Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2017.144

HỢP HỮU HẠN CỦA CÁC MODULE CON

Lê Phương Thảo
Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 23/07/2017
Ngày nhận bài sửa: 26/09/2017
Ngày duyệt đăng: 29/11/2017

Title:
On finite unions of submodules

Từ khóa:
Hợp của các module con, module con nguyên tố, module con nửa nguyên tố

Keywords:
Prime submodules, semiprime submodules, union of submodules

ABSTRACT

Prime Avoidance theorem is a famous theorem in Commutative Algebra. Some authors proved this theorem in case the ring is not commutative. Moreover, many authors generalized this result for modules over commutative ring and noncommutative ring. In this paper, Sanh's definition (2010) of prime submodule was used to study the finite unions of submodules and prove the Prime Avoidance theorem for modules over noncommutative ring.

TÓM TẮT

Prime Avoidance là một định lý nổi tiếng trong Đại số giao hoán. Một số tác giả đã chứng minh định lý này trong trường hợp vành không giao hoán. Hơn nữa, nhiều nhà toán học đã mở rộng kết quả này cho module trên vành giao hoán và vành không giao hoán. Trong bài báo này, định nghĩa module con nguyên tố theo Sanh (2010) được sử dụng để nghiên cứu bài toán hợp hữu hạn của các module con và chứng minh kết quả Định lý Prime Avoidance cho module trên vành không giao hoán.

Trích dẫn: Lê Phương Thảo, 2017. Hợp hữu hạn của các module con. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 53a: 82-87.

1 GIỚI THIỆU

Ideal nguyên tố xuất hiện trong rất nhiều bài toán của lý thuyết vành. Trong một vành không giao hoán, ta có định nghĩa ideal nguyên tố như sau: *Một ideal P của vành R được gọi là ideal nguyên tố của R nếu với mọi ideal I, J của R và $IJ \subset P$ thì $I \subset P$ hoặc $J \subset P$.* (Lam, 1991). Ideal nguyên tố và các vấn đề liên quan được rất nhiều nhà toán học trên thế giới quan tâm và nghiên cứu. Có nhiều kết quả hay liên quan tới ideal nguyên tố và chúng ta muốn tìm những kết quả tương tự trong lý thuyết module. Nhiều nhà toán học đã đưa ra khái niệm module con nguyên tố và nghiên cứu chúng nhưng đa số những khái niệm này chỉ xuất hiện trong trường hợp của module trên vành giao hoán, chẳng hạn module nhân. Trong trường hợp module trên vành không giao hoán, rất khó tìm được một cấu trúc tương tự như ideal nguyên tố. Năm 2010, Sanh *et al.* đã đưa ra một định nghĩa module con nguyên tố trên vành không giao hoán và nghiên cứu được nhiều tính chất của chúng.

Prime Avoidance là một định lý nổi tiếng, xuất hiện trong nhiều sách Đại số giao hoán. Karamzadeh (2012) đã chứng minh định lý này trong trường hợp của vành không giao hoán. Nhiều nhà toán học đã mở rộng kết quả của định lý cho module trên vành giao hoán (Lu, 1997) và cho module trên vành không giao hoán (Callialp and Tekir, 2002). Bài viết sẽ sử dụng định nghĩa module con nguyên tố theo Sanh *et al.* (2010) để chứng minh kết quả của định lý này cho module trên vành không giao hoán.

Trong toàn bộ bài báo này, tất cả các vành đều có đơn vị và tất cả các module là R-module phải. Cho M là một R-module phải và $S = \mathrm{End}_R(M)$ là vành các tự đồng cấu của M. Một module con X của M được gọi là module con *hoàn toàn bất biến* của M nếu $s(X) \subset X$, với mọi $s \in S$, trong đó

$s(X) = \{s(x) | x \in X\}$. Theo định nghĩa này, tập hợp các module con hoàn toàn bất biến của M khác rỗng và đóng với tổng và giao. Đặc biệt, một ideal phải của R là hoàn toàn bất biến của R_R nếu nó là ideal của R.

Cho $I, J \subset S$ và $X \subset M$. Ta ký hiệu:

$$I(X) = \sum_{f \in I} f(X);$$

$$\mathrm{Ker}(I) = \bigcap_{f \in I} \mathrm{Ker} f;$$

và

$$IJ = \{\sum_{1 \le i \le n} x_i y_i \,|\, x_i \in I, y_i \in J, 1 \le i \le n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Với các ký hiệu này, ta thấy với bất kỳ R-module phải M và bất kỳ ideal phải I của R, tập hợp MI là module con hoàn toàn bất biến của M.

Định nghĩa 1.1 (Sanh *et al.*, 2010) Cho M là một R-module phải và X là một module con thật sự và hoàn toàn bất biến của M. Khi đó, X được gọi là *module con nguyên tố* của M (hoặc X nguyên tố trong M) nếu với mọi ideal I của S và với mọi module con hoàn toàn bất biến U của M và $I(U) \subset X$ thì $I(M) \subset X$ hoặc $U \subset X$.

Đặc biệt, một ideal P của vành R được gọi là *ideal nguyên tố* nếu với mọi ideal I, J của R và $IJ \subset P$ thì $I \subset P$ hoặc $J \subset P$.

Một R-module phải M được gọi là *module nguyên tố* nếu 0 là module con nguyên tố của M.

Một module con hoàn toàn bất biến X của M được gọi là *module con nửa nguyên tố* của M (hoặc X nửa nguyên tố trong M) nếu X là giao của các module con nguyên tố nào đó của M.

Một R-module phải M được gọi là *module nửa nguyên tố* nếu 0 là module con nửa nguyên tố của M.

Căn nguyên tố của M, kí hiệu $P(M)$, là giao của tất cả các module con nguyên tố của M.

Sau đây, chúng ta giới thiệu tập I_X. Tập này đóng vai trò rất quan trọng trong quá trình nghiên cứu về module con nguyên tố và module con nửa nguyên tố. Với mỗi tập con $X \subset M$, ta ký hiệu $I_X = \{f \in S | f(M) \subset X\}$. Nếu X là một module con của M thì I_X là một ideal phải của S, và nếu X là một module con hoàn toàn bất biến của M thì I_X là một ideal của S. Mối liên hệ giữa X và I_X được trình bày trong (Sanh *et al.*, 2010, 2013). Một R-module phải M được gọi là tự sinh khi M sinh ra tất cả các module con của nó.

Định lý sau đây cho chúng ta tiêu chuẩn để kiểm tra một module con có là module con nguyên tố hay không.

Định lý 1.2 (Sanh *et al.*, 2010) Cho M là một R-module phải. Cho X là một module con thật sự và hoàn toàn bất biến của M. Các điều kiện sau đây tương đương:

– X là module con nguyên tố của M;

– Với mọi ideal phải I của S và với mọi module con U của M, nếu $I(U) \subset X$ thì $I(M) \subset X$ hoặc $U \subset X$;

– Với mọi $\varphi \in S$ và mọi module con hoàn toàn bất biến U của M, nếu $\varphi(U) \subset X$ thì $\varphi(M) \subset X$ or $U \subset X$;

– Với mọi ideal trái I của S và với mọi tập con A của M, nếu $IS(A) \subset X$ thì $I(M) \subset X$ hoặc $A \subset X$;

– Với mọi $\varphi \in S$ và với mọi $m \in M$, nếu $\varphi(S(m)) \subset X$ thì $\varphi(M) \subset X$ hoặc $m \in X$.

Hơn nữa, nếu M là module tự xạ ảnh thì những điều kiện trên tương đương với:

– M/X là module nguyên tố.

Các mệnh đề sau đây cho ta mối liên hệ giữa X và I_X (Sanh *et al.*, 2010, 2013).

Mệnh đề 1.3 Cho M là một R-module phải, $S = \mathrm{End}_R(M)$ là vành các tự đồng cấu của M và X là một module con hoàn toàn bất biến của M. Nếu X là module con nguyên tố của M thì I_X là ideal nguyên tố của S. Ngược lại, nếu M là module tự sinh và I_X là ideal nguyên tố của S thì X là module con nguyên tố của M.

Mệnh đề 1.4 Cho M là một R-module phải. Khi đó:

– Nếu X là module con nửa nguyên tố của M thì I_X là ideal nửa nguyên tố của S;

– Nếu M là một R-module phải tự sinh và P là ideal nửa nguyên tố của S thì $X = P(M)$ là module con nửa nguyên tố của M và $I_X = P$.

Định lý sau đây cho ta tiêu chuẩn của module con nửa nguyên tố.

Định lý 1.5 (Sanh *et al.*, 2013) Cho M là một R-module phải tự sinh và X là một module con hoàn toàn bất biến của M. Khi đó các khẳng định sau tương đương:

– X là module con nửa nguyên tố của M;

– Nếu J là một ideal của S sao cho $J^2(M) \subset X$ thì $J(M) \subset X$;

– Nếu J là một ideal của S sao cho $J(M) \supsetneq X$ thì $J^2(M) \not\subset X$;

– Nếu J là một ideal phải của S sao cho $J^2(M) \subset X$ thì $J(M) \subset X$;

– Nếu J là một ideal trái của S sao cho $J^2(M) \subset X$ thì $J(M) \subset X$.

Từ Định lý 1.5 ta có hệ quả sau:

Hệ quả 1.6 (Sanh *et al.*, 2013) Cho M là một R-module phải tự sinh và X là một module con nửa nguyên tố của M. Nếu J là một ideal phải (hoặc trái) của S sao cho tồn tại số nguyên dương n để $J^n(M) \subset X$ thì $J(M) \subset X$.

Bài báo này sử dụng Định nghĩa 1.1 về module con nguyên tố để nghiên cứu bài toán hợp hữu hạn của các module con và chứng minh kết quả Định lý Prime Avoidance cho module trên vành không giao hoán. Phần tiếp theo của bài báo được cấu trúc như sau: phần 2 trình bày các khái niệm, tính chất của bài toán hợp hữu hạn của các module con. Trong phần 3, định lý Prime Avoidance được trình bày và chứng minh chi tiết. Phần 4 là kết luận của bài viết.

2 HỢP HỮU HẠN CỦA CÁC MODULE CON

Một số tác giả đã nghiên cứu bài toán hợp hữu hạn của các ideal (McCoy, 1957; Gottlieb, 1994), hợp hữu hạn các module con (Lu, 1997; Callialp and Tekir, 2002; Karamzadeh, 2012). Trong mục này, bài viết trình bày một số kết quả khác liên quan đến hợp hữu hạn các module con của một R-module M.

Định nghĩa 2.1 Cho $N, N_1, N_2, \dots, N_n$ là các module con của R-module phải M. Ta nói $N \subset N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$ là một phủ đầy đủ nếu N không chứa trong hợp của bất kỳ $n-1$ module con nào của họ $N_1, N_2, \dots, N_n$; nghĩa là ta không thể bỏ bớt N_k nào.

Ta nói $N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$ là một hợp đầy đủ nếu ta không thể bỏ bớt N_k nào.

Sau đây ta sẽ xét đặc điểm của số module con trong một phủ đầy đủ của một module con của module M.

Trước hết ta xét trường hợp $n = 2$. Nếu N, N_1, N_2 là các module con của M sao cho $N \subset N_1 \cup N_2$ thì $N \subset N_1$ hoặc $N \subset N_2$. Thật vậy, nếu $N \not\subset N_1$ và $N \not\subset N_2$ thì tồn tại $x \in N \backslash N_1$ và $y \in N \backslash N_2$. Khi đó $x + y \notin N$. Điều này vô lý. Do đó, $N \subset N_1$ hoặc $N \subset N_2$. Điều này cho thấy phủ của một module con bởi hai module N_1, N_2 không bao giờ là phủ đầy đủ. Do đó, $N \subset N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$ là một phủ đầy đủ chỉ khi $n > 2$ hoặc $n = 1$.

Bổ đề dưới đây cho ta tính chất của giao của các module con trong một phủ đầy đủ của một module con của module M.

Bổ đề 2.2 Cho $N, N_1, N_2, \dots, N_n$ (với $n > 1$) là các module con của R-module phải M và $N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$ là một hợp đầy đủ. Khi đó $\bigcap_{i \neq k} N_i = \bigcap_{i=1}^n N_i$ với mọi k thỏa $1 \leq k \leq n$.

Chứng minh

Rõ ràng ta có $\bigcap_{i=1}^n N_i \subset \bigcap_{i \neq k} N_i$.

Để chứng minh $\bigcap_{i \neq k} N_i \subset \bigcap_{i=1}^n N_i$, ta chỉ cần chứng minh $\bigcap_{i \neq k} N_i \subset N_k$ với mọi k thỏa $1 \leq k \leq n$. Do $N = N_1 \cup N_2 \cup \dots \cup N_n$ là một hợp đầy đủ, ta có $N_k \not\subset \bigcup_{i \neq k} N_i$. Khi đó, tồn tại $y \in N_k \backslash \bigcup_{i \neq k} N_i$. Lấy x là một phần tử tùy ý của $\bigcap_{i \neq k} N_i$. Khi đó ta có $x + y \notin \bigcup_{i \neq k} N_i$. Suy ra $x + y \in N_k$, do đó $x \in N_k$. Điều này dẫn đến $\bigcap_{i \neq k} N_i \subset N_k$ với mọi k thỏa $1 \leq k \leq n$ và do đó $\bigcap_{i \neq k} N_i \subset \bigcap_{i=1}^n N_i$.

Vậy $\bigcap_{i \neq k} N_i = \bigcap_{i=1}^n N_i$ với mọi k thỏa $1 \leq k \leq n$.

Định lý 2.3 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Giả sử X, X_1, X_2, X_3 là các module con hoàn toàn bất biến của M sao cho $X = X_1 \cup X_2 \cup X_3$ là một hợp đầy đủ. Khi đó ${I_X}^2(M) \subset X_1 \cap X_2 \cap X_3$.

Chứng minh

Do M là module tự sinh nên $X = I_X(M)$ và $X_i = I_{X_i}(M)$, với $i = 1,2,3$.

Do $X = (X_1 + X_2) \cup X_3$ và $X \neq X_3$ nên $X = X_1 + X_2$. Lập luận tương tự ta cũng có $X = X_2 + X_3 = X_1 + X_3$. Khi đó:

$I_{X_1}(X) = I_{X_1}(X_2 + X_3) = I_{X_1}(X_2) + I_{X_1}(X_3) \subset X_1 \cap X_2 \cap X_3$, trong đó đẳng thức cuối cùng là do bổ đề 2.2. Tương tự ta cũng thu được:

$I_{X_2}(X) \subset X_1 \cap X_2 \cap X_3$ và $I_{X_3}(X) \subset X_1 \cap X_2 \cap X_3$.

Do M là một module tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh nên theo (Wisbauer, 1991) ta được:

$$\begin{aligned} I_{X_1} + I_{X_2} &= Hom\left(M, (I_{X_1} + I_{X_2})(M)\right) \\ &= Hom\left(M, I_{X_1}(M) + I_{X_2}(M)\right) \\ &= Hom(M, X_1 + X_2) \\ &= Hom\left(M, I_{X_1 + X_2}(M)\right) \\ &= I_{X_1 + X_2}. \end{aligned}$$

Khi đó $(I_{X_1} + I_{X_2})(X) \subset X_1 \cap X_2 \cap X_3$, suy ra $I_X(X) = I_{X_1 + X_2}(X) \subset X_1 \cap X_2 \cap X_3$.

Do đó ${I_X}^2(M) \subset X_1 \cap X_2 \cap X_3$.

Trong chứng minh Định lý 2.3 ta nhận thấy:

$I_{X_1}(X) = I_{X_1}(X_2 + X_3) = I_{X_1}(X_2) + I_{X_1}(X_3) = (I_{X_1}I_{X_2} + I_{X_1}I_{X_3})(M)$.

Tương tự, ta cũng có:

$$I_{X_2}(X) = (I_{X_2}I_{X_1} + I_{X_2}I_{X_3})(M),$$

$$I_{X_3}(X) = (I_{X_3}I_{X_1} + I_{X_3}I_{X_2})(M).$$

Từ đó $I_X(X) = (I_{X_1}I_{X_2} + I_{X_1}I_{X_3} + I_{X_2}I_{X_1} + I_{X_2}I_{X_3} + I_{X_3}I_{X_1} + I_{X_3}I_{X_2})(M)$,

hay $I_X{}^2(M) = (I_{X_1}I_{X_2} + I_{X_1}I_{X_3} + I_{X_2}I_{X_1} + I_{X_2}I_{X_3} + I_{X_3}I_{X_1} + I_{X_3}I_{X_2})(M)$.

Bây giờ, với $X_1, \dots, X_n$ là các module con của R-module phải M, để đơn giản trong việc trình bày mệnh đề kế tiếp ta ký hiệu $I_{X_i} = I_i$, với mỗi $i = 1, \dots, n$. Với mỗi số nguyên dương $k \leq n$ ta đặt $p_k(I_1, \dots, I_n)$ là tổng $\sum I_{i_1} \dots I_{i_k}$ trong đó $\{i_1, \dots, i_k\}$ chạy hết trên tập các tập con của $\{1, \dots, n\}$ gồm đúng k phần tử.

Như vậy, trong trường hợp $n = 3$ ta có $I_X{}^2(M) = p_2(I_1, I_2, I_3)$. Tổng quát, ta có mệnh đề sau:

Mệnh đề 2.4 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Giả sử $X, X_1, \dots, X_n$ là các module con hoàn toàn bất biến của M sao cho $X \subset X_r + X_s$ với mọi $r \neq s$, $1 \leq r, s \leq n$.

Khi đó $I_X{}^k(M) \subset p_k(I_1, \dots, I_n)(M)$ với $k = 1, \dots, n-1$.

Chứng minh

Ta chứng minh mệnh đề bằng phương pháp qui nạp theo k.

Mệnh đề hiển nhiên đúng khi $k = 1$.

Giả sử kết quả đúng với $k-1$, nghĩa là $I_X{}^{k-1}(M) \subset p_{k-1}(I_1, \dots, I_n)(M)$.

Khi đó $I_X{}^k(M) \subset I_X p_{k-1}(I_1, \dots, I_n)(M)$.

Ta chỉ cần chứng minh $I_X I_{i_1} \dots I_{i_{k-1}}(M) \subset p_k(I_1, \dots, I_n)(M)$ với mỗi tập con $\{i_1, \dots, i_{k-1}\}$ của $\{1, \dots, n\}$ gồm đúng $k-1$ phần tử. Ta lấy hai số khác nhau $1 \leq r, s \leq n$ bên ngoài tập $\{i_1, \dots, i_{k-1}\}$. Điều này luôn có thể thực hiện được do $k - 1 \leq n - 2$. Do $X \subset X_r + X_s$ nên $I_X \subset I_r + I_s$. Do đó:

$I_X I_{i_1} \dots I_{i_{k-1}}(M) \subset (I_r + I_s) I_{i_1} \dots I_{i_{k-1}}(M) \subset p_k(I_1, \dots, I_n)(M)$.

Vậy $I_X{}^k(M) \subset p_k(I_1, \dots, I_n)(M)$ với $k = 1, \dots, n-1$.

Đối với hợp hữu hạn của các ideal, ta có định lý sau: (McCoy, 1957) "Cho I và A_i $(i = 1, \dots, n)$ là các ideal của vành R sao cho $I \subset A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$. Nếu I không chứa trong hợp của bất kỳ $n-1$ ideal A_i nào thì tồn tại số nguyên dương k, phụ thuộc n, sao cho $I^k \subset A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n$.". Định lý 2.3 là trường hợp của định lý này được tổng quát cho hợp của ba module. Trong trường hợp tổng quát cho hợp hữu hạn của các module, ta có định lý sau đây.

Định lý 2.5 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Giả sử $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ là các module con hoàn toàn bất biến của M và $X = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ là một hợp đầy đủ. Khi đó tồn tại số nguyên dương k, phụ thuộc n, sao cho

$$I_X{}^k(M) \subset X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n.$$

Chứng minh

Mệnh đề hiển nhiên đúng khi $n = 1$.

Nếu $n > 1$ thì $n \geq 3$. Ta sẽ chứng minh mệnh đề trong trường hợp $n \geq 3$ bằng phương pháp qui nạp theo n. Trường hợp $n = 3$ đã được chứng minh trong Định lý 2.3. Giả sử mệnh đề này đúng trong trường hợp X là hợp đầy đủ của ít hơn n module con hoàn toàn bất biến của M. Ta có:

$$X = (X_1 + X_2) \cup X_3 \cup \dots \cup X_n$$

và ta có thể thu gọn để được một hợp đầy đủ của X. Do $X \neq X_3 \cup \dots \cup X_n$ nên trong hợp đầy đủ của X phải chứa module $X_1 + X_2$. Khi đó, theo giả thiết qui nạp, tồn tại số nguyên dương k_{12} sao cho $I_X{}^{k_{12}}(M) \subset X_1 + X_2$. Bằng cách lập luận tương tự ta cũng có $I_X{}^{k_{rs}}(M) \subset X_r + X_s$ với mọi $r \neq s$, $1 \leq r, s \leq n$.

Đặt $l = \max\{k_{rs} \mid r \neq s, 1 \leq r, s \leq n\}$. Ta có $I_X{}^l(M) \subset X_r + X_s$ với mọi $r \neq s$. Áp dụng Mệnh đề 2.4 ta được

$$I_X{}^{l(n-1)}(M) \subset p_{n-1}(I_1, \dots, I_n)(M).$$

Từ Bổ đề 2.2 ta suy ra $p_{n-1}(I_1, \dots, I_n)(M) \subset X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$.

Do đó $I_X{}^{l(n-1)}(M) \subset X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$.

Đặt $k = l(n-1)$ ta có $I_X{}^k(M) \subset X_1 \cap X_2 \cap \dots \cap X_n$.

Từ Định lý 2.5 ta có các hệ quả sau:

Hệ quả 2.6 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Giả sử $X, X_1, X_2, \dots, X_n$ là các module con hoàn toàn bất biến của M thỏa $X \subset X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n$ và $X \subsetneq X_i$,

$i = 1, \ldots, n$. Khi đó tồn tại số nguyên dương k sao cho ${I_X}^k(M)$ chứa trong ít nhất ba trong các module $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Chứng minh

Ta thu gọn $X \subset X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ thành một phủ đầy đủ. Do $X \subsetneq X_i$, $i = 1, \ldots, n$ nên phủ đầy đủ của X chứa ít nhất ba trong các module $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Áp dụng Định lý 2.5 cho các module trong phủ đầy đủ của X, tồn tại số nguyên dương k sao cho ${I_X}^k(M)$ chứa trong các module này.

Hệ quả 2.7 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là các module con hoàn toàn bất biến của M sao cho $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ là một module con của M. Khi đó tồn tại số nguyên dương k và tồn tại $i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho ${I_X}^k(M) \subset X_i$.

Chứng minh

Trường hợp tồn tại $i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $X = X_i$ thì $I_X(M) \subset X_i$. Trong trường hợp còn lại, kết quả được suy ra từ Định lý 2.5.

Cho M là một R-module phải tự sinh và X là một module con nửa nguyên tố của M. Theo Hệ quả 1.6, nếu J là một ideal phải (hoặc trái) của S sao cho tồn tại số nguyên dương n để $J^n(M) \subset X$ thì $J(M) \subset X$. Ta có thêm các hệ quả sau của Định lý 2.5.

Hệ quả 2.8 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Giả sử $X, X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 3)$ là các module con hoàn toàn bất biến của M sao cho $X \subset X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ và ít nhất $n-2$ module trong họ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là nửa nguyên tố trong M. Khi đó tồn tại $i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $X \subset X_i$.

Chứng minh

Theo Hệ quả 2.6, tồn tại số nguyên dương k sao cho ${I_X}^k(M)$ chứa trong ít nhất ba trong các module $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Do ít nhất $n-2$ module trong họ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là nửa nguyên tố nên tồn tại $i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho ${I_X}^k(M) \subset X_i$ và X_i là nửa nguyên tố trong M. Khi đó $X = I_X(M) \subset X_i$.

Hệ quả 2.9 Cho M là một R-module phải tự xạ ảnh, hữu hạn sinh và tự sinh. Giả sử $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(n \geq 3)$ là các module con hoàn toàn bất biến của M và ít nhất $n-2$ module trong họ $X_1, X_2, \ldots, X_n$ là nửa nguyên tố trong M.

Khi đó $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ là một module con của M khi và chỉ khi tồn tại tồn tại $i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \subset X_i$.

Chứng minh

Đặt $X = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$. Theo Hệ quả 2.8, nếu X là một module con của M thì tồn tại $i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $X \subset X_i$. Ngược lại, nếu tồn tại $i \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $X \subset X_i$ thì $X = X_i$ là một module con của M.

3 ĐỊNH LÝ PRIME AVOIDANCE CHO MODULE

Định lý Prime Avoidance được phát biểu như sau: Cho $P_1, \ldots, P_n$ (với $n \geq 2$) là các ideal của một vành giao hoán R sao cho nhiều nhất hai trong n ideal $P_1, \ldots, P_n$ không nguyên tố. Cho I là một ideal của R sao cho $I \subset \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Khi đó tồn tại $j \in \{1, \ldots, n\}$ sao cho $I \subset P_j$. (Sap, 2000). Trong mục này, chúng ta sẽ tổng quát và chứng minh Định lý Prime Avoidance cho trường hợp module trên vành không giao hoán. Trước hết, ta chứng minh mệnh đề sau đây.

Mệnh đề 3.1 Giả sử $N, N_1, N_2, \ldots, N_n$ là các module con hoàn toàn bất biến của R-module phải M và $N \subset N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_n$ là một phủ đầy đủ với $n > 2$. Nếu $I_{N_j} \not\subset I_{N_k}$ với mọi $j \neq k$ thì tất cả N_k không là module con nguyên tố của M, với $k \in \{1,2, \ldots, n\}$.

Chứng minh

Theo giả thiết, $N = (N \cap N_1) \cup (N \cap N_2) \cup \ldots \cup (N \cap N_n)$ là một hợp đầy đủ. Nếu không, ta có thể giả sử

$N = (N \cap N_1) \cup \ldots \cup (N \cap N_{k-1}) \cup (N \cap N_{k+1}) \cup \ldots \cup (N \cap N_n)$.

Khi đó $N \subset N_1 \cup \ldots \cup N_{k-1} \cup N_{k+1} \cup \ldots \cup N_n$. Điều này không thể xảy ra. Vì $N \subset N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_n$ là phủ đầy đủ, tồn tại $m_k \in N \backslash N_k$ với mỗi $k \leq n$. Theo bổ đề 2.2, ta có $\bigcap_{j \neq k}(N \cap N_j) = \bigcap_{j=1}^{n}(N \cap N_j) \subset N \cap N_k$. Giả sử N_k là module con nguyên tố của M. Theo Mệnh đề 1.3, I_{N_k} là ideal nguyên tố của S. Do $I_{N_j} \not\subset I_{N_k}$ khi $j \neq k$ nên $I_{N_1} \ldots I_{N_{k-1}}.I_{N_{k+1}} \ldots I_{N_n} \not\subset I_{N_k}$. Tồn tại phần tử $\varphi = \prod_{j \neq k} \varphi_j \in I_{N_j}$ với mọi $j \neq k$ nhưng $\varphi \notin I_{N_k}$. Vì N là module con hoàn toàn bất biến và $\varphi \in I_{N_j}$ với mọi $j \neq k$, ta có $\varphi S(m_k) \subset N \cap N_j$ với mọi $j \neq k$. Từ $\varphi \notin I_{N_k}$ ta có $\varphi(M) \not\subset N_k$. Do tính nguyên tố của N_k, ta được $\varphi S(m_k) \not\subset N_k$. Từ đó suy ra $\varphi S(m_k) \not\subset N \cap N_k$, mâu thuẫn với $\bigcap_{j \neq k}(N \cap N_j) = \bigcap_{j=1}^{n}(N \cap N_j) \subset N \cap N_k$.

Vậy không có module con N_k nào nguyên tố trong M, với $k \in \{1,2, \ldots, n\}$.

Định lý 3.2 (Định lý Prime Avoidance)

Cho M là một R-module phải và N là một module con hoàn toàn bất biến của M. Giả sử $N_1, \dots, N_n$ là một số hữu hạn module con của M sao cho $N \subset N_1 \cup \dots \cup N_n$. Giả sử có nhiều nhất hai trong các module N_k không là module con nguyên tố và $I_{N_j} \not\subset I_{N_k}$ khi $j \neq k$. Khi đó, tồn tại $k \in \{1, \dots, n\}$ sao cho $N \subset N_k$.

Chứng minh

Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $N \subset N_1 \cup \dots \cup N_n$ là phủ đầy đủ. Khi đó $n \neq 2$. Theo mệnh đề 3.1 ta được $n \leq 2$. Khi đó $n = 1$ và do đó tồn tại k sao cho $N \subset N_k$.

4 KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày một số kết quả của bài toán hợp hữu hạn của các module con của một R-module M. Đồng thời, Định lý Prime Avoidance cũng được tổng quát và chứng minh cho trường hợp của module trên vành không giao hoán. Các kết quả đạt được trong bài báo có thể được mở rộng cho bài toán hợp đếm được của các module con của một R-module M và đó sẽ là định hướng nghiên cứu, phát triển từ kết quả của bài báo này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Callialp, F. and Tekir, U., 2002. *On finite union of prime submodules*. Pakistan Journal of Applied Science. 2 (11): 1016-1017.

Gottlieb, C., 1994. *On finite unions of ideals and cosets*. Communications in Algebra. 22 (8): 3087-3097.

Karamzadeh, O. A. S., 2012. The Prime Avoidance Lemma revisited. Kyungpook Mathematical Journal. 52 (2): 149-153.

Lam, T. Y., 1991. A First Course in Noncommutative Rings. Sringer – Verlag New York, Inc., 397 pages.

Lu, C. P., 1997. Unions of prime submodules. Houston Journal of Mathematics. 23 (2): 203-213.

McCoy, N. H., 1957. A note on finite unions of ideals and subgroups. Proceedings of the American Mathematical Society. 8: 633-637.

Sanh, N. V., Vu, N. A., Ahmed, K. F. U., Asawasamrit, S., Thao, L. P., 2010. Primeness in module category. Asian-European Journal of Mathematics. 3 (1): 145-154.

Sanh, N. V., Ahmed, K. F. U., Thao, L. P., 2013. On semiprime modules with chain conditions. East-West Journal of Mathematics. 15 (2): 135-151.

Sap, R.Y., 2000. Steps in Commutative Algebra. Second Edition. Cambridge University Press, 355 pages.

Wisbauer, R., 1991. Foundations of Module and Ring Theory. Gordon and Breach. Tokyo, 606 pages.