Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ
Phần A: Khoa học Tự nhiên, Công nghệ và Môi trường
website: sj.ctu.edu.vn

DOI:10.22144/ctu.jvn.2018.037

SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VÉCTƠ DỰA VÀO NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND

Đinh Ngọc Quý[1*], Đỗ Hồng Diễm[2] và Phạm Hải Đăng[3]

[1]*Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Cần Thơ*

[2]*Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Y Dược Cần Thơ*

[3]*Học viên cao học giải tích K22, Trường Đại học Cần Thơ*

**Người chịu trách nhiệm về bài viết: Đinh Ngọc Quý (email: dnquy@ctu.edu.vn)*

Thông tin chung:
Ngày nhận bài: 24/05/2017
Ngày nhận bài sửa: 11/01/2018
Ngày duyệt đăng: 27/04/2018

Title:
Existence of vector equilibrium problem via Ekeland's variational principle

Từ khóa:
Bài toán cân bằng, nguyên lý biến phân Ekeland, tính nửa liên tục giảm nhẹ

Keywords:
Ekeland's variational principle, equilibrium problem, relaxed semicontinuity

ABSTRACT

In this paper, the aim is to provide a vector version of Ekeland's theorem related to equilibrium problems when dealing with bifunctions defined on complete metric spaces and with values in Hausdorff locally convex spaces ordered by closed convex pointed cones. To prove this principle, a weak notion of continuity of a vector-valued function is considered, and some of its properties are presented. Via the vector Ekelands principle, some existence theorems on solutions for vector equilibria are proved in compact domains.

TÓM TẮT

Trong bài báo này, nguyên lý biến phân Ekeland được mở rộng cho hàm hai biến véctơ từ không gian mêtric đủ vào không gian Hausdorff lồi địa phương được trang bị thứ tự bởi một nón lồi đóng có đỉnh. Dựa vào nguyên lý biến phân Ekeland để thiết lập điều kiện đủ cho tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng véctơ trong trường hợp tập xác định là compact.

Trích dẫn: Đinh Ngọc Quý, Đỗ Hồng Diễm và Phạm Hải Đăng, 2018. Sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng véctơ dựa vào nguyên lý biến phân Ekeland. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Cần Thơ. 54(3A): 40-46.

1 MỞ ĐẦU

Nguyên lý biến phân Ekeland (Ekeland, 1974) (viết tắt là EVP) được coi là một trong các kết quả quan trọng nhất của lý thuyết tối ưu và giải tích phi tuyến trong bốn thập kỷ vừa qua. Nguyên lý này là nền tảng của giải tích biến phân và lý thuyết tối ưu. Vai trò quan trọng của nó thực sự được nhấn mạnh vì có nhiều kết quả tương đương nổi tiếng, cụ thể như Định lý điểm bất động Caristi-Kirk (Caristi, 1976), Định lý giọt nước rơi của Daneš (1972), Định lý cánh hoa của Penot (1986), Định lý Krasnoselski-Zabrejko về tính giải được của phương trình toán tử (Zabrejko and Krasnoselski, 1971), Bổ đề Phelps (Phelps, 1974)...

Mô hình bài toán cân bằng được Blum và Oettli (1994) đưa ra. Bài toán này là dạng tổng quát của bài toán tối ưu và bài toán bất đẳng thức biến phân, chứa rất nhiều bài toán quan trọng khác của tối ưu hóa như: bài toán điểm bất động, bài toán điểm trùng, bài toán mạng giao thông, bài toán cân bằng Nash,… Trước đây để xây dựng điều kiện đủ cho tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng, các tác giả chủ yếu sử dụng giả thiết liên quan về tính lồi như: tập xác định là lồi, ánh xạ f lồi hoặc tựa lồi kết hợp với tính đơn điệu và liên tục. Trong những năm gần đây, nhiều tác giả cố gắng mở rộng các kết quả của nguyên lý biến phân Ekeland cho trường hợp hàm hai biến và ứng dụng vào nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng (Bianchi *et al.*, 2005; Ansari, 2007; Bianchi *et al.*, 2007; Al-Homidan *et al.*, 2008; Araya *et al.*, 2008). Sử dụng nguyên lý biến phân Ekeland để xây dựng điều kiện đủ cho tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng có ưu điểm là không cần sử dụng bất cứ giả thiết lồi cho tập xác định và ánh xạ. Đây là một cách tiếp cận mới dựa trên ý tưởng được đưa ra đầu tiên bởi Bianchi *et al.*, 2005.

Trong bài báo này, nguyên lý biến phân Ekeland được mở rộng cho hàm hai biến véctơ từ không gian mêtric đủ vào không gian Hausdorff lồi địa phương được trang bị thứ tự bởi một nón lồi đóng có đỉnh. Dựa vào nguyên lý biến phân Ekeland để thiết lập điều kiện đủ cho tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng véctơ trong trường hợp tập xác định là compact. Các thí dụ cũng được đưa ra để minh họa cho các kết quả chính của bài báo, đồng thời cũng so sánh với các kết quả nghiên cứu gần đây về vấn đề này.

Bài báo có cấu trúc như sau: Mục 2 trình bày các kiến thức chuẩn bị về tính đóng dưới của một quan hệ bắc cầu trên không gian mêtric đủ, đồng thời cũng đề cập đến các khái niệm và tính chất nửa liên tục dưới, nửa liên trên của hàm véctơ. các kết quả mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland cho hàm hai biến véctơ được giới thiệu trong Mục 3. Mục 4, dựa vào nguyên lý biến phân Ekeland, các điều kiện đủ cho tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng véctơ được thiết lập trong trường hợp tập xác định là compact.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Trong bài báo này, nếu không có gì đặc biệt, giả thiết (X, d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh. Y^* là không gian đối ngẫu của Y và K^+ là nón đối cực dương của nón K, định nghĩa bởi

$$K^+ := \{y^* \in Y^* | y^*(k) \geq 0, \forall k \in K\}.$$

Dưới đây, các khái niệm về tính bị chặn của một tập bởi nón thứ tự K được nhắc lại.

Định nghĩa 1 (Gopfert *et al.*, 2003) Cho tập $A \subset Y$, khi đó

(i)Tập A được gọi là bị chặn nếu với mọi U là lân cận mở chứa 0_Y, tồn tại số thực đủ lớn α sao cho $A \subseteq \alpha U$.

(ii)Tập A là được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại $\bar{y} \in Y$ sao cho $A \subseteq \bar{y} + K$.

(iii)Tập A là được gọi là tựa bị chặn dưới nếu tồn tại một tập bị chặn $M \subseteq Y$ sao cho $A \subseteq M + K$.

(iv)Tập A là được gọi là bị chặn dưới yếu nếu tồn tại $\bar{y} \in Y$ sao cho $A \cap (\bar{y} - K) = \emptyset$.

Từ Định nghĩa 1, ta có tính bị chặn dưới thì suy ra tính tựa bị chặn dưới, tính tựa bị chặn dưới thì suy ra tính bị chặn dưới yếu. Tuy nhiên, chiều ngược lại thì không đúng. Thật vậy, xét thí dụ $Y = \mathbb{R}^2, K = \{(k, 0) \in \mathbb{R}^2 | k \geq 0\}$, khi đó tập $A = \{(0, a) \in \mathbb{R}^2 | 0 \leq a \leq 1\}$ là tựa bị chặn dưới nhưng không bị chặn dưới. Trong trường hợp $Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+$, khi đó tập $A = \{(a, 0) \in \mathbb{R}^2 | a \in \mathbb{R}\}$ là bị chặn dưới yếu nhưng không bị chặn dưới và tựa bị chặn dưới.

Cho $\mathfrak{R}$ là một quan hệ hai ngôi trên X có tính phản xạ và bắc cầu. Dãy $\{x_n\} \subseteq X$ gọi là dãy giảm ứng với quan hệ $\mathfrak{R}$ nếu $x_{n+1} \mathfrak{R} x_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Dãy $\{x_n\} \subseteq X$ gọi là dãy tiệm cận nếu $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Quan hệ $\mathfrak{R}$ được gọi là có tính đóng dưới nếu với mọi dãy giảm $\{x_n\}$ hội tụ đến $\bar{x}$ thì $\bar{x} \mathfrak{R} x_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Tập mức dưới của $x \in X$ ứng với quan hệ $\mathfrak{R}$ được ký hiệu là $S_{\mathfrak{R}}(x)$, định nghĩa bởi $S_{\mathfrak{R}}(x) := \{x' \in X | x' \mathfrak{R} x\}$.

Bổ đề 1 (Khanh and Quy, 2010) Cho $\mathfrak{R}$ là một quan hệ phản xạ bắc cầu trên X có tính đóng dưới. Với $x_0 \in X$, nếu mọi dãy giảm $\{x_n\} \subseteq S_{\mathfrak{R}}(x_0)$ đều là dãy tiệm cận thì tồn tại $\bar{x} \in S_{\mathfrak{R}}(x_0)$ sao cho $S_{\mathfrak{R}}(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$.

Phần còn lại của mục này trình bày về tính nửa liên tục của hàm véctơ. Trước tiên, ta nhắc lại khái niệm nửa liên tục của hàm thực vô hướng.

Định nghĩa 2 (Luc, 1986) Cho $f: X \to \mathbb{R}$ là hàm thực vô hướng. Khi đó ta có,

(i)f được gọi là liên tục tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$, với bất kỳ $\varepsilon > 0$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $f(\bar{x}) - \varepsilon \leq f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \varepsilon$, với mọi $n \geq N$.

(ii)f được gọi là nửa liên tục dưới (viết tắt là lsc) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$, với bất kỳ $\varepsilon > 0$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $f(\bar{x}) - \varepsilon \leq f(x_n)$, với mọi $n \geq N$.

(iii)f được gọi là nửa liên tục trên (viết tắt là usc) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$, với bất kỳ $\varepsilon > 0$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $f(x_n) \leq f(\bar{x}) + \varepsilon$, với mọi $n \geq N$.

Sau đây, ta mở rộng các khái niệm về tính nửa liên tục cho hàm vectơ.

Định nghĩa 3 Cho $f: X \to Y$ là hàm vectơ. Khi đó ta có, (i)f được gọi là K-liên tục tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$, với bất kỳ $e \in K\setminus\{0\}$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $f(\bar{x}) - e \leq_K f(x_n) \leq_K f(\bar{x}) + e$, với mọi $n \geq N$.

(i)f được gọi là K-nửa liên tục dưới (viết tắt là K-lsc) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$, với bất kỳ $e \in K\setminus\{0\}$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $f(\bar{x}) - e \leq_K f(x_n)$, với mọi $n \geq N$.

(ii)f được gọi là K-nửa liên tục trên (viết tắt là K-usc) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$, với bất kỳ $e \in K\setminus\{0\}$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $f(x_n) \leq_K f(\bar{x}) + e$, với mọi $n \geq N$.

Định nghĩa 4 Cho $f: X \to Y$ là hàm vectơ và $e \in K\setminus\{0\}$. Khi đó, ta có:

(i)f được gọi là (e, K)-liên tục tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$, với bất kỳ $\varepsilon > 0$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $f(\bar{x}) - \varepsilon.e \leq_K f(x_n) \leq_K f(\bar{x}) + \varepsilon.e$, với mọi $n \geq N$.

(ii)f được gọi là (e, K)-nửa liên tục dưới (viết tắt là (e, K)-lsc) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$, với bất kỳ $\varepsilon > 0$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $f(\bar{x}) - \varepsilon.e \leq_K f(x_n)$, với mọi $n \geq N$.

(iii)f được gọi là (e, K)-nửa liên tục trên (viết tắt là (e, K)-usc) tại $\bar{x}$ nếu với mọi dãy $\{x_n\} \subseteq X$ hội tụ đến $\bar{x}$, với bất kỳ $\varepsilon > 0$, thì tồn tại $N \in \mathbb{N}$ sao cho $f(x_n) \leq_K f(\bar{x}) + \varepsilon.e$, với mọi $n \geq N$.

Ta nói rằng f thỏa mãn một tính chất nào đó trên tập $A \subseteq X$ nếu f thỏa mãn tính chất đó tại mọi điểm của A. Nếu $A = X$ thì ta bỏ qua cụm từ "trên X" trong cách phát biểu.

Nhận xét 1 Nghiên cứu của Luc (1986) đưa ra các định nghĩa về tính nửa liên tục dưới và trên theo thứ tự nón cho hàm vectơ tổng quát giữa hai không gian vectơ tôpô. Trong trường hợp X là không gian mêtric, ta có thể thay thế ngôn ngữ lân cận bằng ngôn ngữ dãy hội tụ như Định nghĩa 3(ii) và (iii). Trong Al-Homidan *et al.* (2008), tác giả cũng định nghĩa tính K-lsc, K-usc, (e, K)-lsc và (e, K)-usc, tuy nhiên chỉ định nghĩa trên toàn không gian X, chưa mô tả cụ thể định nghĩa các tính nửa liên tục tại điểm.

Từ Định nghĩa 3 và 4, ta dễ dàng có được các tính chất dưới đây:

Mệnh đề 1 Cho $f: X \to Y$ là hàm vectơ. Khi đó ta có,

(i)f là K-liên tục tại $\bar{x}$ nếu và chỉ nếu f là K-lsc và K-usc tại $\bar{x}$.

(ii)f là (e, K)-liên tục tại $\bar{x}$ nếu và chỉ nếu f là (e, K)-lsc và (e, K)-usc tại $\bar{x}$.

(iii)f là K-liên tục tại $\bar{x}$ thì f là (e, K)-liên tục tại $\bar{x}$ với mọi $e \in K\setminus\{0\}$.

(iv)f là K-lsc tại $\bar{x}$ thì f là (e, K)-lsc tại $\bar{x}$ với mọi $e \in K\setminus\{0\}$.

(v)f là K-usc tại $\bar{x}$ thì f là (e, K)-usc tại $\bar{x}$ với mọi $e \in K\setminus\{0\}$.

(vi)f là K-lsc tại $\bar{x}$ nếu và chỉ nếu $-f$ là K-usc tại $\bar{x}$.

(vii)f là (e, K)-lsc tại $\bar{x}$ nếu và chỉ nếu $-f$ là (e, K)-usc tại $\bar{x}$.

3 NGUYÊN LÝ BIẾN PHÂN EKELAND

Định lý 1 Cho (X, d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K\setminus\{0\}$. Cho $f: X \times X \to Y$ là hàm vectơ. Ta định nghĩa quan hệ $\leq_{k_0}$ trên X bởi

$$x_2 \leq_{k_0} x_1 \Leftrightarrow f(x_1, x_2) + d(x_1, x_2)k_0 \leq_K 0_Y.$$

Với mỗi $x_0 \in X$, giả sử các điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i)$f(x, x) = 0_Y$ với mọi $x \in X$.

(ii)$f(x, z) \leq_K f(x, y) + f(y, z)$ với mọi $x, y, z \in X$.

(iii)$f(x_0, S_{\leq_{k_0}}(x_0))$ là tựa bị chặn dưới.

(iv)Quan hệ $\leq_{k_0}$có tính đóng dưới.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in S_{\leq_{k_0}}(x_0)$ sao cho

$$f(\bar{x}, x) + d(\bar{x}, x)k_0 \nleq_K 0_Y, \forall x \neq \bar{x}.$$

Chứng minh

Trước tiên ta kiểm tra quan hệ $\leq_{k_0}$ có tính phản xạ và bắc cầu. Từ (i) và $d(x, x) = 0$ nên ta có $x \leq_{k_0} x$ với mọi $x \in X$, tức là quan hệ $\leq_{k_0}$ có tính phản xạ. Bây giờ, giả sử $x \leq_{k_0} y$ và $y \leq_{k_0} z$. Theo định nghĩa của quan hệ $\leq_{k_0}$, ta có

$$f(x, y) + d(x, y)k_0 \leq_K 0_Y,$$
$$f(y, z) + d(y, z)k_0 \leq_K 0_Y.$$

Kết hợp với điều kiện (ii) và bất đẳng thức tam giác của mêtric $d(.,.)$ ta được đánh giá sau:

$$f(x, z) + d(x, z)k_0 \leq_K (f(x, y) + d(x, y)k_0) + (f(y, z) + d(y, z)k_0) \leq_K 0_Y.$$

Suy ra $x \leq_{k_0} z$. Vậy quan hệ $\leq_{k_0}$ có tính bắc cầu.

Để áp dụng Bổ đề 1, ta cần kiểm tra thêm điều kiện mọi dãy giảm $\{x_n\} \subseteq S_{\leq_{k_0}}(x_0)$ đều là dãy tiệm cận. Thật vậy, từ $\{x_n\}$ là dãy giảm và định nghĩa quan hệ $\leq_{k_0}$, ta có

$$f(x_n, x_{n+1}) + d(x_n, x_{n+1})k_0 \leq_K 0_Y, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Do đó, kết hợp với điều kiện (ii), suy ra

$$f(x_0, x_{n+1}) + \sum_{i=0}^{n} d(x_i, x_{i+1})\, k_0 \leq_K \sum_{i=0}^{n} f(x_i, x_{i+1}) + \sum_{i=0}^{n} d(x_i, x_{i+1})\, k_0 \leq_K 0_Y.$$

Vì $k_0 \notin -K$ nên theo định lý tách tồn tại $z^* \in K^+$ sao cho $z^*(k_0) = 1$. Vậy từ đánh giá trên, kéo theo

$$z^*\big(f(x_0, x_{n+1})\big) + \sum_{i=0}^{n} d(x_i, x_{i+1}) \leq 0.$$

Từ (iii), tồn tại tập bị chặn $M \subseteq Y$ sao cho $f(x_0, x_{n+1}) \in M + K$. Suy ra,

$$\sum_{i=0}^{n} d(x_i, x_{i+1}) \leq -z^*\big(f(x_0, x_{n+1})\big) \leq -\inf z^*(M).$$

Do đó, $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$. Vậy $\{x_n\}$ là dãy tiệm cận.

Áp dụng Bổ đề 1 với quan hệ phản xạ bắc cầu $\leq_{k_0}$, tồn tại $\bar{x} \in S_{\leq_{k_0}}(x_0)$ sao cho $S_{\leq_{k_0}}(\bar{x}) = \{\bar{x}\}$. Suy ra, $f(\bar{x}, x) + d(\bar{x}, x)k_0 \nleq_K 0_Y, \forall x \neq \bar{x}$.

Nhận xét 2 Trong trường hợp K là nón lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng và $k_0 \in \operatorname{int}K$ thì ta có thể giảm nhẹ điều kiện (iii) bởi điều kiện (iii') dưới đây

(iii') $f(x_0, S_{\leq_{k_0}}(x_0))$ là bị chặn dưới yếu.

Chứng minh tương tự như Định lý 1, trong đó ta chỉ cần thay hàm tuyến tính z^* bằng hàm dưới tuyến tính $\varphi_{k_0}: Y \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, được định nghĩa bởi

$$\varphi_{k_0}(v) := \inf\{t \in \mathbb{R}: v \in tk_0 - K\}.$$

Đây là một trong các hàm dưới tuyến tính được sử dụng nhiều trong phương pháp vô hướng hóa. Các bạn đọc có thể tham khảo thêm nhiều tính chất thú vị của hàm φ_{k_0} trong Gopfert *et al.*, 2003.

Bên cạnh đó, ta cũng có thể giảm nhẹ điều kiện (iii) và (iii') bởi các điều kiện bị chặn dưới bởi hàm hàm tuyến tính z^* hoặc bằng hàm dưới tuyến tính φ_{k_0}. Tuy nhiên, việc sử dụng các điều kiện bị chặn dưới cho hàm f sẽ dễ dàng kiểm tra hơn so với các điều kiện bị chặn dưới bởi hàm z^* và φ_{k_0}.

Mệnh đề 2 Cho (X, d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K\setminus\{0\}$. Cho $f: X \times X \to Y$ là hàm vectơ. Ta định nghĩa quan hệ $\leq_{k_0}$ trên X bởi

$$x_2 \leq_{k_0} x_1 \Leftrightarrow f(x_1, x_2) + d(x_1, x_2)k_0 \leq_K 0_Y.$$

Giả sử hàm f thỏa điều kiện dưới đây:

(i) $f(x, x) = 0_Y$ với mọi $x \in X$.

(ii) $f(x, z) \leq_K f(x, y) + f(y, z)$ với mọi $x, y, z \in X$.

Khi đó, ta có

(a) Nếu $S_{\leq_{k_0}}(x)$ là tập đóng với mỗi $x \in X$ thì quan hệ $\leq_{k_0}$ có tính đóng dưới.

(b) Nếu $f(x,.)$ là (k_0, K)-lsc với mỗi $x \in X$ thì quan hệ $\leq_{k_0}$ có tính đóng dưới.

Chứng minh

(a) Hiển nhiên.

(b) Từ (i) và (ii), ta có quan hệ $\leq_{k_0}$ có tính bắc cầu. Lấy dãy giảm $\{x_n\} \subseteq X$ thỏa x_n hội tụ đến $\bar{x}$. Ta chứng minh $\bar{x} \leq_{k_0} x_n$, với mọi $n \in \mathbb{N}$. Thật vậy, cố định n. Bởi tính nửa liên tục dưới của $d(x_n,.)$, khi đó với mỗi $i \in \mathbb{N}$, tồn tại $Q(i) \in \mathbb{N}$ sao cho,

$$d(x_n, x_{n+q}) \geq d(x_n, \bar{x}) - \tfrac{1}{i}, \forall q \geq Q(i).$$

Kết hợp $x_{n+q} \leq_{k_0} x_n$, kéo theo $f(x_n, x_{n+q}) + (d(x_n, \bar{x}) - \tfrac{1}{i})k_0 \leq_K f(x_n, x_{n+q}) + d(x_n, x_{n+q})k_0 \leq_K 0_Y, \forall n \in \mathbb{N}$.

Cho $q \to +\infty$,

vì $f(x_n,.)$ là (k_0, K)-lsc, ta có

$$f(x_n, \bar{x}) + (d(x_n, \bar{x}) - \tfrac{1}{i})k_0 \leq_K 0_Y.$$

Tiếp tục cho $i \to +\infty$, dựa vào tính đóng của nón K, suy ra

$$f(x_n, \bar{x}) + d(x_n, \bar{x})k_0 \leq_K 0_Y.$$

Vậy $\bar{x} \leq_{k_0} x_n$.

Định lý 2 Cho (X, d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K\setminus\{0\}$. Cho $f: X \times X \to Y$ là hàm vectơ. Với các số thực dương ε và λ cho trước, giả sử các điều điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i) $f(x, x) = 0_Y$ với mọi $x \in X$.

(ii)$f(x,z) \leq_K f(x,y) + f(y,z)$ với mọi x, y, z.

(iii)$f(x,.)$ là tựa bị chặn dưới với mọi $x \in X$.

(iv)Tập $\{x' \in X | f(x,x') + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x,x')k_0 \leq_K 0_Y\}$ là đóng với mọi $x \in X$.

Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho

(a)$f(x_0,\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_0,\bar{x})k_0 \leq_K 0_Y$.

(b)$f(\bar{x},x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\bar{x},x)k_0 \nleq_K 0_Y, \forall x \neq \bar{x}$.

Hơn nữa, nếu x_0 là điểm εk_0-xấp xỉ cực tiểu của hàm f (tức là $f(x_0,x) + \varepsilon k_0 \nleq_K 0_Y$ với mọi $x \in X$), thì $\bar{x}$ được chọn thỏa đánh giá $d(x_0,\bar{x}) \leq \lambda$.

Chứng minh

Dựa vào Mệnh đề 2(a) và Định lý 1 với mêtríc $d(.,.)$ được thay thế bằng mêtríc $\frac{\varepsilon}{\lambda} d(.,.)$, tồn tại $\bar{x} \in X$ thỏa (a) và (b).

Chúng ta tiếp tục kiểm tra $d(x_0,\bar{x}) \leq \lambda$. Giả sử $d(x_0,\bar{x}) > \lambda$. Vậy từ (a), ta có

$f(x_0,x) + \varepsilon k_0 \leq_K f(x_0,\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_0,\bar{x})k_0 \leq_K 0_Y$.

Điều này mâu thuẫn với điều kiện x_0 là điểm εk_0-xấp xỉ cực tiểu của hàm f.

Nhận xét 3. Định lý 2 trùng với Định lý 2.1 trong *Araya et al., 2008* và tổng quát hơn Định lý 1 trong *Bianchi et al., 2007*.

Định lý 3 Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K\backslash\{0\}$. Cho $f: X \times X \to Y$ là hàm vectơ. Giả sử các điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i)$f(x,x) = 0_Y$ với mọi $x \in X$.

(ii)$f(x,z) \leq_K f(x,y) + f(y,z)$ với mọi $x, y, z \in X$.

(iii)$f(x,.)$ là tựa bị chặn dưới.

(iv)$f(x,.)$ là (k_0,K)-lsc với mỗi $x \in X$.

Khi đó, với mỗi $x_0 \in X$, với các số thực dương ε và λ cho trước, tồn tại $\bar{x} \in X$ sao cho

(a)$f(x_0,\bar{x}) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(x_0,\bar{x})k_0 \leq_K 0_Y$.

(b)$f(\bar{x},x) + \frac{\varepsilon}{\lambda} d(\bar{x},x)k_0 \nleq_K 0_Y, \forall x \neq \bar{x}$.

Hơn nữa, nếu x_0 là điểm εk_0-xấp xỉ cực tiểu của hàm f (tức là $f(x_0,x) + \varepsilon k_0 \nleq_K 0_Y$ với mọi $x \in X$), thì $\bar{x}$ được chọn thỏa đánh giá $d(x_0,\bar{x}) \leq \lambda$.

Chứng minh

Tương tự Định lý 2, chứng minh dựa vào Mệnh đề 2(b) và Định lý 1.

Nhận xét 4 Định lý 3 tổng quát hơn Định lý 1 trong *Bianchi et al., 2007*.

Dưới đây là các kết quả của Định lý 1 và Mệnh đề 2 trong trường đặc biệt $f(x,y) = g(y) - g(x)$.

Định lý 4 Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K\backslash\{0\}$. Cho $g: X \to Y$ là hàm vectơ. Ta định nghĩa quan hệ $\leq_{k_0}$ trên X bởi

$$x_2 \leq_{k_0} x_1 \Leftrightarrow g(x_2) + d(x_1,x_2)k_0 \leq_K g(x_1).$$

Với mỗi $x_0 \in X$, giả sử các điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i)$f(x_0, S_{\leq_{k_0}}(x_0))$ là tựa bị chặn dưới.

(ii)Quan hệ $\leq_{k_0}$có tính đóng dưới.

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in S_{\leq_{k_0}}(x_0)$ sao cho

$$f(x) + d(\bar{x},x)k_0 \nleq_K f(\bar{x}), \forall x \neq \bar{x}.$$

Mệnh đề 3 Cho (X,d) là không gian mêtric đủ, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh và $k_0 \in K\backslash\{0\}$. Cho $g: X \to Y$ là hàm vectơ. Ta định nghĩa quan hệ $\leq_{k_0}$ trên X bởi

$$x_2 \leq_{k_0} x_1 \Leftrightarrow g(x_2) + d(x_1,x_2)k_0 \leq_K g(x_1).$$

Khi đó, ta có

(a)Nếu $S_{\leq_{k_0}}(x)$ là tập đóng với mỗi $x \in X$ thì quan hệ $\leq_{k_0}$có tính đóng dưới.

(b)Nếu $g(.)$ là (k_0,K)-lsc với mỗi $x \in X$ thì quan hệ $\leq_{k_0}$có tính đóng dưới.

4 SỰ TỒN TẠI NGHIỆM CHO BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Cho X là không gian mêtric, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh với phần trong khác rỗng. Cho $f: X \times X \to Y$ là hàm vectơ. Bài toán cân bằng vectơ được nghiên cứu dưới đây là

(VEP): tìm $\bar{x} \in X$ sao cho

$f(\bar{x},y) \notin -\text{int}K, \forall y \in X$.

Trong mục này, dựa vào dạng mở rộng của nguyên lý biến phân Ekeland ở Mục 3 thiết lập điều kiện đủ cho tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng véctơ trong trường hợp tập xác định là compact.

Định lý 5 Cho (X,d) là không gian mêtric đủ và X là tập compact, Y là không gian vectơ tôpô Hausdorff lồi địa phương được sắp thứ tự bởi nón K lồi đóng có đỉnh với $\text{int}K \neq \emptyset$ và $k_0 \in K\backslash\{0\}$. Cho $f: X \times X \to Y$ là hàm vectơ. Giả sử các điều kiện dưới đây thỏa mãn:

(i)$f(x,x) = 0_Y$ với mọi $x \in X$.

(ii)$f(x,z) \leq_K f(x,y) + f(y,z)$ với mọi $x,y,z \in X$.

(iii)$f(x,.)$ là bị chặn dưới yếu.

(iv)$f(x,.)$ là (k_0,K)-lsc với mỗi $x \in X$.

(v)$f(.,x)$ là (k_0,K)-usc với mỗi $x \in X$.

Khi đó, tập nghiệm của bài toán (VEP) là khác rỗng.

Chứng minh

Lấy $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, từ Nhận xét 2 và Định lý 3 ta tìm được dãy $\{x_n\}$ với

$$f(x_n,y) + \frac{1}{n}d(x_n,y)k_0 \nleq_K 0_Y, \forall y \neq x_n.$$

Từ đó, ta có

$$f(x_n,y) + \frac{1}{n}d(x_n,y)k_0 \notin -\text{int}K, \forall y \in X.$$

Bởi tính compact của X, không mất tính tổng quát có thể giả sử dãy $\{x_n\}$ hội tụ đến $\bar{x} \in X$. Ta sẽ chứng minh $f(\bar{x},y) \notin -\text{int}K, \forall y \in X$ bằng phương pháp phản chứng. Thật vậy, giả sử rằng tồn tại $\bar{y} \in X$ sao cho $f(\bar{x},\bar{y}) \in -\text{int}K$. Khi đó, tồn tại $\varepsilon > 0$ sao cho

$$f(\bar{x},\bar{y}) + \varepsilon k_0 \in -\text{int}K .$$

Với n đủ lớn, ta có $\frac{1}{n}d(x_n,\bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}$, kéo theo

$$\tfrac{1}{n}d(x_n,\bar{y})k_0 \in \tfrac{\varepsilon}{2}k_0 - K.$$

Mặt khác, bởi điều kiện (v), ta có

$$f(x_n,\bar{y}) \in f(\bar{x},\bar{y}) + \tfrac{\varepsilon}{2}k_0 - K.$$

Do đó suy ra,$f(x_n,\bar{y}) + \frac{1}{n}d(x_n,\bar{y})k_0$

$$\in \left(f(\bar{x},\bar{y}) + \frac{\varepsilon}{2}k_0 - K\right) + \left(\frac{\varepsilon}{2}k_0 - K\right)$$

$$\in f(\bar{x},\bar{y}) + \varepsilon k_0 - K$$

$$\in -\text{int}K - K \in -\text{int}K.$$

Điều này mâu thuẫn với tính chất của điểm x_n .

Nhận xét 5 Định lý 5 tổng quát hơn Định lý 3 trong *Bianchi et al*. (2007) và Mệnh đề 3.2 trong *Bianchi et al*. (2005). Mặt khác trong Định lý 3 của *Bianchi et al.* (2007), các tác giả đã có sai sót trong chứng minh.

Thí dụ 1 Cho $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}^2, K = \mathbb{R}^2_+$, $k_0 = (1;1)$ và $d(x,y) = |x-y|$. Xét hàm

$$g(x) = \begin{cases}(x;0) \text{ khi } x \leq 0,\\(0;x) \text{ khi } x > 0.\end{cases}$$

Đặt $f(x,y) = g(y) - g(x)$. Khi đó, các giả thiết của Định lý 5 thỏa mãn. Trong trường hợp này tập nghiệm của bài toán (VEP) là toàn bộ không gian X. Tuy nhiên, trong trường hợp này không thể áp dụng Định lý 3 trong *Bianchi et al.,* 2007 vì hàm $z^*(f(x,.))$ không bị chặn dưới với mọi $z^* \in K^+$.

Thí dụ 2 Cho $X = [-1,1], Y = \mathbb{R}, \text{K} = \mathbb{R}_+, k_0 = 1$ và $d(x,y) = |x-y|$.

Xét hàm

$$f(x,y) = y^2 - x^2.$$

Khi đó, các giả thiết của Định lý 5 thỏa mãn. Trong trường hợp này $x = 0$ nghiệm của bài toán (VEP). Tuy nhiên, trong trường hợp này, với mỗi $y \in X$ ta có $f(.,y)$ không lồi, cũng không tựa lồi nên các điều kiện đủ cho tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng sử dụng giả thiết liên quan về ánh xạ f lồi hoặc tựa lồi theo biến thứ nhất là không thể áp dụng được, cụ thể trong trường hợp này không thể áp dụng Mệnh đề 3.1 và Định lý 3.1 trong Bianchi *et al.,* 2005.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ansari, Q.H., 2007. Vectorial form of Ekeland-type variational principles with applications to vector equilibrium problems and fixed point theory. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 334(1): 561-575.

Al-Homidan, S., Ansari, Q.H., Yao, J.C., 2008. Some generalizations of Ekeland-type variational principles with applications to equilibrium problems and fixed point theory. Nonlinear Analysis: Theory, Method & Applications. 69(1): 126-139.

Araya, Y., Kimura, K. and Tanaka, T., 2008. Existence of vector equilibria via Ekeland's variational principle. Taiwanese Journal of Mathematics. 12(8): 1991-2000.

Bianchi, M., Kassay, G. and Pini, R., 2005. Existence of equilibria via Ekeland's principle. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 305(2): 502-512.

Bianchi, M., Kassay, G. and Pini, R., 2007. Ekeland's principle for vector equilibrium problems. Nonlinear Analysis: Theory, Method & Applications. 66(7): 1454-1464.

Blum, E. and Oettli, W., 1994. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. Mathematics Student. 63: 123-145.

Caristi, J., 1976. Fixed point theorem for mappings satisfying inwardness conditions. Transactions of the American Mathematical Society. 215: 241-251.

Daneš, J.A., 1972. A geometric theorem useful in nonlinear analysis. Bollettino dell'Unione Matematica Italiana. 6(4): 369-375.

Ekeland, I., 1974. On the variational principle. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 47(3): 324-353.

Gopfert, A., Riahi, H., Tammer, Chr. and Zalinescu, C., 2003 Variational Methods in Partially Ordered spaces. Spinger-Verlag, New York. 362 pages.

Khanh, P.Q. and Quy, D.N., 2010. A generalized distance and enhanced Ekeland's variational principle for vector functions. Nonlinear Analysis. 73(7): 2245-2259.

Luc, D.T., 1986. Theory of Vector Optimization. Spinger-Verlag, New York. 173 pages.

Penot, J.P., 1986. The drop theorem, the petal theorem and Ekeland's variational principle. Nonlinear Analysis. 10(9): 813-822.

Phelps, R.R., 1974. Support cones in Banach spaces and their applications. Advances in Mathematics. 13: 1-19.

Zabreiko, P.P. and Krasnosel’skii, M.A., 1971. Solvability of nonlinear operator equations. Functional Analysis and Its Applications. 5(3): 206-208.