} M_{n+1} \xleftarrow{d_{n+1}} \cdots$$

thỏa $d_{n-1}d_n=0$, tức là $\operatorname{Im} d_n \subset \operatorname{Ker} d_{n-1}$.

Định nghĩa 2: Cho phức dây chuyền (M,d)

$$\cdots \leftarrow M_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} M_n \xleftarrow{d_n} M_{n+1} \xleftarrow{d_{n+1}} \cdots$$

và phức dây chuyền (N,d')

$$\cdots \leftarrow N_{n-1} \xleftarrow{d'_{n-1}} N_n \xleftarrow{d'_n} N_{n+1} \xleftarrow{d'_{n+1}} \cdots.$$

Khi đó, phức (N,d') được gọi là phức con của phức (M,d) nếu $\begin{cases} N_n \subset M_n \\ d'_n = d_n|_{N_n} \\ d_{n-1}(N_n) \subset N_{n-1} \end{cases}$

Định nghĩa 3: Cho phức dây chuyền (M,d)

$$\cdots \leftarrow M_{n-1} \xleftarrow{d_{n-1}} M_n \xleftarrow{d_n} M_{n+1} \xleftarrow{d_{n+1}} \cdots.$$

Khi đó, nếu $z,b \in M_n$ thỏa $z \in \operatorname{Ker} d_{n-1}, b \in \operatorname{Im} d_n$ thì z được gọi là n-chu trình và b được gọi là n-biên. Ngoài ra, $H_n(M,d) = \operatorname{Ker} d_{n-1} / \operatorname{Im} d_n$ được gọi là nhóm đồng điều thứ n và $H_*(M,d) = \oplus H_n(M,d)$ được gọi là đồng điều của phức (M,d).

Định nghĩa 4: Cho hai phức dây chuyền (M,d) và (M',d'). Một đồng cấu dây chuyền $f:(M,d)\to(M',d')$ là một họ các đồng cấu mô đun $f_n: M_n \to M'_n$ sao cho biểu đồ sau giao hoán

$$\begin{tikzcd}
\cdots & M_{n-1} \arrow[l] \arrow[d] & M_n \arrow[l, "d_{n-1}"'] \arrow[d] & M_{n+1} \arrow[l, "d_n"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l, "d_{n+1}"'] \\
\cdots & M'_{n-1} \arrow[l] & M'_n \arrow[l, "d'_{n-1}"] & M'_{n+1} \arrow[l, "d'_n"] & \cdots \arrow[l, "d'_{n+1}"]
\end{tikzcd}$$

Định nghĩa 5: Cho

$$0 \longrightarrow (M,d') \xrightarrow{f} (N,d) \xrightarrow{g} (P,d'') \longrightarrow 0$$

là một dãy khớp ngắn của phức dây chuyền. Tại mỗi số nguyên n tồn tại một ánh xạ $\partial_*: H_n(P) \to H_{n-1}(M)$ thỏa

$$\cdots \longrightarrow H_n(M) \xrightarrow{H_n(f)} H_n(N) \xrightarrow{H_n(g)} H_n(P) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(M) \longrightarrow \cdots$$

trong đó, $H_n(f): H_n(M) \to H_n(N)$ được xác định $H_n(f)([z]) = [f_n(z)]$, $\forall z \in M_n$ (z là n-chu trình trong M_n).

Đồng cấu ∂_* được gọi là đồng cấu nối.

Việc xác định ảnh của đồng cấu nối được xác định theo sơ đồ sau:

$$\begin{tikzcd}
 & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M_{n+1} \arrow[r, "f_{n+1}"] \arrow[d, "d'_n"'] & y_1 \in N_{n+1} \arrow[r, "g_{n+1}"] \arrow[d, "d_n"'] & z_1 \in P_{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_n"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & x_1 \in M_n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "d'_{n-1}"'] & y \in N_n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "d_{n-1}"'] & z \in P_n \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n-1}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & x \in M_{n-1} \arrow[r, "f_{n-1}"] \arrow[d, "d'_{n-2}"'] & N_{n-1} \arrow[r, "g_{n-1}"] \arrow[d, "d_{n-2}"'] & P_{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "d''_{n-2}"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & M_{n-2} \arrow[r, "f_{n-2}"] \arrow[d] & N_{n-2} \arrow[r, "g_{n-2}"] \arrow[d] & P_{n-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

$\partial_*: H_n(P) \to H_{n-1}(M)$ được xác định $\partial_*([z]) = [x]$, trong đó z là n-chu trình trong P_n và x là $(n-1)$-chu trình trong M_{n-1}.

2.2 Giải thức Bar

Cho A là một đại số và M là một A-mô đun phải, khi đó $A\otimes M$ là một A-mô đun với tác động theo quy tắc $a(a'\otimes m) = aa'\otimes m$. Đặt $\overline{B*}(A,M)$ là một phức của A-mô đun với bậc n là

$$I \otimes I \otimes \cdots \otimes I \otimes M.$$

Vi phân được cho bởi

$$\partial(a\left[a_1|\cdots|a_n\right]m)=(-1)^{e_0}aa_1\left[a_2|\cdots|a_n\right]m$$
$$+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{e_i}a\left[a_1|\cdots|a_ia_{i+1}|\cdots|a_n\right]m$$
$$-(-1)^{e_{n-1}}a\left[a_1|\cdots|a_{n-1}\right]a_nm$$

$\overline{B*}(A,M)\to M$ là một dãy thức tự do của M và được gọi là giải thức Bar.

2.3 Đồng cấu chuyển đại số

Cho $\mathbb{F}_p$ là một trường có đặc số nguyên tố p lẻ, V_s là một $\mathbb{F}_p$ - không gian véc tơ s chiều và BV_s là không gian phân loại của nhóm cộng của không gian V_s. Đối đồng điều modulo p của BV_s, ký hiệu $H^*(BV_s)=\mathbb{F}_p[y]\otimes E(x)$, trong đó $\mathbb{F}_p[y]$ là đại số đa thức sinh bởi y và $E(x)$ là đại số ngoài sinh bởi x với x, y thỏa $\deg(y)=2, \deg(x)=1$ và $\beta(x)=y$. Khi đó,

$$H^*(BV_s)^n=\mathbb{F}_p[y_1,y_2,\ldots,y_n]\otimes E(x_1,x_2,\ldots,x_n)$$

,trong đó, $\deg(x_i)=1, \deg(y_i)=2$ và $\beta(x_i)=y_i$ và khi $V_s=\mathbb{Z}/p$ thì các phần tử của $H^*(B\mathbb{Z}/p)^n$ có dạng $x_1^{\varepsilon_1}y_1^{i_1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2}\ldots x_n^{\varepsilon_n}y_n^{i_n}$ với $\varepsilon_j=0$ hoặc 1 và $i_j\geq 0$ với $j=1,\cdots,n.$

Đồng cấu chuyển đại số

$$\varphi_s:\mathrm{Tor}^A_{s,s+t}(\mathbb{F}_p,\mathbb{F}_p)\to\mathrm{Tor}^A_{0,t}(\mathbb{F}_p,P_s)\cong(\mathbb{F}_p\otimes_A P_s)_t.$$

Đồng cấu này được xây dựng bởi Singer và nó được xem như là dạng đại số của đồng cấu chuyển hình học $\pi_*(BV_s)_+\to\pi_*(S^0)$. Trong phần này, một ánh xạ giữa các dãy phổ May được xây dựng

$$E^r\psi_s:E^r_{p,q,t}(\mathbb{F}_p)\to E^r_{p,q-s,t-s}(P_s).$$

Ánh xạ này sẽ hội tụ về đồng cấu chuyển đại số φ_s. Hơn nữa, $E^\infty\psi_s$ có bậc đồng điều $p+q=s$ trùng với ánh xạ cảm sinh của đồng cấu chuyển trong mô đun phân bậc kết hợp tương ứng.

Tác động của các phần tử trong đại số Steenrod *A* được xác định bởi các quan hệ sau:

$$P^i(xy)=\sum_{k+l=i}P^k(x)P^l(y),$$
$$\beta(xy)=\beta(x)y+(-1)^{|x|}x\beta(y),$$
$$P^i(x)=0,\ \forall i>0,$$
$$P^k(xy^j)=xP^k(y^j),$$
$$\beta P^k(xy^j)=\beta(x)P^k(y^j),$$
$$\beta(xy^{-1})=1,$$
$$P^k(xy^{-1})=\binom{-1}{k}xy^{(p-1)k-1}=(-1)^k xy^{(p-1)k-1},$$
$$P^k(y^i)=\binom{i}{k}y^{(p-1)k+i}.$$

3 KẾT QUẢ CHÍNH

3.1 Xây dựng đồng cấu chuyển Singer hạng 1

Cho dãy khớp ngắn

$0\to P_1\xrightarrow{i}\widehat{P_1}\xrightarrow{\pi}\Sigma^{-1}\mathbb{F}_p\to 0$, trong đó,

$$P_1=H^*(B\mathbb{Z}/p)=Span_{\mathbb{F}_p}\{x^\varepsilon y^j\}_{\varepsilon\in\{0,1\},\, j\geq 0},$$

$$\widehat{P}_1=Span_{\mathbb{F}_p}\{xy^{-1},x^\varepsilon y^j\}_{\varepsilon\in\{0,1\},\, j\geq 0},$$

và $\pi:\begin{cases} xy^{-1} & \mapsto \Sigma^{-1}1 \\ x^\varepsilon y^j & \mapsto 0\end{cases}.$

Dãy khớp trên cảm sinh dãy khớp ngắn trên dãy thức Bar

$$0\to B_k(P_1)\xrightarrow{i}B_k(\widehat{P_1})\xrightarrow{\pi}B_k(\Sigma^{-1}\mathbb{F}_p)\to 0.$$

Dãy khớp này sinh ra đồng cấu nối

$$\delta_1:\mathrm{Tor}_k(\mathbb{F}_p,\mathbb{F}_p)\to\mathrm{Tor}_{k-1}(\mathbb{F}_p,\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}/p)).$$

Khi $n=1$ ta có đồng cấu chuyển Singer hạng 1

$$Tr_1:\mathrm{Tor}_1(\mathbb{F}_p,\mathbb{F}_p)\to\mathrm{Tor}_1(\mathbb{F}_p,\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}/p))=\mathbb{F}_p\otimes_A\mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}/p)$$

Xây dựng biểu diễn của δ_1

Lấy $u=\sum[\theta_1|\cdots|\theta_k]\Sigma^{-1}1\in B_k(\Sigma^{-1}\mathbb{F}_p)$ sao cho $\partial(u)=0$ tức là

$$\sum\Big(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\lambda_i}[\theta_1|\cdots|\theta_i\theta_{i+1}|\cdots|\theta_k]\Sigma^{-1}1$$
$$-\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(\Sigma^{-1}1)\Big)$$

$$=\sum\Big(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\lambda_i}[\theta_1|\cdots|\theta_i\theta_{i+1}|\cdots|\theta_k]\Sigma^{-1}1\Big)=0.$$

Khi đó, nghịch ảnh của u qua π là

$$v=\sum[\theta_1|\cdots|\theta_k]\mathrm{xy}^{-1}.$$

Ta có

$$\partial(v)=\sum\Big(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\lambda_i}[\theta_1|\cdots|\theta_i\theta_{i+1}|\cdots|\theta_k]xy^{-1}$$
$$-\sum(-1)^{\lambda_k-1}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(xy^{-1})\Big)$$
$$=-\sum(-1)^{\lambda_k-1}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(xy^{-1})\in B_{k-1}(H^*(B\mathbb{Z}/p)).$$

Do đó,

$$\delta_1 : \sum[\theta_1|\cdots|\theta_k]\Sigma^{-1}1 \mapsto -\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(xy^{-1})$$

với $\lambda_{k-1} = \deg\theta_1 + \cdots + \deg\theta_{k-1}$.

Khi k=1 ta có $\varphi_1 : [\theta]\Sigma^{-1}1 \mapsto -\theta(xy^{-1})$.

Ví dụ: Trong đại số Steenrod A_3, ta xác định ảnh đồng cấu chuyển hạng 1 trên dãy thức Bar

$$\varphi([\beta]) = -\beta(xy^{-1}) = -1,$$

$$\varphi([P^1]) = -P^1(xy^{-1}) = -xP^1(y^{-1}) = xy,$$

$$\varphi([P^3]) = -P^3(xy^{-1}) = -(-1)^3 xy^5,$$

$$\varphi([P^{3^n}]) = -P^{3^n}(xy^{-1}) = -(-1)^{3^n} xy^{2.3^n-1} = xy^{2.3^n-1}.$$

Như vậy, $\mathbb{F}_3 \otimes_{A_3} H^*(B\mathbb{Z}/3)$ có cơ sở gồm các đa thức $\left\{-1, xy^{2.3^n-1}\right\}_{n\geq 0}$ và $\mathrm{Tor}_{3,t}(\mathbb{F}_3,\mathbb{F}_3)$ có cơ sở gồm các phần tử có dạng $\left\{\beta, P^{3^n}\right\}_{n\geq 0}$ và φ_1 là ảnh của đồng cấu của Tr_1 trên giải thức Bar.

3.2 Xây dựng đồng cấu chuyển Singer hạng 2

Cho dãy khớp ngắn

$$0 \to P_2 \xrightarrow{i} \widehat{P_2} \xrightarrow{\pi} \Sigma^{-1}P_1 \to 0,$$

trong đó

$$P_2 = P_1 \otimes P_1 = H^*(B\mathbb{Z}/p)^2$$

$$= Span_{\mathbb{F}_p}\{x_1^{\varepsilon_1} y_1^{i_1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2}\}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{0,1\};i_1,i_2\geq 0},$$

$$\widehat{P}_2 = P_1 \otimes \widehat{P}_1$$

$$= Span_{\mathbb{F}_p}\{x_1y_1^{-1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2}, x_1^{\varepsilon_1}y_1^{i_1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2}\}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{0,1\};i_1,i_2\geq 0},$$

và $\pi : \begin{cases} x_1y_1^{-1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2} & \mapsto & x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2} \\ x_1^{\varepsilon_1}y_1^{i_1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2} & \mapsto & 0 \end{cases}$.

Dãy khớp trên cảm sinh dãy khớp ngắn trên dãy thức Bar

$$0 \to B_k(P_2) \xrightarrow{i} B_k(\widehat{P}_2) \xrightarrow{\pi} B_k(\Sigma^{-1}P_1) \to 0.$$

Dãy khớp này sinh ra đồng cấu nối

$$\delta_2 : \mathrm{Tor}_k(\mathbb{F}_p, \Sigma^{-1}P_1) \to \mathrm{Tor}_{k-1}(\mathbb{F}_p, P_2).$$

Ta lấy tích hai đồng cấu nối δ_1 và δ_2 ta được đồng cấu nối

$$\delta_2\delta_1 : \mathrm{Tor}_k(\mathbb{F}_p, \Sigma^{-2}\mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}_{k-1}(\mathbb{F}_p, P_2).$$

Khi n=2 ta có đồng cấu chuyển Singer hạng 2

$$Tr_2 : \mathrm{Tor}_{2,t+2}(\mathbb{F}_p,\mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}_{0,t}(\mathbb{F}_p, \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}/p)^2) = \mathbb{F}_p \otimes_A \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}/p)^2$$

Xây dựng biểu diễn của δ_2

Lấy $u = \sum[\theta_1|\cdots|\theta_k]\Sigma^{-1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2} \in B_k(\Sigma^{-1}(H^*(B\mathbb{Z}/p)^2))$ sao cho $\partial(u) = 0$ tức là

$$\sum\Bigg(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\lambda_i}[\theta_1|\cdots|\theta_i\theta_{i+1}|\cdots|\theta_k]\Sigma^{-1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2}$$

$$\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2})\Bigg) = 0.$$

Khi đó, nghịch ảnh của u qua π là

$$v = \sum[\theta_1|\cdots|\theta_k]x_1y_1^{-1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2}.$$

Ta có

$$\partial(v) = \sum\Big(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\lambda_i}[\theta_1|\cdots|\theta_i\theta_{i+1}|\cdots|\theta_k]x_1y_1^{-1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2}$$
$$-\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(x_1y_1^{-1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2})\Big)$$

$$= \sum\Big(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\lambda_i}[\theta_1|\cdots|\theta_i\theta_{i+1}|\cdots|\theta_k]x_1y_1^{-1}x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2}$$
$$-\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]x_1y_1^{-1}\theta_k(x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2})\Big)$$
$$-\sum_{|\theta_k''|>0}(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k'(x_1y_1^{-1})\theta_k''(x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2})$$
$$= -\sum_{|\theta_k''|>0}(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k'(x_1y_1^{-1})\theta_k''(x_2^{\varepsilon_2}y_2^{i_2})$$
$$\in B_{k-1}(H^*(B\mathbb{Z}/p)^2).$$

Do đó,

$$\delta_2\delta_1 : \sum[\theta_1|\cdots|\theta_k]\sum{}^{-1}1$$
$$\mapsto -\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(x_2y_2^{-1})$$
$$\mapsto -\sum_{|\theta_{k-1}''|>0}(-1)^{\lambda_{k-1}}(-1)^{\lambda_{k-2}}$$
$$[\theta_1|\cdots|\theta_{k-2}]\theta_{k-1}'(x_1y_1^{-1})\theta_{k-1}''(\theta_k(x_2y_2^{-1})).$$

Khi $k=2$ ta có

$$\varphi_2 : [\theta_1|\theta_2]\Sigma^{-1}1 \mapsto \sum_{|\theta_1''|>0}(-1)^{|\theta_1|}\theta_1'(x_1y_1^{-1})\theta_1''(\theta_2(x_2y_2^{-1})).$$

Ví dụ: Trong đại số Steenrod A_3, ta xác định ảnh đồng cấu chuyển hạng 2 trên dãy thức Bar

$$\varphi_2([P^1 \mid P^3]) = (-1)^4(P^1(x_1y_1^{-1})P^0(P^3(x_2y_2^{-1}))$$
$$+P^0(x_1y_1^{-1})P^1(P^3(x_2y_2^{-1})))$$
$$=(-1)^1(x_1y_1)(-1)^3(x_2y_2^5)+(x_1y_1^{-1})P^1((-1)^3(x_2y_2^5))$$
$$= x_1y_1x_2y_2^5 + x_1y_1^{-1}x_2y_2^7.$$

3.3 Xây dựng đồng cấu chuyển Singer hạng 3

Cho dãy khớp ngắn

$$0 \to P_3 \xrightarrow{i} \widehat{P}_3 \xrightarrow{\pi} \Sigma^{-1} P_2 \to 0,$$

trong đó,

$$P_3 = P_2 \otimes P_2 = H^*(B\mathbb{Z}/p)^3$$
$$= Span_{\mathbb{F}_p}\{x_1^{\varepsilon_1} y_1^{i_1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_3^{\varepsilon_3} y_3^{\varepsilon_3}\}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3 \in \{0,1\}; i_1, i_2, i_3 \geq 0},$$

$$\widehat{P}_3 = P_1 \otimes \widehat{P}_1$$
$$= Span_{\mathbb{F}_p}\{x_1 y_1^{-1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3}, x_1^{\varepsilon_1} y_1^{i_1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3}\}_{\varepsilon_j \in \{0,1\}; i_j \geq 0},$$

với $j = 1, 2, 3$.

và $\pi : \begin{cases} x_1 y_1^{-1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3} & \mapsto & x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3} \\ x_1^{\varepsilon_1} y_1^{i_1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3} & \mapsto & 0 \end{cases}.$

Dãy khớp trên cảm sinh dãy khớp ngắn trên dãy thức Bar

$$0 \to B_k(P_3) \xrightarrow{i} B_k(\widehat{P}_3) \xrightarrow{\pi} B_k(\Sigma^{-1} P_2) \to 0.$$

Dãy khớp này sinh ra đồng cấu nối

$$\delta_3 : \mathrm{Tor}_k(\mathbb{F}_p, \Sigma^{-1} P_2) \to \mathrm{Tor}_{k-1}(\mathbb{F}_p, P_3).$$

Ta lấy tích ba đồng cấu nối δ_1, δ_2 và δ_3 ta được đồng cấu nối

$$\delta_3\delta_2\delta_1 : \mathrm{Tor}_k(\mathbb{F}_p, \Sigma^{-3}\mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}_{k-1}(\mathbb{F}_p, P_3).$$

Khi n=3 ta có đồng cấu chuyển Singer hạng 3

$$Tr_3 : \mathrm{Tor}_{3,t+3}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \to \mathrm{Tor}_{0,t}(\mathbb{F}_p, \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}/p)^3)$$
$$= \mathbb{F}_p \otimes_A \mathrm{H}^*(B\mathbb{Z}/p)^3.$$

Ta xây dựng biểu diễn của δ_3.

Lấy

$$u = \sum[\theta_1|\cdots|\theta_k]\Sigma^{-1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3} \in B_k(\Sigma^{-1}(H^*(B\mathbb{Z}/p)^3))$$

sao cho $\partial(u) = 0$ tức là

$$\sum\Big(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\lambda_i}[\theta_1|\cdots|\theta_i\theta_{i+1}|\cdots|\theta_k]\sum^{-1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3})$$
$$-\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3})\Big) = 0.$$

Khi đó, nghịch ảnh của u qua π là

$$v = \sum[\theta_1|\cdots|\theta_k]x_1 y_1^{-1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3}.$$

Ta có

$$\delta_3 = \sum\Big(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\lambda_i}[\theta_1|\cdots|\theta_i\theta_{i+1}|\cdots|\theta_k]x_1 y_1^{-1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3}$$
$$-\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(x_1 y_1^{-1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3})\Big)$$
$$= \sum\Big(\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{\lambda_i}[\theta_1|\cdots|\theta_i\theta_{i+1}|\cdots|\theta_k]x_1 y_1^{-1} x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3}$$
$$-\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]x_1 y_1^{-1}\theta_k(x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3})\Big)$$
$$-\sum_{|\theta_k''|>0}(-1)^{\lambda_k-1}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k'(x_1 y_1^{-1})\theta_k''(x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3})$$
$$= -\sum_{|\theta_k''|>0}(-1)^{\lambda_k-1}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k'(x_1 y_1^{-1})\theta_k''(x_2^{\varepsilon_2} y_2^{i_2} x_2^{\varepsilon_3} y_2^{i_3})$$
$$\in B_{k-1}(H^*(B\mathbb{Z}/p)^3).$$

Do đó,

$$\delta_3\delta_2\delta_1 : \sum[\theta_1|\cdots|\theta_k]\sum^{-1}1$$
$$\mapsto -\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-1}]\theta_k(x_3 y_3^{-1})$$
$$\mapsto -\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}\sum_{|\theta_{k-1}''|>0}(-1)^{\lambda_{k-2}}[\theta_1|\cdots|\theta_{k-2}]\times$$
$$\times\theta_{k-1}'(x_2 y_2^{-1})\theta_{k-1}''(\theta_k(x_3 y_3^{-1}))$$
$$\mapsto -\sum(-1)^{\lambda_{k-1}}\sum_{|\theta_{k-1}''|>0}(-1)^{\lambda_{k-2}}\sum_{|\theta_{k-2}''|>0}(-1)^{\lambda_{k-3}}\times$$
$$\times[\theta_1|\cdots|\theta_{k-3}]\theta_{k-2}'(x_1 y_1^{-1})\theta_{k-2}''(\theta_{k-1}'(x_2 y_2^{-1})\theta_{k-1}''(\theta_k(x_3 y_3^{-1})))$$

Khi k=3 ta có

$$\varphi_3 : [\theta_1|\theta_2|\theta_3]\Sigma^{-1}1 \mapsto \Sigma(-1)^{\lambda_2}\sum_{|\theta_2''|>0}(-1)^{\lambda_1}\sum_{|\theta_1''|>0}(-1)^{\lambda_0}\times$$
$$\times\theta_1'(x_1 y_1^{-1})\theta_1''(\theta_2'(x_2 y_2^{-1})\theta_2''(\theta_3(x_3 y_3^{-1}))).$$

Ví dụ: Trong đại số Steenrod A_3, ta xác định ảnh đồng cấu chuyển hạng 3 trên dãy thức Bar

$$\varphi_2([P^1|P^3|P^1]) = P^1(x_1 y_1^{-1})P^0(P^3(x_2 y_2^{-1})P^0(P^1(x_3 y_3^{-1}))$$
$$+P^2(x_2 y_2^{-1})P^1(P^1(x_3 y_3^{-1})) + P^1(x_2 y_2^{-1})P^2(P^1(x_3 y_3^{-1}))$$
$$+P^1(x_2 y_2^{-1})P^3(P^1(x_3 y_3^{-1}))) + P^0(x_1 y_1^{-1})P^1(P^3(x_2 y_2^{-1})P^0(P^1(x_3 y_3^{-1}))$$
$$+P^2(x_2 y_2^{-1})P^1(P^1(x_3 y_3^{-1})) + P^1(x_2 y_2^{-1})P^2(P^1(x_3 y_3^{-1}))$$
$$+P^1(x_2 y_2^{-1})P^3(P^1(x_3 y_3^{-1})))$$
$$= x_1 y_1 x_2 y_2^5 x_3 y_3 + 2x_1 y_1 x_2 y_2^3 x_3 y_3^3 + x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3^5$$
$$+x_1 y_1 x_2 y_2^{-1} x_3 y_3^7 + x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^7 x_3 y_3 + x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^5 x_3 y_3^3$$
$$+2x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^5 x_3 y_3^3 + 2x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^3 x_3 y_3^5 + x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^3 x_3 y_3^5$$
$$+x_1 y_1^{-1} x_2 y_2 x_3 y_3^7 + x_1 y_1^{-1} x_2 y_2 x_3 y_3^7 + x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^{-1} x_3 y_3^9$$
$$= x_1 y_1 x_2 y_2^5 x_3 y_3 + 2x_1 y_1 x_2 y_2^3 x_3 y_3^3 + x_1 y_1 x_2 y_2 x_3 y_3^5$$
$$+x_1 y_1 x_2 y_2^{-1} x_3 y_3^7 + x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^7 x_3 y_3 + 2x_1 y_1^{-1} x_2 y_2 x_3 y_3^7$$
$$+x_1 y_1^{-1} x_2 y_2^{-1} x_3 y_3^9.$$

4. KẾT LUẬN

Dựa trên các kết quả nghiên cứu của các nhà toán học trong và ngoài nước về đồng cấu chuyển đại số trên trường có đặc số 2, đặc biệt là hai bài báo của hai tác giả Chơn và Hà, ảnh đồng cấu chuyển Singer hạng 3 đã được xây dựng trên trường có đặc số nguyên tố lẻ đã được xây dựng. Tuy nhiên, các kết quả nghiên cứu chưa chứng minh được sự ổn định của đồng cấu chuyển Singer trên các đặc số nguyên tố lẻ khác nhau và đây cũng là hướng nghiên cứu trong thời gian tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Bruner, R. R., Ha, L. M. and Hung, N. H. V., (2005). On behavior of the algebraic transfer, Transactions of the American Mathematical Society. 357(2): 473- 487.

Bruner, R. R., 2009. An Adams spectral sequence Primer. Department of Mathematics. Wayne State University. Detroit MI 48202-3489. USA.

Chon, P. H. and Ha, L. M., 2012. On May spectral sequence and the algebraic transfer. Manuscirpta Mathematica. 138(1): 141-160.

Chon, P. H. and Ha, L. M., 2014. On the May spectral sequence and the algebraic transfer II. Topology and its Application. 178: 372-383.

Crossley, M. D., 1999. $St(p)$ generators for H^*V and Singer's homological transfer. Mathematische Zeitschrift. 230(3): 401–411.

Crossley, M. D.,1999. Monomial bases for $H^*(CP^\infty \times CP^\infty)$ over A(p). Transactions of the American Mathematical Society. 351(1): 171-192.

Ha, L. M., 2007. Sub-Hopf algebra of the Steenrod algebra and Singer transfer. Geometry and Topology Monographs. 11: 81-105.

Hung, N. H. V., 2005. The cohomology of the Steenrod algebra and representations of the general linear groups. Transactions of the American Mathematical Society. 375(10): 4065- 4089.

Hung, N. H. V. and Quynh, V. T. N., 2009. The image of the fourth algebraic transfer. Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, Ser. I. 347: pp 23-24, 1415-1418.

Nam, T. N., 2008. Transfert algébrique et action du groupe linéaire sur les puissances divisées modulo 2, Annales de l'Institut Fourier (Grenoble). 58: 1785-1837.

Quynh, V. T. N., 2007. On behavior of the fifth algebraic transfer. Geometry and Topology Monographs. 11(2007): 309-326.

Singer, W. M., 1989. The transfer in homological algebra. Mathematische Zeitschrift. 202: 493-523.

Sum, N., 2010. The negative answer to Kameko's conjecture on the hit problem. Advances in Mathematics. 225: 2365-2390.

Sum, N., 2015. On the Peterson hit problem. Advances in Mathematics. 274: 432- 489.