TÍNH LIÊN TỤC HÖLDER CALM VÀ SỰ ĐẶT CHỈNH HÖLDER CỦA NGHIỆM BÀI TOÁN CÂN BẰNG PHỤ THUỘC THAM SỐ TRONG KHÔNG GIAN METRIC

Lâm Quốc Anh[1], *Trần Quốc Duy*[2], *Nguyễn Hiếu Thảo*[1] *và Đặng Thị Mỹ Vân*[3]

ABSTRACT

We consider parametric vector equilibrium problem in metric spaces. Sufficent conditions for the Hölder calm continuity of the solutions are established. We also study the Hölder well-posedness for vector equilibrium problem.

Keywords: Equilibrium problem, Hölder calm continuity, Hölder well-posedness, Hölder continuity, monotone, strong Hölder monotone, quasimonotone

Title: On the Hölder calm continuity and the Hölder well-posedness to parametric equilibrium problem in metric spaces

TÓM TẮT

Chúng tôi xét bài toán cân bằng vectơ trong không gian metric. Thu được các điều kiện đủ cho sự liên tục Hölder calm của nghiệm bài toán. Chúng tôi cũng nghiên cứu về tính đặt chỉnh Hölder của bài toán cân bằng vectơ.

Từ khóa: Bài toán cân bằng, tính liên tục Hölder calm, tính đặt chỉnh Hölder, tính liên tục Hölder, tính đơn điệu, tính đơn điệu Hölder mạnh, tính tựa đơn điệu

1 MỞ ĐẦU

Tối ưu hóa là lĩnh vực phát triển mạnh nhất của toán học trong thời gian qua. Các kết quả nghiên cứu về hướng này có vai trò quan trọng cả trong toán học lý thuyết và toán học ứng dụng. Bài toán cân bằng là một trong những bài toán trung tâm của lý thuyết đó. Bài toán cân bằng được Blum, E. and Oettli, W., 1994 đưa ra vào năm 1994 và kể từ đó bài toán này đã dành được nhiều sự quan tâm nghiên cứu của các nhà toán học trong nước và trên thế giới. Mô hình bài toán cân bằng chứa được rất nhiều bài toán quan trọng của tối ưu hóa như: bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán tối ưu, bài toán điểm bất động, bài toán điểm trùng, bài toán mạng giao thông, … Đến nay đã có rất nhiều bài báo nghiên cứu về sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng (xem Ansari, Q.H. and Yao, J.C.,1999; Hai, N.X. and Khanh, P.Q., 2007a, 2007b, 2007c; Li, X.B. and Li, S.J., 2010a), tất nhiên đây là chủ đề quan trọng hàng đầu của mọi lớp bài toán. Vấn đề quan trọng kế tiếp là sự ổn định nghiệm chỉ được nghiên cứu nhiều trong khoảng sáu năm gần đây. Có hai hướng nghiên cứu chính về sự ổn định nghiệm, hướng thứ nhất nghiên cứu sự ổn định theo nghĩa nửa liên tục, liên tục của ánh xạ nghiệm theo cả hai nghĩa Berge và Hausdorff (xem Anh, L.Q. and Khanh, P.Q., 2007a; Anh *et al.*, 2008a, 2008b; Chen, C.R. and Li, S.J., 2009; Huang, N.J., Li, J. and Thompson, H.B., 2006). Hướng nghiên cứu thứ hai là sự liên tục Hölder (Lipschitz) của nghiệm bài toán phụ thuộc tham số (xem Ait Mansour, M. and Raihi, H., 2005; Anh *et al.*, 2006,

[1] Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ
[2] Khoa Khoa học cơ bản, Trường Cao đẳng Kinh tế - Kỹ thuật Cần Thơ
[3] Bộ môn Toán, Trường Cao đẳng Cần Thơ

2008a, 2009; Bianchi, M. and Pini, R., 2003; Li *et al*., 2010b). Chúng tôi nhận thấy rằng trong sự ổn định nghiệm, tức là vấn đề về hậu tối ưu, việc đánh giá độ lệch của nghiệm bài toán nhiễu so với nghiệm của bài toán ban đầu là rất quan trọng và có ý nghĩa ứng dụng cao. Do đó trong bài báo này chúng tôi đề xuất hướng nghiên cứu về tính liên tục Hölder calm cho ánh xạ nghiệm của bài toán cân bằng phụ thuộc tham số. Đây là dạng trung gian giữa tính liên tục và tính liên tục Hölder của ánh xạ nghiệm. Hơn nữa, chúng tôi cũng nghiên cứu về sự đặt chỉnh theo nghĩa Hölder của nghiệm bài toán cân bằng. Chủ đề này rất gần với tính ổn định và có vai trò rất quan trọng trong việc thiết lập thuật toán giải.

Bài báo được cấu trúc như sau. Phần tiếp sau của mục này chúng tôi giới thiệu mô hình bài toán cân bằng và các kết quả được sử dụng ở các phần tiếp theo. Mục 2 chúng tôi nghiên cứu các điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder calm của bài toán cân bằng phụ thuộc tham số. Mục 3 trình bày kết quả về sự đặt chỉnh theo nghĩa Hölder của bài toán cân bằng. Do sự tồn tại nghiệm của bài toán cân bằng đã được nghiên cứu rất nhiều, nên trong bài báo này chúng tôi luôn giả thiết tập nghiệm là không rỗng trong lân cận của điểm đang xét.

Trong bài báo này nếu không giả thiết gì thêm, chúng tôi xét X, Λ, M là các không gian metric và R là tập hợp các số thực. Để thuận tiện ta ký hiệu chung các metric trong các không gian này là $d(.,.)$, ngữ cảnh sẽ xác định đó là metric của không gian nào. Xét $A \subseteq X$ là tập con không rỗng, $K : \Lambda \to 2^A$ là ánh xạ đa trị có giá trị không rỗng và $f : A \times A \times M \to R$ là hàm đơn trị giá trị thực. Với mỗi $(\lambda, \mu) \in \Lambda \times M$, ta xét bài toán cân bằng phụ thuộc tham số sau đây:

(EP) Tìm $\bar{x} \in K(\lambda)$ sao cho

$$f(\bar{x}, y, \mu) \geq 0, \forall y \in K(\lambda).$$

Tập nghiệm của các bài toán (*EP*) tại điểm (λ, μ) được kí hiệu là $S(\lambda, \mu)$.

Định nghĩa 1.1 Xét ánh xạ $f : X \to R$.

(i) f được gọi là liên tục $l.\alpha-$Hölder tại $\bar{x}$, nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$\left| f(x_1) - f(x_2) \right| \leq l d^{\alpha}(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in U;$$

(ii) f được gọi là liên tục $l.\alpha-$Hölder calm tại $\bar{x}$, nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$\left| f(x) - f(\bar{x}) \right| \leq l d^{\alpha}(x, \bar{x}), \forall x \in U.$$

Trong đó $l, \alpha > 0$ là các hằng số.

Từ định nghĩa ta thấy rằng nếu ánh xạ f liên tục Hölder tại $\bar{x}$ thì f liên tục Hölder calm tại $\bar{x}$. Thí dụ sau đây chỉ ra rằng chiều ngược lại của khẳng định trên nói chung không đúng.

Thí dụ 1.1 Xét $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ được xác định bởi

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ neu } x \in Q, \\ \dfrac{1}{x}, \text{ neu } x \notin Q, \end{cases}$$

trong đó Q là tập hợp các số hữu tỉ.

Ta có f là liên tục $1.1-$Hölder calm tại $x=1$. Thật vậy, với mỗi $x \in [1,+\infty)$, nếu $x \in Q$ thì $d(f(x), f(1)) = |x-1|$, và nếu $x \notin Q$ thì

$$d(f(x), f(1)) = \left|\frac{1}{x} - 1\right| = \frac{|x-1|}{x} \leq |x-1|.$$

Ta lưu ý rằng nếu f liên tục Hölder tại $x=1$, khi đó sẽ tồn tại lân cận U của 1 để f liên tục Hölder calm tại mọi $x \in U$. Nhưng với mọi $x \neq 1$, ta có các dãy $\{x_\alpha\} \subset \left[Q \cap [1,+\infty)\right], \{y_\alpha\} \subset [1,+\infty) \setminus Q$ hội tụ về x. Vì $x \neq \frac{1}{x}$, nên nếu $x \in Q$ thì $f(y_\alpha)$ không hội tụ về $f(x) = x$, còn nếu $x \notin Q$ thì $f(x_\alpha)$ không hội tụ về $f(x) = \frac{1}{x}$. Mà x tùy ý nên ta suy ra f không liên tục Hölder tại $x=1$.

Với $A, B \subseteq X$, ta định nghĩa

$$d(a,B) = \inf_{b \in B} d(a,b);$$
$$H^*(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B);$$
$$H(A,B) = \max\{H^*(A,B), H^*(B,A)\};$$
$$\rho(A,B) = \sup_{a \in A, b \in B} d(a,b).$$

Từ định nghĩa ta thấy rằng, với mọi $A, B \subseteq X$,

$$H(A,B) \leq \rho(A,B).$$

Thí dụ 1.2 Xét $A = [0,1], B = (2,4)$, ta có

$$d(1,B) = \inf_{b \in B} d(1,b) = 1;$$
$$H^*(A,B) = \sup_{a \in A} d(a,B) = 2;$$
$$H(A,B) = \max\{H^*(A,B), H^*(B,A)\} = \max\{2,3\} = 3;$$
$$\rho(A,B) = \sup_{a \in A, b \in B} d(a,b) = 4.$$

Định nghĩa 1.2 Xét ánh xạ đa trị $K : X \to 2^X$.

(i) K được gọi là liên tục $l.\alpha-$Hölder tại $\bar{x}$, nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$H(K(x_1), K(x_2)) \leq l d^\alpha(x_1, x_2), \forall x_1, x_2 \in U;$$

(ii) K được gọi là liên tục $l.\alpha-$Hölder calm tại $\bar{x}$, nếu tồn tại lân cận U của $\bar{x}$ sao cho

$$H(K(x), K(\bar{x})) \leq l d^\alpha(x, \bar{x}), \forall x \in U.$$

Trong đó $l, \alpha > 0$ là các hằng số.

Định nghĩa 1.3 Hàm $f : A \times A \times M \to R$ được gọi là liên tục $m.\beta-$Hölder calm với $\theta-$tương ứng tại $\bar{\mu} \in M$, nếu tồn tại lân cận V của $\bar{\mu}$ để

$$\left|f(x,y,\bar{\mu})-f(x,y,\mu)\right|\leq md^{\beta}(\bar{\mu},\mu)d^{\theta}(x,y)\,,\forall\mu\in V,\forall x,y\in A,x\neq y.$$

Trong đó $m,\beta,\theta>0$ là các hằng số.

Định nghĩa 1.4 Cho hàm số $f:X\times X\to R$. Với $h,\beta>0$ cho trước.

(i) *f* được gọi là giả đơn điệu $h.\beta-$Hölder mạnh trong $S\subseteq X$ nếu với mọi $x,y\in S,x\neq y$,

$$[f(x,y)\geq 0\Rightarrow f(y,x)+hd^{\beta}(x,y)\leq 0].$$

(ii) f được gọi là tựa đơn điệu trong $S\subseteq X$, nếu với mọi $x,y\in S,x\neq y$,

$$[f(x,y)<0\Rightarrow f(y,x)\geq 0].$$

(iii) *f* được gọi là đơn điệu $h.\beta-$Hölder mạnh trong $S\subseteq X$, nếu với mọi $x,y\in S,x\neq y$,

$$f(x,y)+f(y,x)+hd^{\beta}(x,y)\leq 0.$$

Dễ thấy rằng nếu *f* đơn điệu $h.\beta-$Hölder mạnh trong S thì f giả đơn điệu $h.\beta-$Hölder mạnh trong *S*. Giả thiết sau đây về tính Hölder đóng vai trò cốt lõi trong việc nghiên cứu sự liên tục Hölder calm của ánh xạ nghiệm bài toán (EP).

(*M*) Với điểm đang xét $(\bar{\lambda},\bar{\mu})\in\Lambda\times M$, tồn tại lân cận $U(\bar{\lambda})$ của $\bar{\lambda}$ sao cho,

$$hd^{\beta}(x,y)\leq d\left(f(x,y,\bar{\mu}),R_{+}\right)+d\left(f(y,x,\bar{\mu}),R_{+}\right),\forall x,y\in K\left(U(\bar{\lambda})\right),x\neq y,$$

với h,β là các hằng số dương.

Điều kiện (*M*) trông có vẻ phức tạp, mệnh đề sau sẽ cho ta thấy điều kiện (*M*) có quan hệ rất gần với tính đơn điệu của ánh xạ *f*.

Mệnh đề 1.1

(i) *Nếu* $f:X\times X\to R$ *thỏa mãn điều kiện* (*M*) *thì f giả đơn điệu* $h.\beta-$*Hölder mạnh trong S.*
Ngược lại, nếu f tựa đơn điệu và giả đơn điệu $h.\beta-$*Hölder mạnh trong S thì f thỏa mãn điều kiện* (*M*).

(ii) *Nếu* $f:X\times X\to R$ *là đơn điệu* $h.\beta-$*Hölder mạnh trong* $S\subseteq X$ *thì f thỏa mãn điều kiện* (*M*).

Chứng minh

(i) Giả thiế f thỏa mãn điều kiện (*M*). Giả sử $f(x,y)\geq 0$. Khi đó $d(f(x,y),R_{+})=0$, và nếu $f(y,x)\geq 0$ thì $d(f(y,x),R_{+})=0$ và điều kiện (*M*) suy ra $hd^{\beta}(x,y)\leq 0$. Điều này vô lý vì $h>0$ và $x\neq y$. Do đó $f(y,x)<0$. Khi đó $d(f(y,x),R_{+})=-f(y,x)$, nên điều kiện (*M*) trở thành $hd^{\beta}(x,y)\leq -f(y,x)$. Điều này tương đương với $f(y,x)+hd^{\beta}(x,y)\leq 0$, tức là f giả đơn điệu $h.\beta-$Hölder mạnh trong S

Ngược lại, nếu f là giả đơn điệu $h.\beta-$Hölder mạnh và tựa đơn điệu trong S. Ta chứng minh f thỏa mãn điều kiện (*M*). Thật vậy, nếu $f(x,y)\geq 0$, tức là $d(f(x,y),R_+)=0$, đồng thời tính giả đơn điệu $h.\beta-$Hölder mạnh của f suy ra

$$f(y,x)+hd^{\beta}(x,y)\leq 0. \tag{1}$$

Nếu $f(y,x)\geq 0$ thì $d(f(y,x),R_+)=0$ và (1) suy ra $hd^{\beta}(x,y)\leq 0.$ Điều này vô lý vì $h>0$ và $x\neq y$. Nếu $f(y,x)<0$ thì $d(f(y,x),R_+)=-f(y,x)$. Khi đó từ (1) ta có

$$hd^{\beta}(x,y)\leq d(f(y,x),R_+)$$

hay f thỏa mãn điều kiện (*M*).

Còn nếu $f(x,y)<0$, ta có $d(f(x,y),R_+)=-f(x,y)$ và f tựa đơn điệu nên $f\left(y,x\right)\geq 0.$ Khi đó $d(f(y,x),R_+)=0$ và f giả đơn điệu $h.\beta-$Hölder mạnh nên

$$f(x,y)+hd^{\beta}(x,y)\leq 0 \Leftrightarrow hd^{\beta}(x,y)\leq d(f(x,y),R_+),$$

tức là f thỏa mãn điều kiện (*M*).

(ii) Giả thiết $f:X\times X\to R$ là đơn điệu $h.\beta-$Hölder mạnh trong $S\subseteq X$, tức là

$$f(x,y)+f(y,x)+hd^{\beta}(x,y)\leq 0. \tag{2}$$

Nếu $f(x,y)\geq 0, f(y,x)\geq 0 \Leftrightarrow d(f(x,y),R_+)=d(f(y,x),R_+)=0,$ thì từ (2) ta suy ra $hd^{\beta}(x,y)\leq 0.$ Điều này vô lý vì $h>0$ và $x\neq y$.

Nếu $f(x,y)<0, f(y,x)<0$, suy ra

$$d(f(x,y),R_+)=-f(x,y), d(f(y,x),R_+)=-f(y,x).$$

Nên ta suy ra điều kiện (*M*) nghiệm đúng.

Nếu $f(x,y)\geq 0, f(y,x)<0$, thì từ (2) ta suy ra

$$hd^{\beta}(x,y)\leq -f(y,x)=d(f(y,x),R_+).$$

Từ đây ta có điều kiện (*M*) vì $d(f(x,y),R_+)=0$.

Nếu $f(y,x)\geq 0, f(x,y)<0,$ thì theo (2) ta có

$$hd^{\beta}(x,y)\leq -f(x,y)=d(f(x,y),R_+).$$

Do đó ta có điều kiện (*M*) vì $d(f(y,x),R_+)=0$.

2 TÍNH LIÊN TỤC HÖLDER CALM CỦA ÁNH XẠ NGHIỆM

Trong mục này chúng tôi nghiên cứu điều kiện đủ cho tính liên tục Hölder calm của nghiệm bài toán cân bằng, và giả sử rằng $S(\lambda,\mu)\neq\varnothing$ với mọi (λ,μ) trong lân cận của điểm đang xét $(\bar{\lambda},\bar{\mu})$.

Định lý 2.1 *Xét bài toán (EP), giả sử rằng các điều kiện sau đây nghiệm đúng:*

(i) *tồn tại các lân cận $U(\bar{\lambda})$ của $\bar{\lambda}$ và $V(\bar{\mu})$ của $\bar{\mu}$ sao cho f liên tục $n_1.\delta_1-$Hölder calm $\theta-$tương ứng với $K(U(\bar{\lambda}))$ tại $\bar{\mu}$ và với mọi*

$x\in K(U(\bar{\lambda}))$ và $\mu\in V(\bar{\mu})$, ánh xạ $f(x,.,\mu)$ liên tục $n_2.\delta_2-$Hölder trong $K(U(\bar{\lambda}))$;

(ii) *giả thiết* (*M*) *thỏa mãn*;

(iii) *với mỗi $\lambda\in U(\bar{\lambda})$ và $x\in K(U(\bar{\lambda}))$, K liên tục $l.\alpha-$Hölder calm tại $\bar{\lambda}$*;

(iv) $\beta>\theta$.

Khi đó, với mỗi (λ,μ) trong một lân cận của $(\bar{\lambda},\bar{\mu})$, tập nghiệm của bài toán (*EP*) *thỏa mãn điều kiện liên tục Hölder calm với khoảng cách ρ, tức là*

$$\rho(S(\bar{\lambda},\bar{\mu}),S(\lambda,\mu))\le k_1d^{\alpha\delta_2/\beta}(\bar{\lambda},\lambda)+k_2d^{\delta_1/(\beta-\theta)}(\bar{\mu},\mu),$$

trong đó k_1 và k_2 là các hằng số dương phụ thuộc vào $h,\beta,\delta_1,\delta_2,\theta,\ \dots$

Chứng minh: Lấy $\lambda\in U(\bar{\lambda})$ và $\mu\in V(\bar{\mu})$.

Bước 1: Ta chứng minh rằng, với mỗi $x(\bar{\lambda},\bar{\mu})\in S(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ và $x(\lambda,\bar{\mu})\in S(\lambda,\bar{\mu})$,

$$d_2:=d\left(x(\bar{\lambda},\bar{\mu}),x(\lambda,\bar{\mu})\right)\le\left(\frac{2n_2l^{\delta_2}}{h}\right)^{1/\beta}d^{\alpha\delta_2/\beta}\left(\bar{\lambda},\lambda\right). \tag{3}$$

Ta chỉ cần xét $x(\bar{\lambda},\bar{\mu})\ne x(\lambda,\bar{\mu})$, do (iii) nên tồn tại $\bar{x}\in K(\bar{\lambda})$ và $x\in K(\lambda)$ sao cho

$$d\left(x(\bar{\lambda},\bar{\mu}),x\right)\le ld^{\alpha}(\bar{\lambda},\lambda), \tag{4}$$

$$d\left(x(\lambda,\bar{\mu}),\bar{x}\right)\le ld^{\alpha}(\bar{\lambda},\lambda). \tag{5}$$

Theo định nghĩa của bài toán (*EP*), ta có

$$f\left(x(\bar{\lambda},\bar{\mu}),\bar{x},\bar{\mu}\right)\ge 0, \tag{6}$$

$$f\left(x(\lambda,\bar{\mu}),x,\bar{\mu}\right)\ge 0. \tag{7}$$

Từ giả thiết (ii) suy ra

$$d\left(f(x(\bar{\lambda},\bar{\mu}),x(\lambda,\bar{\mu}),\bar{\mu}),R_+\right)+d\left(f(x(\lambda,\bar{\mu}),x(\bar{\lambda},\bar{\mu}),\bar{\mu}),R_+\right)\ge hd_2^{\beta}.$$

Kết hợp với (6) và (7) ta được

$$d\left(f(x(\bar{\lambda},\bar{\mu}),x(\lambda,\bar{\mu}),\bar{\mu}),f(x(\bar{\lambda},\bar{\mu}),\bar{x},\bar{\mu})\right)+$$
$$+\ d\left(f(x(\lambda,\bar{\mu}),x(\bar{\lambda},\bar{\mu}),\bar{\mu}),f(x(\lambda,\bar{\mu}),x,\bar{\mu})\right)\ge hd_2^{\beta}.$$

Theo giả thiết (i) về tính liên tục $n_2.\delta_2-$Hölder theo thành phần thứ hai của *f* trong $K(U(\bar{\lambda}))$ ta suy ra

$$n_2d^{\delta_2}\left(x(\bar{\lambda},\bar{\mu}),x\right)+n_2d^{\delta_2}\left(x(\lambda,\bar{\mu}),\bar{x}\right)\ge hd_2^{\beta}.$$

Từ (4) và (5) ta có

$$n_2l^{\delta_2}d^{\alpha\delta_2}(\bar{\lambda},\lambda)+n_2l^{\delta_2}d^{\alpha\delta_2}(\bar{\lambda},\lambda)\ge hd_2^{\beta},$$

hay $d_2^{\beta}\le\dfrac{2n_2l^{\delta_2}}{h}d^{\alpha\delta_2}(\bar{\lambda},\lambda)$, tức là (3) được chứng minh.

Bước 2: Ta chứng minh rằng, với mỗi $x(\lambda,\bar{\mu})\in S(\lambda,\bar{\mu})$ và $x(\lambda,\mu)\in S(\lambda,\mu)$,

$$d_1 := d\left(x(\lambda,\overline{\mu}), x(\lambda,\mu)\right) \le \left(\frac{n_1}{h}\right)^{1/(\beta-\theta)} d^{\delta_1/(\beta-\theta)}(\overline{\mu},\mu). \tag{8}$$

Ta chỉ cần xét $x(\lambda,\overline{\mu}) \ne x(\lambda,\mu)$. Vì $x(\lambda,\overline{\mu})$, $x(\lambda,\mu) \in K(\lambda)$, và $x(\lambda,\mu)$, $x(\lambda,\overline{\mu})$ là các nghiệm của bài toán (*EP*), nên ta có

$$f\left(x(\lambda,\overline{\mu}), x(\lambda,\mu), \overline{\mu}\right) \ge 0, \tag{9}$$

$$f\left(x(\lambda,\mu), x(\lambda,\overline{\mu}), \mu\right) \ge 0. \tag{10}$$

Từ giả thiết (ii) suy ra

$$d\left(f(x(\lambda,\overline{\mu}), x(\lambda,\mu), \overline{\mu}), R_+\right) + d\left(f(x(\lambda,\mu), x(\lambda,\overline{\mu}), \overline{\mu}), R_+\right) \ge hd_1^{\beta}.$$

Kết hợp với (9) và (10) ta được

$$d\left(f(x(\lambda,\mu), x(\lambda,\overline{\mu}), \overline{\mu}), f(x(\lambda,\mu), x(\lambda,\overline{\mu}), \mu)\right) \ge hd_1^{\beta}.$$

Do vậy, theo giả thiết (i) ta suy ra

$$n_1 d_1^{\theta} d^{\delta_1}(\overline{\mu},\mu) \ge hd_1^{\beta}.$$

Điều này tương đương với $d_1^{\beta-\theta} \le \frac{n_1}{h} d^{\delta_1}(\overline{\mu},\mu)$, hay ta có (8).

Bước 3: Với mọi $x(\overline{\lambda},\overline{\mu}) \in S(\overline{\lambda},\overline{\mu})$ và mọi $x(\lambda,\mu) \in S(\lambda,\mu)$, ta có

$$d(x(\overline{\lambda},\overline{\mu}), x(\lambda,\mu)) \le d_1 + d_2.$$

Từ (3) và (8), nếu đặt $k_1 = \left(\frac{2n_2 l^{\delta_2}}{h}\right)^{1/\beta}$ và $k_2 = \left(\frac{n_1}{h}\right)^{1/(\beta-\theta)}$, thì ta có

$$\rho(S(\overline{\lambda},\overline{\mu}), S(\lambda,\mu)) \le k_1 d^{\alpha\delta_2/\beta}(\overline{\lambda},\lambda) + k_2 d^{\delta_1/(\beta-\theta)}(\overline{\mu},\mu).$$

Vậy định lý được chứng minh xong.

Thông thường để thu được một tính chất nào đó của ánh xạ nghiệm, thì dữ liệu của bài toán cũng thỏa mãn ở mức độ tương ứng. Ta thấy rằng trong các giả thiết của Định lý 2.1 đều đề cập đến tính liên tục Hölder và tính liên tục Hölder calm, trừ giả thiết (*M*). Thí dụ sau cho thấy rằng giả thiết (*M*) là không bỏ được.

Thí dụ 2.1 Ta xét trường hợp $A = M \equiv \Lambda = R, K(\lambda) = [-1,+\infty)$ với mọi $\lambda \in R$, và ánh xạ mục tiêu f được xác định bởi

$$f(x,y,\lambda) = x + y + |\lambda|.$$

Xét $\overline{\lambda} = 0$. Ta kiểm tra f thỏa mãn điều kiện (i).

Ta có

$$\left|f(x,y,\lambda) - f(x,y,0)\right| = |\lambda|, \forall x, y \in [-1,+\infty).$$

Tức là f liên tục $1.1-$Hölder calm 0 – tương ứng với $[-1,+\infty)$ tại 0.

Mặt khác,

$$\left|f(x,y,\lambda) - f(x,\overline{y},\lambda)\right| = \left|y - \overline{y}\right|, \forall y \in [-1,+\infty),$$

nên f liên tục $1.1-$Hölder trong $[-1,+\infty)$. Như vậy f thỏa mãn giả thiết (i) của Định lý 2.1. Hiển nhiên giả thiết (iii) nghiệm đúng. Nhưng ta có,

$$S(0)=[1,+\infty), S(\lambda)=[1-|\lambda|,+\infty), \text{ với } \lambda \in V(0).$$

Khi đó ta có ngay

$$\rho\big(S(\lambda),S(0)\big)=+\infty.$$

Do đó, S không liên tục Hölder calm tại $\lambda=0$. Lý do là giả thiết (ii) không đúng. Thật vậy, ta có

$$d(f(1,2,0),R_+)+d(f(2,1,0),R_+)=0<h\,|1-2|^{\beta}=h, \forall h,\beta>0.$$

Vậy giả thiết (M) trong định lý trên là không bỏ được.

3 SỰ ĐẶT CHỈNH HÖLDER CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG

Cho X, A như ở phần mở đầu và $K \subseteq A, f: K\times A \to R.$ Ta xét bài toán cân bằng có dạng như sau:

Tìm $\bar{x}\in K$ sao cho $f(\bar{x},y)\geq 0, \forall y\in K.$

Ta ký hiệu S là tập nghiệm của bài toán trên.

Ta xét trường hợp tập ràng buộc K bị nhiễu bởi tham số λ trong không gian metric Λ, tức là $K:\Lambda\to 2^A$. Với mỗi $\lambda\in\Lambda$, ta xét bài toán sau.

(EP_λ) Tìm $\bar{x}\in K(\lambda)$ sao cho $f(\bar{x},y)\geq 0, \forall y\in K(\lambda).$

Ứng với $\lambda\in\Lambda$, ta ký hiệu $S(\lambda)$ là tập nghiệm của bài toán (EP_λ).

Giả sử rằng bài toán gốc là ứng với giá trị tham số $\lambda=\bar{\lambda}$, tức là $S=S\big(\bar{\lambda}\big)$.

Với mỗi $\lambda\in\Lambda, \varepsilon>0$, ta xét bài toán xấp xỉ của bài toán (EP_λ) như sau

$(EP_{\varepsilon,\lambda})$: Tìm $\bar{x}\in K$ sao cho, $\forall y\in K,$

$$f(\bar{x},y)+\varepsilon\geq 0.$$

Tập nghiệm của bài toán $(EP_{\varepsilon,\lambda})$ được ký hiệu là $\tilde{S}(\varepsilon,\lambda)$.

Để đơn giản trong cách trình bày, ta viết bài toán $(\mathcal{EP})$ thay cho họ các bài toán $\{(EP_\lambda):\lambda\in\Lambda\}$. Chúng tôi mở rộng khái niệm đặt chỉnh Lipschitz của bài toán tối ưu do E. Bednarczuk đề xuất năm 2007, cho bài toán cân bằng như sau.

Định nghĩa 3.2 Bài toán $(\mathcal{EP})$ được gọi là đặt chỉnh Hölder tại $\bar{\lambda}$ nếu

(i) $\tilde{S}(0,\bar{\lambda})$ không rỗng;

(ii) $\tilde{S}$ liên tục Hölder calm tại $(0,\bar{\lambda})$.

Khi bậc Hölder của $\tilde{S}$ bằng 1, ta nói rằng $(\mathcal{EP})$ là đặt chỉnh Lipschitz tại $\bar{\lambda}$

Định lý sau đây cho ta điều kiện đủ về tính đặt chỉnh Hölder của bài toán $(\mathcal{EP})$.

Định lý 3.1 *Giả sử* $S(\bar{\lambda}) \neq \varnothing$ *và các điều kiện sau đây nghiệm đúng:*

(i) *tồn tại lân cận* $U(\bar{\lambda})$ *của* $\bar{\lambda}$ *sao cho với mọi* $x \in K(U(\bar{\lambda}))$, *ánh xạ* $f(x,.)$ *liên tục* $n_2.\delta_2 -$*Hölder trong* $K(U(\bar{\lambda}))$;

(ii) $hd^{\beta}(x,y) \leq d(f(x,y),R_+) + d(f(y,x),R_+), \forall x,y \in K(U(\bar{\lambda})), x \neq y$, *với* h,β *là các hằng số dương*;

(iii) *với mọi* $\lambda \in U(\bar{\lambda})$ *và mọi* $x \in K(U(\bar{\lambda}))$, K *liên tục* $l.\alpha -$*Hölder calm tại* $\bar{\lambda}$.

Khi đó bài toán $(\mathcal{EP})$ *là đặt chỉnh Hölder tại* $\bar{\lambda}$.

Chứng minh: Ta xét hàm số $g: A \times A \times [0,+\infty) \to R$ xác định bởi

$$g(x,y,\varepsilon) = f(x,y) + \varepsilon.$$

Khi đó để chứng minh Định lý 3.1, ta chỉ cần kiểm tra hàm số *g* thỏa mãn các giả thiết (i) và (ii) của Định lý 2.1.

Kiểm tra giả thiết (i).

Gọi V là lân cận của 0 trong $[0,+\infty)$, thì với mọi $\varepsilon \in V$ và $x,y \in K\big(U(\bar{\lambda})\big)$, $x \neq y$, ta có

$$\left|g(x,y,\varepsilon) - g(x,y,0)\right| = \left|f(x,y) + \varepsilon - f(x,y) - 0\right| = \varepsilon,$$

điều này có nghĩa là g liên tục $1.1-$Hölder calm $0-$tương ứng với $K\big(U(\bar{\lambda})\big)$ tại 0.

Ta cũng có

$$\left|g(x,y,\varepsilon) - g(x,\bar{y},\varepsilon)\right| = \left|f(x,y) - f(x,\bar{y})\right| \leq n_2 d^{\delta_2}(y,\bar{y}),$$

nên *g* liên tục $n_2.\delta_2 -$Hölder theo thành phần thứ hai trong $K\big(U(\bar{\lambda})\big)$.

Vậy g thỏa mãn giả thiết (i).

Kiểm tra giả thiết (ii).

Với mỗi $x,y \in K\big(U(\bar{\lambda})\big)$, $x \neq y$, ta có

$$d(g(x,y,0),R_+) + d(g(y,x,0),R_+) = d(f(x,y),R_+) + d(f(y,x),R_+) \geq hd^{\beta}(x,y).$$

Tức là g thỏa mãn giả thiết (ii).

Vậy hàm g thỏa mãn các điều kiện của Định lý 2.1, tức là ánh xạ nghiệm của bài toán $(\mathcal{EP})$ liên tục Hölder calm. Theo Định nghĩa 3.2 ta suy ra điều cần chứng minh.

4 KẾT LUẬN

Với các giả thiết về sự liên tục Hölder và liên tục Hölder calm đối với khoảng cách Hausdorff, chúng tôi đã thu được sự liên tục Hölder calm của ánh xạ nghiệm đối với khoảng cách ρ, tính chất này mạnh hơn tính chất liên tục Hölder calm theo khoảng cách Hausdorff. Đồng thời chúng tôi cũng thiết lập được điều kiện đủ cho sự đặt chỉnh Hölder cho bài toán cân bằng. Đây là những hướng nghiên cứu mới và có thể được mở rộng cho nhiều lớp bài toán khác trong tối ưu hóa. Kết quả đạt được trong bài báo này có thể áp dụng vào các trường hợp đặc biệt của bài toán cân bằng như: bài toán biến phân, bài toán tối ưu, bài toán điểm bất động, bài toán điểm trùng,... để có được các kết quả tương ứng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Ait Mansour, M. and Riahi, H., 2005. Sensitivity analysis for abstract equilibrium problems. *J. Math. Anal. Appl*. 306: 684-691.

Anh, L.Q. and Khanh, P.Q., 2006. On the Hölder continuity of solutions to multivalued vector equilibrium problems. *J. Math. Anal. Appl*. 321: 308-315.

Anh, L.Q. and Khanh, P.Q., 2007a. On the stability of the solution sets of general multivalued vector quasiequilibrium problems. *J. Optim. Theory Appl*. 135: 271-284.

Anh, L.Q. and Khanh, P.Q., 2007b. Uniqueness and Hölder continuity of the solution to multivalued equilibrium problems in metric spaces. *J. Glob. Optim*. 37: 449- 465.

Anh, L.Q. and Khanh, P.Q., 2008a. Semicontinuity of the approximate solution sets of multivalued quasiequilibrium problems. *Numer. Funct. Anal. Optim*. 29: 24-42.

Anh, L.Q. and Khanh, P.Q., 2008b. Various kinds of semicontinuity and solution sets of parametric multivalued symmetric vector quasiequilibrium problems. *J. Glob. Optim*. 41: 539-558.

Anh, L.Q. and Khanh, P.Q., 2009. Hölder continuity of the unique solution to quasiequilibrium problems in metric spaces. *J. Optim. Theory Appl*. 141: 37–54.

Ansari, Q.H. and Yao, J.C., 1999. An existence result for the generalized vector equilibrium problem. *Appl. Math. Lett*. 12: 53-56.

Bednarczuk, E., 2007. Stability analysis for parametric vector optimization problems. *Warszawa*, *Poland*.

Bianchi, M. and Pini, R., 2003. A note on stability for parametric equilibrium problems. *Oper. Res. Lett*. 31: 445-450.

Blum, E. and Oettli, W., 1994. From optimization and variational inequalities to equilibrium problems. *Math. Student*. 63: 123-145.

Chen, C.R., Li, S.J. and Teo, K.L., 2009. Solution semicontinuity of parametric generalized vector equilibrium problems. *J. Glob. Optim*. 45: 309-318.

Hai, N.X. and Khanh, P.Q., 2007a. Existence of solutions to general quasiequilibrium problems and applications. *J. Optim. Theory Appl*. 133: 317-327.

Hai, N.X. and Khanh, P.Q., 2007b. The solution existence of general variational inclusion problems. *J. Math. Anal. Appl.* 328: 1268-1277.

Hai, N.X. and Khanh, P.Q., 2007b. The solution existence of general variational inclusion problems. *J. Math. Anal*. Appl. 328: 1268-1277.

Huang, N.J., Li, S.J. and Thompson, H.B., 2006. Stability for parametric implicit vector equilibrium problems. *Math. Comput. Modelling*. 43: 1267-1274.

Li, X.B. and Li, S.J., 2010. Existences of solutions for generalized vector quasiequilibrium problems. *Optim. Lett*. 4: 17-28.

Li, X.B., Li, S.J. and Chen, C.R., 2010. Lipschitz continuity of an approximate solution mapping to equilibrium problems. *Submitted*.